Современная математика. Фундаментальные направления. Том 1 (2003). С. 30–39

УДК 517.938

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2003 г. **С. БОДИН, М. БОХНЕР, Д. ЛУТЦ**

Аннотация. Изучаются линейные динамические системы на временны́х шкалах. В качестве частных случаев таких динамических систем рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений, разностных уравнений и другие динамические системы. Получено асимптотическое представление для фундаментальной матрицы решений, что позволяет свести исследование асимптотического поведения систем к изучению скалярных динамических уравнений. В качестве модельных примеров рассматривается асимптотика решений скалярных динамических уравнений простейших видов; такие решения являются естественными обобщениями понятия обычной экспоненциальной функции.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В структуре решений линейных систем дифференциальных уравнений, разностных уравнений и некоторых видов более общих функциональных уравнений присутствует большое число схожих свойств. В качестве единого инструмента для исследования этих свойств в последнее десятилетие была развита теория динамических уравнений на временных шкалах. Построение временных шкал в рамках данной теории позволяет установить многие общие свойства, присущие как самим уравнениям, так и их решениям. Например, получена формула вариации постоянных (см. [4, с. 195-196]), обобщающая аналогичную формулу для систем дифференциальных уравнений и позволяющая получить аналогичную информацию о решениях неоднородных систем разных видов. В данной работе мы занимаемся вопросами, связанными с асимптотикой решений динамических уравнений различных типов. Для установления некоторых общих принципов, регулирующих асимптотическое поведение решений, будут применены временные шкалы.

В частности, будем рассматривать линейные системы (называемые *динамическими уравнениями*) вида

$$y^{\Delta} = A(t)y, \tag{1}$$

где y есть n-мерный вектор функций, зависящих от переменной t и определенных либо на неограниченном интервале $[t_0, \infty)$, либо на некотором его замкнутом подмножестве. Оператор Δ будет определен ниже; $A(t)$ есть $n \times n$-матрица функций, определенных при $t > t_0$ и удовлетворяющих некоторым условиям, которые также будут описаны ниже.

Наша основная задача — получить, если возможно, асимптотическое представление фундаментальной матрицы решений в виде

$$Y(t) = P(t)[I + E(t)]D(t), \tag{2}$$

где $P(t)$ — обратимая матрица, состоящая из явно определенных элементарных или специальных функций; $D(t)$ — диагональная матрица, состоящая из функций, которые удовлетворяют одномерным (скалярным) уравнениям вида (1); $E(t)$ — матрица, удовлетворяющая следующему асимптотическому условию:

$$E(t) = \mathrm{o}(1) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Здесь мы используем символы Харди–Литлвуда «o» и «O» в обычном смысле.

Роль преобразования $y = P(t)v$ заключается в приведении заданной системы к системе, имеющей так называемый «L-диагональный вид». Это означает, что система (1) оказывается эквивалентной (посредством матрицы P) системе вида

$$v^{\Delta} = [\Lambda(t) + R(t)]v, \tag{3}$$

где Λ — диагональная матрица, а R — соответствующее малое возмущение. Наш основной результат дает условия, при выполнении которых решения возмущенного и невозмущенного уравнений асимптотически эквивалентны в том смысле, что фундаментальные решения связаны множителем вида $[I + E(t)]$. Представление (2) позволяет свести (в смысле асимптотического поведения) изучение решений n-мерных уравнений к изучению одномерных (скалярных) линейных уравнений, соответствующих диагональным элементам в (3). Для изучения асимптотического поведения таких функций мы также исследуем поведение решений некоторых простейших типов скалярных уравнений (а именно — уравнений с постоянными коэффициентами). Указанные решения являются естественными обобщениями экспоненциальных функций. Более подробное описание результатов настоящей работы, а также различные примеры можно найти в статьях [2, 3].

Классические примеры уравнения (1), которые уже достаточно глубоко изучены, связаны с дифференциальным оператором $y^{\Delta}(t) = dy/dt$, с разностным оператором опережающего типа $y^{\Delta}(t) = y(t+1) - y(t)$ и с q-разностным оператором $y^{\Delta}(t) = \dfrac{y(qt) - y(t)}{(q-1)t}$, где $q > 1$. Среди этих примеров, вероятно, наиболее общая теория построена для дифференциальных уравнений. Затем идут разностные уравнения и, наконец, — q-разностные. Мы покажем, что для изучения всех этих случаев (а также для изучения многих других типов уравнений) могут быть применены весьма близкие методы, позволяющие получить описанное выше асимптотическое представление.

