

*Початку третього тисячоліття
присвячується
Началу третього тисячоліття
посвящується
To the Beginning of the Third Millennium*

УДК 539.3

© 2007

М. Бохнер, А.А. Мартынюк

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ А.М. ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ВРЕМЕННОЙ ШКАЛЕ

150-летию со дня рождения А.М. Ляпунова посвящается

§1. Введение. 6 июня 2007 г. исполнилось 150 лет со дня рождения великого русского ученого — математика и механика академика А.М. Ляпунова*. Подробный очерк о жизни и деятельности А.М. Ляпунова приведен в статье [10].

Основными направлениями научной деятельности Ляпунова являются:

- устойчивость равновесия и движения механических систем с конечным числом степеней свободы;
- фигуры равновесия равномерно вращающейся жидкости;
- устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости;
- уравнения математической физики;
- теория вероятностей;
- курсы лекций по теоретической механике.

Детальный анализ трудов А.М. Ляпунова по каждому из указанных направлений имеется в обзоре [11].

Работы, посвященные вопросам устойчивости движения систем с конечным числом степеней свободы, А.М. Ляпунов начал печатать в 1888 г. Строгое определение устойчивости было дано Ляпуновым в 1892 г. и явилось завершением его напряженной работы в период времени 1889–1892 гг. Принятое в настоящее время понятие “устойчивости по Ляпунову” является устойчивостью решений по отношению к возмущениям начальных данных на бесконечном промежутке времени. Точная формулировка понятия устойчивости имела принципиальное значение для последующих поисков критериев устойчивости равновесия и/или движения механических и другой природы систем.

В 1892 г. Харьковским математическим обществом была опубликована работа А.М. Ляпунова “Общая задача об устойчивости движения” [3]. Эта работа была защищена Александром Михайловичем как докторская диссертация в 1892 г. в Московском университете.

В этой работе А.М. Ляпунов рассматривает дифференциальные уравнения возмущенного движения весьма общего вида и открывает два общих метода анализа их решений. Первый основан на интегрировании рассматриваемых уравнений при помощи рядов специального вида. Второй основан на применении некоторой вспомогательной функции, свойства которой вместе со свойствами ее полной производной по времени вдоль решений исследуемой системы позволяют сделать заключение о динамическом поведении решений системы.

Наряду с этими двумя методами качественного анализа уравнений движения А.М. Ляпунов ввел понятие характеристического числа функции и применил его для анализа устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

* Краткий обзор жизни и деятельности А.М. Ляпунова приведен в статье Ю.А. Митропольского и А.А. Мартынюка “Александр Михайлович Ляпунов (к 150-летию со дня рождения)” // Укр. матем. журн. — 2007. — 59, N 7. — С. 3–8.

А.М. Ляпунов полностью решил вопрос об устойчивости по первому приближению и исследовал проблему устойчивости решений уравнений возмущенного движения в некоторых критических случаях.

В списке литературы (см. [1–9, 20–24]) приведены опубликованные к настоящему времени работы А.М. Ляпунова, посвященные проблеме устойчивости систем с конечным числом степеней свободы, общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и классической механике. Заметим, что многие работы А.М. Ляпунова остаются все еще не опубликованными.

Целью данной статьи является изложение некоторых результатов анализа устойчивости решений нового класса уравнений возмущенного движения, получивших название динамических уравнений на временной шкале.

Уравнения на временной шкале представляют возможность для одновременного описания динамики непрерывных и дискретных во времени систем. Такие двухрежимные системы возникают в задачах импульсного управления и при описании некоторых технологических процессов с дискретным влиянием катализатора.

§2. Элементы анализа на временной шкале. Необходимые сведения из математического анализа на временной шкале здесь приведены согласно монографии [13, 14], где имеется обширная библиография.