2. Временные шкалы и индуцированные ими операторы

Временная шкала $\mathbb{T}$ — это любое непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Поскольку нас будет интересовать асимптотика при $t \to \infty$, будем рассматривать временные шкалы, неограниченные сверху. Для любой такой временной шкалы можно определить функцию $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, называемую *оператором перехода*, по формуле

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \ : \ s > t\}$$

и неотрицательную функцию $\mu(t) = \sigma(t) - t$, называемую *зернистостью* временной шкалы $\mathbb{T}$. Пусть функция y определена на $\mathbb{T}$ и существует предел

$$\lim_{s \to t} \frac{y(\sigma(t)) - y(s)}{\sigma(t) - s}.$$

Тогда будем говорить, что функция *y дифференцируема* в точке t, а указанный предел есть ее дельта-производная (которую обозначим через $y^{\Delta}(t)$). Если таким образом определить операторы, используемые в (1), то нетрудно проверить, что в трех описанных выше классических случаях для временных шкал $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ и $q^{\mathbb{N}}$ операторы перехода соответственно совпадают с t, $t+1$ и qt. При этом индуцированные ими дельта-производные суть d/dt, разностный оператор опережающего типа и q-разностный оператор соответственно. Интересен также случай, когда временная шкала есть $\mathbb{N}^2$. При этом зернистость задается формулой $\sigma(t) = 1 + t + 2\sqrt{t}$, а индуцированный ей дельта-оператор — формулой

$$y^{\Delta}(t) = \frac{y(1 + t + 2\sqrt{t}) - y(t)}{1 + 2\sqrt{t}}.$$

К настоящему времени исчисление на временных шкалах — достаточно изученная область. За различными подробностями, примерами и полным описанием используемых нами основных концепций читатель может обратиться к недавно вышедшей книге [4]. В частности, наиболее важными для нас будут правила умножения (см. [4, теорема 1.20 (iii)]), определение и свойства интеграла (см. [4, раздел 1.4]), а также фундаментальная теорема о существовании решений линейных систем (см. [4, теорема 5.8]). Если элементы матрицы $A(t)$ удовлетворяют *условию регрессивности*

$$\text{матрица} \quad I+\mu(t)A(t) \quad \text{обратима для всех} \quad t\in\mathbb{T} \tag{4}$$

и условию *правой плотной непрерывности* (см. [4]), то (1) имеет фундаментальную матрицу решений $Y(t)$ (чье асимптотическое поведение мы далее обсудим). В скалярном случае это означает, что достаточное условие однозначной разрешимости начальной задачи

$$d^{\Delta}=p(t)d, \quad d(t_0)=1 \tag{5}$$

заключается в том, что функция p регрессивна (т. е. $1+\mu(t)p(t)\neq 0$ для всех $t\in\mathbb{T}$) и удовлетворяет условию правой плотной непрерывности. В этом случае единственное решение начальной задачи (5) называется *скалярной экспоненциальной функцией* на $\mathbb{T}$ и обозначается через $e_p(t,\, t_0;\, \mathbb{T})$ или $e_p(t,\, t_0;\, \sigma(t))$. Множество всех регрессивных функций, обладающих свойством правой плотной непрерывности, есть группа относительно операции сложения $\oplus$, заданной по формуле

$$(p\oplus q)(t):=p(t)+q(t)+\mu(t)p(t)q(t)$$

(так называемая *регрессивная группа* $\mathcal{R}$). Если $\ominus p$ обозначает элемент, обратный к $p\in\mathcal{R}$ относительно операции сложения, а операция $p\ominus q$ определяется формулой $p\oplus(\ominus q)$, то легко видеть, что

$$(p\ominus q)(t)=\frac{p(t)-q(t)}{1+\mu(t)q(t)}.$$

Далее, для любых $p,\, q\in\mathcal{R}$ выполняются правила

$$e_pe_q=e_{p\oplus q} \quad \text{и} \quad \frac{e_p}{e_q}=e_{p\ominus q}.$$

Дальнейшие результаты, связанные с временными шкалами, можно найти в уже упоминавшихся работах [2–4], а также в [5, 10].

3. Теорема о возмущении

Теперь сравним асимптотическое поведение решений двух систем:

$$y^{\Delta}=A(t)y \tag{6}$$

и

$$x^{\Delta}=[A(t)+R(t)]x, \tag{7}$$

где $A(t)$ и $A(t)+R(t)$ удовлетворяют описанным выше предположениям, а $R(t)$ есть малое возмущение. Наша цель — доказать, что некоторые решения двух данных уравнений асимптотически близки между собой, если только возмущение $R(t)$ достаточно мало в смысле, который мы укажем ниже. Для доказательства данного утверждения нам понадобится одно предположение относительно фундаментальной матрицы решений $Y(t)$ невозмущенной системы: потребуем, чтобы она удовлетворяла слабому условию дихотомии.

Условие, известное сейчас как условие обыкновенной дихотомии, возникло в неявном виде в работе Левинсона в случае дифференциальных уравнений (см. [11]). Это условие заключается в существовании двух проекторов P_1, $P_2=I-P_1$ и константы $K\geqslant 1$, таких, что

$$\left.\begin{aligned} |Y(t)P_1Y^{-1}(s)|<K \quad &\text{для всех} \quad t_0<s<t \quad \text{из } \mathbb{T},\\ |Y(t)P_2Y^{-1}(s)|<K \quad &\text{для всех} \quad t_0<t<s \quad \text{из } \mathbb{T}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для возмущения $R(t)$ потребуем существования функции γ, такой, что $|R(t)|<\gamma(t)$ и

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\gamma(t)\Delta t<\infty. \tag{9}$$

Здесь и далее в $\mathbb{R}^n$ может быть использована любая норма, а для матриц мы используем индуцированную матричную норму $|A|$, такую, что $|Ax|\leqslant|A||x|$.

При указанных весьма слабых ограничениях невозможно отследить поведение всех решений двух рассматриваемых уравнений. Однако оказывается, что для ограниченных решений можно гарантировать асимптотическую близость.

Теорема 1 (см. [3, теорема 1]). *При выполнении сформулированных выше условий на A, Y и R существует гомеоморфизм между ограниченными решениями x и y двух систем* (6) *и* (7). *Если к тому же $Y(t)P_1 \to 0$ при $t \to \infty$, то $x(t) - y(t) = \mathrm{o}(1)$ при $t \to \infty$, $t \in \mathbb{T}$.*

Для доказательства теоремы следует определить оператор S равенством

$$Sx(t) = \int\limits_{t_1}^{t} Y(t)P_1Y^{-1}(\sigma(\tau))R(\tau)x(\tau)\Delta\tau - \int\limits_{t}^{\infty} Y(t)P_2Y^{-1}(\sigma(\tau))R(\tau)x(\tau)\Delta\tau.$$

Легко видеть, что при достаточно большом t_1 оператор S является сжимающим на множестве ограниченных функций. Можно показать, что S устанавливает взаимно однозначное соответствие между ограниченными решениями возмущенной и невозмущенной систем, что и позволяет доказать теорему.

В действительности, такой же результат оказывается справедливым для более широкого класса слабо нелинейных возмущений $f(t,x)$, где f удовлетворяет условию Липшица по x, а функция $\gamma(t)$ является липшицевой и удовлетворяет (9).

Применим полученный результат о слабых возмущениях к уравнениям с L-диагональными системами вида (3). Для этого рассмотрим по отдельности каждый столбец соответствующей матрицы: зафиксируем индекс i и сделаем скалярное преобразование вида $v = d_i(t)w_i$, где d_i — решение задачи

$$d_i^{\Delta} = \lambda_i(t)d_i, \quad d_i(t_0) = 1,$$

т. е. $d_i = e_{\lambda_i}(\cdot,\, t_0;\, \mathbb{T})$. Тогда w_i есть решение динамического уравнения

$$w_i^{\Delta} = \frac{\Lambda(t) - \lambda_i(t)I + R(t)}{1 + \mu(t)\lambda_i(t)}\, w_i. \tag{10}$$

Далее, рассмотрим решения w_{ij} скалярных задач

$$w_{ij}^{\Delta} = \frac{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)}{1 + \mu(t)\lambda_i(t)}\, w_{ij}, \quad w_{ij}(t_0) = 1, \tag{11}$$

т. е. $w_{ij} = e_{\lambda_j \ominus \lambda_i}(\cdot,\, t_0;\, \mathbb{T})$.