2.1. Описание временной шкалы. Временной шкалой \mathbb{T} называется произвольное непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел \mathbb{R} . Примерами временной шкалы являются: множество \mathbb{R} , целые числа \mathbb{Z} , натуральные числа \mathbb{N} и неотрицательные натуральные числа \mathbb{N}_0 . Наиболее распространенными являются шкала $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ для непрерывных систем, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ для дискретных систем и $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0} = \{q^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, где $q > 1$, для квантового анализа.

Для любого $t \in \mathbb{T}$ функция скачка вперед (назад) определяется соотношениями

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

и

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

соответственно.

При помощи операторов $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ и $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ текущие значения $\{t\}$ на временной шкале \mathbb{T} классифицируются так: если $\sigma(t) = t$ ($\rho(t) = t$), то точка $t \in \mathbb{T}$ называется плотной справа (слева); если $\sigma(t) > t$ ($\rho(t) < t$), то точка $t \in \mathbb{T}$ называется рассеянной справа (слева) соответственно. При этом предполагается, что $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ (т.е. $\sigma(t) = t$, если \mathbb{T} содержит максимальный элемент t) и $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ (т.е. $\rho(t) = t$, если \mathbb{T} содержит минимальный элемент t). Наряду с множеством \mathbb{T} применяется множество \mathbb{T}^κ .

Если \mathbb{T} содержит рассеянный слева максимум m , то $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus \{m\}$ и $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ в остальных случаях. Следовательно,

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \text{если } \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T}, & \text{если } \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

Расстояние от произвольного элемента $t \in \mathbb{T}$ до его последователя называется зернистостью временной шкалы \mathbb{T} и определяется формулой

$$\mu(t) = \sigma(t) - t. \quad (2.2)$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $\sigma(t) = t = \rho(t)$ и $\mu(t) = 0$ и если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $\sigma(t) = t + 1$, $\rho(t) = t - 1$ и $\mu(t) = 1$.

При рассмотрении уравнений на временной шкале в некоторых случаях применяется принцип индукции на временной шкале \mathbb{T} . В формулировке, принятой в монографии [13], этот принцип формулируется так.

Теорема 2.1. Пусть $t_0 \in \mathbb{T}$ и предположим, что $\{S(t) : t \in [t_0, \infty)\}$ — некоторое семейство утверждений, удовлетворяющих таким условиям.

1. Утверждение $S(t)$ верно при $t = t_0$.
2. Если $t \in [t_0, \infty)$ рассеяно справа и $S(t)$ верно, то $S(\sigma(t))$ также верно.
3. Если $t \in [t_0, \infty)$ плотно справа и $S(t)$ верно, то существует окрестность W значения t такая, что $S(s)$ верно при всех $s \in W \cap (t, \infty)$.
4. Если $t \in (t_0, \infty)$ плотно слева и $S(s)$ верно при всех $s \in [t_0, t)$, то $S(t)$ верно.

Тогда $S(t)$ верно при всех $t \in [t_0, \infty)$.

2.2. Дифференцирование на временной шкале. Далее рассмотрим функцию $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ и определим её Δ -производную в точке $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Пусть $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ и функция f определена при всех $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Функция f называется Δ -дифференцируемой в точке $t \in \mathbb{T}^\kappa$, если существует такое $\gamma \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ и W -окрестности $t \in \mathbb{T}^\kappa$ выполняется неравенство

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - \gamma[\sigma(t) - s]| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

при всех $s \in W$. В этом случае обозначаем $f^\Delta(t) = \gamma$.

Если функция $f(t)$ является Δ -дифференцируемой при любом $t \in \mathbb{T}^\kappa$, то $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ является Δ -дифференцируемой на \mathbb{T}^κ .

Некоторые полезные соотношения для производной функции $f(t)$ содержатся в таком утверждении.

Теорема 2.2. *Предположим, что $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Тогда верны следующие утверждения:*

- (1) если f дифференцируемая в точке t , то она непрерывна в точке t ;
- (2) если f непрерывна в t и t является рассеянной справа, то f является дифференцируемой в точке t с производной

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)};$$

- (3) если t является плотной справа, то функция f дифференцируема в точке t если и только если существует предел

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

являющийся конечным числом, и в этом случае $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$;

- (4) если f дифференцируемая в точке $t \in \mathbb{T}^\kappa$, то $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$.