Для выполнения условий дихотомии (8) для невозмущенной ($R = 0$) системы (10) потребуем, чтобы существовали числа $m_i > 0$ ($i = 1,\, 2$), такие, что для каждой пары индексов $(i,\, j)$ либо

$$\lim_{t\to\infty} w_{ij}(t) = 0 \quad \text{и} \quad \left|\frac{w_{ij}(t)}{w_{ij}(s)}\right| \leqslant m_1 \text{ для всех } t_0 \leqslant s < t,\ s \in \mathbb{T}, \tag{12}$$

либо

$$\left|\frac{w_{ij}(t)}{w_{ij}(s)}\right| \geqslant m_2 \text{ для всех } t_0 \leqslant s < t,\ s \in \mathbb{T}. \tag{13}$$

Если, кроме того, возмущение удовлетворяет *условию роста* (9) с $\gamma(t) = |R(t)/(1 + \mu(t)\lambda_i(t))|$, то (10) имеет решение (вектор) вида

$$w_i(t) = e_i + \mathrm{o}(1),$$

где e_i обозначает i-й единичный вектор в стандартном базисе. Отсюда следует основной результат.

Далее мы рассмотрим упоминавшиеся выше классические частные случаи.

4. Дифференциальные и разностные уравнения

В случае когда временная шкала есть $\mathbb{R}$, имеем $\mu(t) \equiv 0$, а оператор Δ совпадает с d/dt. Условие регрессивности (4), очевидно, выполнено, и требование правой плотной непрерывности сводится к требованию обычной непрерывности — этот случай рассматривался Левинсоном. Условие роста (9) имеет вид

$$\int_{t_0}^{\infty} |R(t)| dt < \infty,$$

а функции w_{ij} суть

$$w_{ij}(t) = e_{\lambda_j \ominus \lambda_i}(t,\, t_0;\, \mathbb{R}) = \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} [\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau)]\, d\tau \right\}.$$

Условия дихотомии (12) и (13) совпадают с хорошо известными условиями дихотомии Левинсона: для каждой пары индексов $(i,\, j)$ существуют константы m_1 и m_2, такие, что либо

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}[\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau)]\, d\tau = -\infty, \\ \operatorname{Re}\int_{s}^{t} [\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau)]\, d\tau \leqslant m_1 \text{ для всех } t_0 \leqslant s < t, \end{aligned}\right\}$$

либо

$$\operatorname{Re}\int_{s}^{t} [\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau)]\, d\tau \geqslant m_2 \text{ для всех } t_0 \leqslant s < t.$$

Эти условия вытекают из более сильных условий экспоненциальной дихотомии: существует $k > 0$, такое, что $|\operatorname{Re}(\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau))| \geqslant k$ для всех τ или из несколько более слабых условий: функции $\operatorname{Re}(\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau))$ не меняют знак при достаточно больших τ.

В случае когда временная шкала есть $\mathbb{N}$ (см. также [1]), имеем $\mu(t) \equiv 1$, оператор Δ совпадает с разностным оператором опережающего типа $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$, а условие (9) относительно возмущения принимает вид

$$\sum_{t=t_0}^{\infty} \left| \frac{R(t)}{1+\lambda_i(t)} \right| < \infty \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Решения уравнений (11) в данном случае представляются в виде произведения

$$w_{ij}(t) = e_{\lambda_j \ominus \lambda_i}(t, t_0; \mathbb{N}) = \prod_{\tau=t_0}^{t-1} \frac{1+\lambda_j(\tau)}{1+\lambda_i(\tau)}.$$

Условия дихотомии (12) и (13) записываются как

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{\tau=t_0}^{t} \left| \frac{1+\lambda_j(\tau)}{1+\lambda_i(\tau)} \right| = 0 \quad \text{и} \quad \prod_{\tau=s}^{t-1} \left| \frac{1+\lambda_j(\tau)}{1+\lambda_i(\tau)} \right| \leqslant m_1 \quad \text{для всех} \quad t_0 < s < t$$

или

$$\prod_{\tau=s}^{t-1} \left| \frac{1+\lambda_j(\tau)}{1+\lambda_i(\tau)} \right| \geqslant m_2 \quad \text{для всех} \quad t_0 < s < t.$$