Заметим, что если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $f^\Delta(t) = f'(t)$, что является эйлеровой производной функции $f(t)$, и если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $f^\Delta(t) = \Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$, т.е. получаем первую разность для функции $f(t)$.

Далее приведём следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Предположим, что функции $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемые в точке $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Тогда верны следующие утверждения:*

- (1) сумма $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $t \in \mathbb{T}^\kappa$ и

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t);$$

- (2) для любой постоянной α , выражение $\alpha f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке $t \in \mathbb{T}^\kappa$ и $(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t)$;

(3) произведение двух функций $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке $t \in \mathbb{T}^\kappa$ и

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t));$$

(4) если $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^\kappa$, то функция $1/f$ дифференцируема в точке $t \in \mathbb{T}^\kappa$ и

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))};$$

(5) если $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^\kappa$, то выражение f/g дифференцируемо в точке $t \in \mathbb{T}^\kappa$ и

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

2.3. Интегрирование на временной шкале. Далее рассмотрим функции, интегрируемые на временной шкале \mathbb{T} . Функцию $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть упорядоченной на \mathbb{T} , если и только если существуют право- и левосторонние пределы во всех плотных справа и плотных слева точках на \mathbb{T} , соответственно.

Функция $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ является rd-непрерывной, если она непрерывна в плотных справа точках на \mathbb{T} и существует левосторонний предел в плотных слева точках шкалы \mathbb{T} .

Множество всех rd-непрерывных функций $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ обозначается $C_{\text{rd}} = C_{\text{rd}}(\mathbb{T}) = C_{\text{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Теорема 2.4. *Предположим, что $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда верны следующие утверждения:*

- (1) если f непрерывна на \mathbb{T} , то она является rd-непрерывной на \mathbb{T} ;
- (2) если f является rd-непрерывной на \mathbb{T} , то она является упорядоченной на \mathbb{T} ;
- (3) функция $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ является rd-непрерывной;
- (4) если f является упорядоченной или rd-непрерывной на \mathbb{T} , то $f(\sigma(t))$ имеет те же свойства на \mathbb{T} ;
- (5) если $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ упорядочена и rd-непрерывна, то функция $f(g(t))$ является упорядоченной или rd-непрерывной, соответственно.

Некоторая функция $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ с производной $F^\Delta(t) = f(t)$ является Δ -антипроизводной функции $f(t)$, и тогда для любых $a, b \in \mathbb{T}$ определяется интеграл

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a). \quad (2.3)$$

Любая rd-непрерывная функция $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет антипроизводную.

Если $f^\Delta(t) \geq 0$ на $[a, b]$ и $s, t \in \mathbb{T}$, $a \leq s \leq t \leq b$, то

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau)\Delta\tau \geq f(s),$$

т.е. функция $f(t)$ возрастает на \mathbb{T} .

Некоторые свойства интегрирования на \mathbb{T} содержатся в таком утверждении.

Теорема 2.5. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и функции $f, g \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$. Тогда*

- (i) $\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t;$
- (ii) $\int_a^b \alpha f(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t;$
- (iii) $\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t;$
- (iv) $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t;$
- (v) $\int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t;$
- (vi) $\int_a^a f(t) \Delta t = 0;$
- (vii) $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t) f(t), \quad t \in \mathbb{T}^k;$
- (viii) если $|f(t)| \leq g(t)$ на $[a, b]$, то $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t;$
- (ix) если $f(t) \geq 0$ при всех $a \leq t < b$, то $\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0.$

Далее приведем правила Δ -дифференцирования сложной функции. Напомним, что если $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.6. Пусть $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ является Δ -дифференцируемой на \mathbb{T}^k и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Тогда существует c из интервала $[t, \sigma(t)]$ такое, что

$$(f \circ g)^\Delta(t) = f'(g(c))g^\Delta(t).$$

Приведем еще правило Δ -дифференцирования сложной функции $(f \circ g)^\Delta$, где $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 2.7. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема и функция $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ является Δ -дифференцируемой. Тогда $(f \circ g): \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ является Δ -дифференцируемой и верно представление

$$(f \circ g)^\Delta(t) = \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^\Delta(t)) dh \right\} g^\Delta(t).$$

Если $\sup \mathbb{T} = \infty$, то несобственный интеграл определяется формулой

$$\int_a^\infty f(t) \Delta t = \lim_{b \rightarrow \infty} F(t)|_a^b$$

при всех $a \in \mathbb{T}$.

2.4. Определение экспоненциальной функции на \mathbb{T} . Функция $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ называется регрессивной, если $1 + \mu(t)f(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^\kappa$, и положительно регрессивной, если $1 + \mu(t)f(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$.

Для операции \oplus , определяемой выражением

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

пара (\mathcal{R}, \oplus) является Абелевой группой, где \mathcal{R} — множество всех гд-непрерывных и регрессивных функций $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$.

Если операция \ominus определяется соотношением

$$\ominus p(t) = -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)},$$

то $p \ominus q = p \oplus (\ominus q)$ на \mathcal{R} .

Заметим, что если $p, q \in \mathcal{R}$, то $\ominus p, \ominus q, p \oplus q, p \ominus q, q \ominus p \in \mathcal{R}$.

Для определения экспоненциальной функции на временной шкале \mathbb{T} необходимы следующие понятия.

Для некоторого $h > 0$, следуя [16], будем рассматривать полосу

$$\mathbb{Z}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}: -\frac{\pi}{h} < \text{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\} \quad (2.4)$$

и множество \mathbb{C}_h :

$$\mathbb{C}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}: z \neq -\frac{1}{h} \right\}. \quad (2.5)$$

При $h = 0$, пусть $\mathbb{Z}_h = \mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_h$ — множество комплексных чисел.

Далее для $h \geq 0$ определим цилиндрическое преобразование $\xi_h: \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$ формулой

$$\xi_h = \begin{cases} \frac{1}{h} \text{Log}(1 + zh), & \text{если } h > 0, \\ z, & \text{если } h = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

где Log является главной логарифмической функцией. Обратное цилиндрическое преобразование $\xi_h^{-1}: \mathbb{Z}_h \rightarrow \mathbb{C}_h$ определяется соотношением

$$\xi_h^{-1}(z) = \frac{e^{zh} - 1}{h} = (\exp zh - 1)h^{-1}. \quad (2.7)$$

Для функции $p \in \mathcal{R}$ экспоненциальная функция $e_p(t, s)$ определяется выражением

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right), \quad (s, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}, \quad (2.8)$$

где $\xi_h(z)$ — цилиндрическое преобразование функции $p(t)$.

Известны (см. [13]) следующие свойства экспоненциальной функции (2.8).

Пусть $p, q \in \mathcal{R}$ и $t, r, s \in \mathbb{T}$. Тогда

- (i) $e_0(t, s) \equiv 1$ и $e_p(t, t) \equiv 1$;
- (ii) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$;
- (iii) $\frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$;
- (iv) $e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$;

- (v) $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$;
- (vi) $e_p(t, s)e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$;
- (vii) $\frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$;
- (viii) если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $e_p(t, s) = e^{\int_s^t p(\tau) d\tau}$ и если $p(t) = \text{const}$, то $e_p(t, s) = e^{p(t-s)}$;
- (ix) если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $e_p(t, s) = \prod_{\tau=s}^{t-1} (1 + p(\tau))$;
- (x) если $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$ и $p = \text{const}$, то $e_p(t, s) = (1 + hp)^{\frac{(t-s)}{h}}$.

2.5. Формула вариации постоянных на \mathbb{T} . На основе экспоненциальной функции (2.8) формула вариации постоянных имеет следующий вид.