5. Приведение к L-диагональному виду

Как уже отмечалось во введении, роль матрицы $P(t)$ заключается в приведении (если это возможно) заданной системы к L-диагональному виду для последующего применения результата об асимптотике. Отметим, что приведение к L-диагональному виду включает в себя в некотором смысле метод проб и ошибок и требует определенного опыта. При этом используются определенные типы преобразований Анзаца, содержащие некоторые параметры, которые выбираются так, чтобы в получившейся ведущей матрице все собственные значения были различными. Другие преобразования применяются для частичной диагонализации или блочной диагонализации систем при помощи собственных векторов. Но даже после того как будут сделаны эти преобразования и ведущая матрица будет удовлетворять условию дихотомии, может оказаться, что непосредственное применение основного результата все еще невозможно из-за нарушения условия роста.

Допустим, что после некоторого преобразования мы получили систему

$$v^{\Delta} = [\Lambda(t) + V(t) + R(t)]\, v, \tag{14}$$

где матрица $V(t)$ в некотором смысле «мала», но не настолько, что для нее выполняется то же условие роста, что и для $R(t)$. В этом случае могут понадобиться дальнейшие преобразования вида $v = \{I + Q(t)\}u$. Такое преобразование переводит (14) в

$$u^{\Delta} = \{I + Q(\sigma(t))\}^{-1} \left\{[\Lambda(t) + V(t) + R(t)]\{I + Q(t)\} - Q^{\Delta}(t)\right\} u. \tag{15}$$

Идея заключается в том, чтобы найти матрицу $Q(t) = \mathrm{o}(1)$ при $t \to \infty$ и удовлетворяющую уравнению

$$\{I + Q(\sigma(t))\}^{-1} \left\{[\Lambda(t) + V(t)]\{I + Q(t)\} - Q^{\Delta}(t)\right\} = \tilde{\Lambda}(t) + \tilde{R}(t), \tag{16}$$

где матрица $\tilde{\Lambda}(t)$ диагональная, а $\tilde{R}(t)$ есть возмущение, в некотором смысле меньшее, чем V. Отметим, что $\tilde{R}$ выбирается с точностью до интегрируемых слагаемых; поэтому также существует определенная свобода в выборе Q. В зависимости от свойств $\Lambda(t)$ и $V(t)$ в случаях дифференциальных уравнений, разностных уравнений и более общих операторных уравнений было предложено несколько различных матриц Q, удовлетворяющих уравнению (16). При нахождении Q часто бывает необходимо модифицировать также диагональные элементы системы, включая в них некоторые элементы из $V(t)$, оказывающие влияние на асимптотику. Этим объясняются возможные изменения диагональных элементов при переходе от $\Lambda(t)$ к $\tilde{\Lambda}(t)$. Однако заметим, что (даже условно) интегрируемые возмущения диагональных элементов изменяют решения лишь с точностью до множителя $[1 + o(1)]$ и поэтому могут быть включены в слагаемые матрицы $[I + E(t)]$.

Например, в случае дифференциальных уравнений Харисом и Лутцем [7–9] были описаны следующие три ситуации, в которых (14) может быть преобразовано к виду, позволяющему получить асимптотические формулы для решений:

1. диагональная часть сходится к постоянной матрице с различными собственными значениями;
2. диагональная часть сходится к нулевой матрице;
3. диагональная часть удовлетворяет условиям экспоненциальной дихотомии

$$|\mathrm{Re}\,[\lambda_j(t) - \lambda_i(t)]| \geqslant m.$$

В первом случае необходимо, чтобы Q удовлетворяла некоторому алгебраическому условию, а V имела производную, либо удовлетворяющую условию роста, либо растущую медленнее, чем сама V. Во втором случае Q определяется как интеграл от V, причем интеграл от V должен расти не быстрее, чем V. В последнем случае некоторая степень $p > 1$ от $|V|$ должна удовлетворять условию роста. Отметим, что в последнем случае развиваются результаты типа Хартмана—Уинтнера, которые изначально исследовали этот случай совершенно другими методами. Случай дифференциальных уравнений изучен достаточно подробно, и здесь можно рассматривать многие интересные ситуации (см. книгу Истхема [6]).

Для разностных уравнений ситуация аналогична предыдущей. Возникают такие же три случая, когда $\Lambda(t)$ сходится к постоянной матрице с различными собственными значениями, неравными -1, когда $\Lambda(t)$ сходится к нулевой матрице и когда $\Lambda(t)$ удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии: существует $\delta > 0$, такое, что для $i \neq j$ либо

$$\left|\frac{1 + \lambda_i(t)}{1 + \lambda_j(t)}\right| \geqslant 1 + \delta \quad \text{для достаточно больших } t,$$

либо

$$\left|\frac{1 + \lambda_i(t)}{1 + \lambda_j(t)}\right| \leqslant 1 - \delta \quad \text{для достаточно больших } t.$$

Насколько нам известно, все случаи, в которых справедлива общая теорема об асимптотике решений линейных дифференциальных и разностных уравнений вида (2), исследуются описанными выше методами, а именно используется сведение к L-диагональному виду и применяется фундаментальный результат Левинсона.

6. Условия дихотомии и асимптотическое поведение экспоненциальных функций

В данном параграфе мы рассмотрим частный случай, когда $A(t)$ в (1) имеет вид

$$A(t) = C + R(t),$$

где C — постоянная диагонализуемая регрессивная матрица, а $R(t)$ — как и ранее, достаточно малое возмущение. Поскольку $P^{-1}CP = \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где P — подходящая постоянная матрица, то преобразование $y(t) = Pv(t)$ переводит (1) в $v^\Delta = [\Lambda + R_1(t)]v$, где $R_1(t) = P^{-1}R(t)P$. Теперь $R_1(t)$ удовлетворяет условиям роста (9) (с $\gamma(t) = |R_1(t)/(1+\mu(t)\lambda_i)|$) тогда и только тогда, когда $R(t)$ удовлетворяет условию роста (9) (с $\gamma(t) = |R(t)/(1+\mu(t)\lambda_i)|$). Таким образом, без ограничения общности мы можем рассматривать системы вида

$$y^\Delta = [\Lambda + R(t)]y, \tag{17}$$

где Λ — постоянная регрессивная (см. (4)) диагональная матрица. Нетрудно показать, что все элементы матрицы Λ неотрицательны и условия дихотомии для w_{ij} выполнены (по крайней мере в случае временной шкалы $\mathbb{T}$, удовлетворяющей условию $\mu(t) > 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$). Это действительно так, поскольку в данном случае

$$w_{ij}(t) = \prod_{\tau \in [t_0,\, t)} \frac{1+\lambda_j \mu(\tau)}{1+\lambda_i \mu(\tau)}, \tag{18}$$

и сомножители в этом произведении либо всегда больше единицы, либо равны единице, либо меньше единицы — в зависимости от того, какое из неравенств имеет место: $\lambda_j > \lambda_i$, $\lambda_j = \lambda_i$ или $\lambda_j < \lambda_i$. В других ситуациях (даже если $\mu(t) > 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$) не всегда очевидно, выполняются ли условия дихотомии для постоянных диагональных регрессивных систем. (Ср. с классическими случаями $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, когда постоянные системы всегда удовлетворяют условиям дихотомии.)

Итак, если мы предполагаем, что невозмущенная диагональная система удовлетворяет условиям дихотомии, а R удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^{\infty} \left| \frac{R(\tau)}{1+\mu(\tau)\lambda_i} \right| \Delta\tau < \infty \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{19}$$

то возмущенная система имеет фундаментальную матрицу решений

$$Y(t) = [I + \mathrm{o}(1)]e_\Lambda(t, t_0; \mathbb{T}) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

где элементы диагональной матрицы e_Λ являются решениями скалярных уравнений

$$w^\Delta = \lambda_i w, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Вспомним (см. раздел 2), что нормализованные решения, удовлетворяющие условию $w(t_0) = 1$, суть скалярные экспоненциальные функции $e_{\lambda_i}(t, t_0; \mathbb{T})$ или $e_{\lambda_i}(t, t_0; \sigma(t))$. Их асимптотическое поведение важно не только для исследования асимптотики $Y(t)$, но также и для получения других результатов, когда (19) не выполняется. Такие случаи упоминались выше, в разделе 5. Для их изучения необходимо усилить условия дихотомии, чтобы компенсировать ослабление условия роста. Эти случаи представляют собой обобщения классической теоремы Хартмана и Уинтнера для дифференциальных уравнений. Для применения таких теорем требуются гораздо более точные оценки на рост решений невозмущенной диагональной системы. Данные оценки будут получены в статье Бодина и Лутца, которая готовится к публикации.