Пусть f — функция rd-непрерывная на \mathbb{T} и $p \in \mathcal{R}$. Тогда единственное решение начальной задачи

$$x^\Delta(t) = -p(t)x(\sigma(t)) + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.9)$$

где $t_0 \in \mathbb{T}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$, выражается формулой

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau. \quad (2.10)$$

Для функций f и p , определённых для задачи (2.9), единственное решение задачи

$$x^\Delta(t) = p(t)x(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.11)$$

где $t_0 \in \mathbb{T}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$, выражается формулой

$$x(t) = e_p(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau.$$

§3. Метод интегральных неравенств анализа устойчивости решений на временной шкале. Метод интегральных неравенств в теории устойчивости непрерывных систем разработан достаточно полно и основные результаты изложены в ряде известных работ, среди которых отметим [27, 31].

Разработка этого метода для анализа устойчивости решений на временной шкале \mathbb{T} связана с получением соответствующих неравенств, имеющих место на временной шкале.

В этом параграфе метод интегральных неравенств вводится для динамических уравнений в форме

$$x^\Delta = A(t)x + f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad (3.1)$$

где $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$ со значением $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(t) = f(t, x(t))$ удовлетворяет условию $F \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$ как только x является дифференцируемой функцией. Эти предположения гарантируют существование единственного решения $x = x(\cdot; t_0, x_0)$ системы (3.1) при начальных условиях $x(t_0) = x_0$, где $t_0 \in \mathbb{T}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Согласно формулы (2.11) §2 это решение может быть представлено в форме

$$x(t) = x(t; t_0, x_0) = e_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau, x(\tau))\Delta\tau. \quad (3.2)$$

Предположим, что $m \in \mathbb{N}$ и о системе (3.1) сделаем два предположения:

$$\|f(t, x)\| \leq a(t) \|x\|^m \quad \text{при } t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{где } a \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T}), \quad (3.3)$$

и

$$\|e_A(t, s)\| \leq \varphi(t)\psi(s) \quad \text{при } t \geq s \geq t_0, \quad \text{где } \varphi, \psi \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T}). \quad (3.4)$$

При этих предположениях будут получены условия устойчивости, равномерной устойчивости и асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (3.1).

Далее рассматриваются случаи $m = 1$ и $m > 1$. Если $m = 1$, тогда применяется известное неравенство Гронуолла на временной шкале. Если $m > 1$, тогда применяется динамическая версия неравенства Стахурской [33], которая доказывается в этой работе. Это неравенство является новым результатом для динамических уравнений и, в частности, из него следуют неравенства для непрерывного и дискретного случаев.

Напомним стандартные определения некоторых типов устойчивости невозмущенного движения.

Определение 3.1. Невозмущенное движение системы (3.1) называется:

- (S₁) *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{T}$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из условия $\|x_0\| < \delta$ следует неравенство $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;
- (S₂) *равномерно устойчивым*, если значение δ в определении (S₁) не зависит от t_0 ;
- (S₃) *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и существует δ_0 такое, что из условия $\|x_0\| < \delta_0$ следует $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0$.

3.1. Анализ устойчивости на основе неравенства Гронуолла. Неравенство Гронуолла для динамических уравнений имеет следующий вид (см. [13], Theorem 6.4).

Теорема 3.1 (Неравенство Гронуолла). Пусть функции $y, f \in C_{\text{rd}}$ и $p \geq 0$. Тогда из неравенства

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t y(\tau)p(\tau)\Delta\tau \quad \text{при всех } t \geq t_0$$

следует

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)p(\tau)\Delta\tau \quad \text{при всех } t \geq t_0.$$

Далее применяется такой вариант этого неравенства (см. Corollary 6.7 в [13]).

Следствие 3.1. Пусть функция $y \in C_{\text{rd}}$, $p \geq 0$, и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда из неравенства

$$y(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t y(\tau)p(\tau)\Delta\tau \quad \text{при всех } t \geq t_0$$

следует

$$y(t) \leq \alpha e_p(t, t_0) \quad \text{при всех } t \geq t_0.$$

Утверждение, аналогичное приведенному ниже, было получено для временной шкалы $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (см. лемму 2 и теорему 5 в статье [28]).