В заключение обсудим результаты статьи [2] относительно асимптотического поведения функций $e_\lambda(t, t_0; \mathbb{T})$ для различных временных шкал. В таблице 1 дан обзор некоторых наших результатов. Часть временных шкал определена неявно, в том смысле, что задается лишь оператор перехода $\sigma(t) = t + \mu(t)$ и не дается явного описания точек временной шкалы $\mathbb{T}$. В этом случае для заданной точки t_0 временная шкала определяется как множество $\mathbb{T} = \{t_0, \sigma(t_0), \sigma(\sigma(t_0)), \ldots\}$. В таблице 1 предполагается, что t_0 настолько велико, что зернистость $\mu(t)$ положительна. Постоянная c в таблице 1 — это вещественное число, зависящее от нормировки в точке t_0, и в общем случае явно не вычисляется.

Таблица 1. Асимптотическое поведение экспоненциальных функций

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$e_\lambda(t,\, t_0;\, \sigma(t))$
$\mathbb{R}$	0	$e^{\lambda(t-t_0)}$
	$\dfrac{\kappa}{t^\alpha}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$ $\beta>\alpha>1, \quad \kappa>0$	$c\,e^{\lambda t}\left[1+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right]$
$h\sqrt{\mathbb{N}_0}, \quad h>0$	$\dfrac{h^2}{2t}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$	$ce^{\lambda t}\,t^{-\lambda^2h^2/4}\left[1+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]$
	$\dfrac{\kappa}{t}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$ $\beta>1, \quad \kappa>0$	$c\,e^{\lambda t}t^{-\lambda^2\kappa/2}\left[1+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)\right]$ $\gamma=\min\{\beta-1,\, 1\}$
	$\dfrac{\kappa}{t^\alpha}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$ $\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},\, 1\right), \quad \beta>1$	$c\,e^{\lambda t}\exp\left\{-\dfrac{\lambda^2\kappa}{2(1-\alpha)}t^{1-\alpha}\right\}[1+\mathrm{o}(1)]$
	$\kappa+\dfrac{c_1}{t}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$ $\beta>1, \quad 1+\kappa\lambda>0$	$c\,(1+\kappa\lambda)^{t/\kappa}\,t^\gamma\left[1+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\delta}\right)\right]$ $\delta=\min\{\beta-1,\, 1\}$ $\gamma=\dfrac{\lambda c_1}{(1+\kappa\lambda)\kappa}-\dfrac{c_1\ln(1+\kappa\lambda)}{\kappa^2}$
$\mathbb{N}_0$	1	$(1+\lambda)^{t-t_0}$
$\mathbb{N}_0^p, \quad p=2,\,3,\,\ldots$	$(t^{1/p}+1)^p-t$	$c(\lambda p)^{t^{1/p}}e^{(p-1)t^{1/p}[\ln(t^{1/p})-1]}[1+\mathrm{o}(1)]$
$q^{\mathbb{N}_0}, \quad q>1$	$(q-1)t$	$c\{\lambda(q-1)\}^{\log_q t}\,t^{(\log_q t-1)/2}\left[1+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]$

Из таблицы 1 видно, что для всех временных шкал с зернистостью

$$\frac{\kappa}{t^\alpha}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\beta}\right) \quad (\beta>\alpha>1,\ \kappa>0)$$

соответствующие экспоненциальные функции имеют одно и то же асимптотическое поведение $e^{\lambda t}$ с точностью до умножения на $c+\mathrm{o}(1)$. В этом случае будем говорить, что они принадлежат *тому же асимптотическому экспоненциальному классу*, что и $\mathbb{R}$. Заметим, что в этих случаях зернистость относительно быстро стремится к нулю.

Несмотря на то, что асимптотические оценки в таблице 1 имеют место лишь для частных случаев рассмотренных временных шкал $\mathbb{T}$, будем придерживаться следующей точки зрения. Поскольку асимптотическая оценка не зависит от t_0, мы можем изменить t_0 так, чтобы любая заданная точка t попала во временную шкалу. Это позволит асимптотически сравнивать экспоненциальные функции на двух временных шкалах $\mathbb{T}$ и $\tilde{\mathbb{T}}$, даже если у них нет общих точек. Таким образом, для данного фиксированного λ будем говорить, что две временные шкалы принадлежат одному и тому же асимптотическому экспоненциальному классу, если их экспоненциальные функции имеют одну и ту же асимптотику с точностью до умножения на $c+\mathrm{o}(1)$.

Заметим, что для временных шкал $\mathbb{T} = h\mathbb{N}^p$, $h > 0$, зернистость определяется формулой

$$\mu(t) = h\left(\left[\left(\frac{t}{h}\right)^{1/p} + 1\right]^p - \frac{t}{h}\right) = \frac{ph^{1/p}}{t^{1/p-1}} + \frac{p(p-1)h^{2/p}}{2t^{2/p-1}} + \dots$$

для $t > 1$, $t \in \mathbb{T}$. Сравнивая эту формулу с результатами из таблицы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.

1. *Все временные шкалы с* $\mu(t)$ *вида*

$$\mu(t) = \frac{\kappa}{t^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\beta}\right), \quad \kappa > 0, \quad \beta > \alpha > 1,$$

принадлежат тому же асимптотическому экспоненциальному классу $e^{\lambda t}$*, что и* $\mathbb{R}$.

2. *Все временные шкалы с* $\mu(t)$ *вида*

$$\mu(t) = \frac{\kappa}{t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\beta}\right), \quad \kappa > 0, \quad \beta > 1,$$

принадлежат тому же асимптотическому экспоненциальному классу $e^{\lambda t}t^{-\lambda^2\kappa/2}$*, что и* $\sqrt{2\kappa\mathbb{N}_0}$.

3. *Все временные шкалы с* $\mu(t)$ *вида*

$$\mu(t) = \frac{\kappa}{t^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\beta}\right), \quad \kappa > 0, \quad 1/2 < \alpha < 1, \quad \beta > 1,$$

принадлежат тому же асимптотическому экспоненциальному классу

$$e^{\lambda t}\exp\left\{-\frac{\lambda^2\kappa}{2(1-\alpha)}t^{1-\alpha}\right\},$$

что и $([\alpha+1]\kappa\mathbb{N}_0)^{1/(\alpha+1)}$.

4. *Все временные шкалы с* $\mu(t)$ *вида*

$$\mu(t) = c_0 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\beta}\right), \quad \beta > 1, \quad 1 + \lambda c_0 > 0,$$

принадлежат тому же асимптотическому экспоненциальному классу $(1 + c_0\lambda)^{t/c_o}$*, что и* $c_0\mathbb{N}_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Benzaid Z., Lutz D. A.* Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations// Stud. Appl. Math. — 1987. — *77*. — С. 195–221
2. *Bodine S., Lutz D. A.* Exponential functions on time scales: Their asymptotic behavior and calculation// Dyn. Syst. Appl. — 2002
3. *Bohner M., Lutz D. A.* Asymptotic behavior of dynamic equations on time scales// J. Difference Equ. Appl. — 2001. — *7*, № 1. — С. 21–50. Special issue in memory of W. A. Harris, Jr.
4. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales: an introduction with applications. — Boston: Birkhäuser Boston Inc, 2001
5. *Bohner M., Peterson A.* Advances in dynamic equations on time scales. — Boston: Birkhäuser Boston Inc, 2002
6. *Eastham M. S. P.* The asymptotic solution of linear differential systems. Applications of the Levinson theorem. — Oxford: Oxford University Press, 1989
7. *Harris W. A., Lutz D. A.* On the asymptotic integration of linear differential systems// J. Math. Anal. Appl. — 1974. — *48*, № 1. — С. 1–16
8. *Harris W. A., Lutz D. A.* Asymptotic integration of adiabatic oscillators// J. Math. Anal. Appl. — 1975. — *51*, № 1. — С. 76–93
9. *Harris W. A., Lutz D. A.* A unified theory of asymptotic integration// J. Math. Anal. Appl. — 1977. — *57*, № 3. — С. 571–586

10. *Hilger S.* Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus// Result. Math. — 1990. — *18.* — С. 19–56
11. *Levinson N.* The asymptotic nature of solutions of linear differential equations// Duke Math. J. — 1948. — *15.* — С. 111–126

Sigrun Bodine
University of Puget Sound, Dept. of Mathematics,
Tacoma, WA 98416
E-mail: `sbodine@ups.edu`

Martin Bohner
University of Missouri, Dept. of Mathematics,
Rolla, MO 65401
E-mail: `bohner@umr.edu`

Donald Lutz
San Diego State University, Dept. of Mathematics,
San Diego, CA 92182
E-mail: `lutz@saturn.sdsu.edu`