Лемма 3.1. Предположим, что условие (3.3) выполняется при $m = 1$ и имеет место неравенство (3.4). Тогда любое решение системы (3.1) удовлетворяет оценке

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \varphi(t)\psi(t_0)e_{\varphi\psi^\sigma a}(t, t_0) \|x_0\| \quad \text{при всех } t \geq t_0. \quad (3.5)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при выполнении условий леммы 3.1 выполняются все условия следствия 3.1. Пусть $x(t)$ — решение системы (3.1) и, следовательно, при всех $t \geq t_0$ из соотношения (3.2) и условий (3.3), (3.4) находим оценку

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \varphi(t)\psi(t_0) \|x_0\| + \int_{t_0}^t \varphi(t)\psi(\sigma(\tau))a(\tau) \|x(\tau; t_0, x_0)\| \Delta\tau.$$

Заменой $y = \|x(\cdot; t_0, x_0)\| / \varphi$ преобразуем это неравенство к виду

$$y(t) \leq \psi(t_0) \|x_0\| + \int_{t_0}^t \varphi(\tau)\psi(\sigma(\tau))a(\tau)y(\tau)\Delta\tau \quad \text{при всех } t \geq t_0.$$

Применяя к этому неравенству следствие 3.1, получим оценку

$$y(t) \leq \psi(t_0) \|x_0\| e_{\varphi\psi\sigma a}(t, t_0) \quad \text{при всех } t \geq t_0.$$

Учитывая сделанную выше замену функции y , находим неравенство (3.5). Этим лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Предположим, что для системы (3.1) выполняется условие (3.3) при $m = 1$ и неравенство (3.4).*

(1) *Если при всех $s \geq t_0$ существует $K(s) > 0$ такое, что*

$$\varphi(t)e_{\varphi\psi\sigma a}(t, s) \leq K(s) \quad \text{при всех } t \geq s \geq t_0,$$

то невозмущенное движение системы (3.1) устойчиво;

(2) *если существует $K > 0$ такое, что*

$$\varphi(t)\psi(s)e_{\varphi\psi\sigma a}(t, s) \leq K \quad \text{при всех } t \geq s \geq t_0,$$

то невозмущенное движение системы (3.1) равномерно устойчиво;

(3) *если $\lim_{t \rightarrow \infty} \{\varphi(t)e_{\varphi\psi\sigma a}(t, s)\} = 0$, то невозмущенное движение системы (3.1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Докажем утверждение (1). Пусть $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{T}$. Определим

$$\delta(\varepsilon, t_0) = \varepsilon K^{-1}(t_0)\psi^{-1}(t_0)$$

и предположим, что $\|x_0\| < \delta$. Тогда согласно леммы 3.1 получим

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \varphi(t)\psi(t_0)e_{\varphi\psi\sigma a}(t, t_0)\delta \leq \psi(t_0)K(t_0)\delta = \varepsilon.$$

Далее докажем утверждение (2). Пусть $\varepsilon > 0$. Определим $\delta(\varepsilon) = \varepsilon K^{-1}$ и предположим, что $\|x_0\| < \delta$. Как и выше, применяя лемму 3.1, находим

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \varphi(t)\psi(t_0)e_{\varphi\psi\sigma a}(t, t_0)\delta \leq K\delta = \varepsilon.$$

Теперь докажем утверждение (3). Так как $\varphi e_{\varphi\psi\sigma a}(\cdot, s)$ стремится к нулю, то это выражение ограничено. При этом в силу утверждения (1) теоремы невозмущенное движение устойчиво. Пусть $\delta_0 = 1$ и предположим, что $\|x_0\| < \delta_0$. Тогда согласно лемме 3.1 имеем

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \varphi(t)\psi(t_0)e_{\varphi\psi\sigma a}(t, t_0) \rightarrow 0,$$

как только $t \rightarrow \infty$.

3.2. Анализ устойчивости на основе неравенства Стахурской. Для доказательства неравенства Стахурской на временной шкале понадобятся две леммы.

Лемма 3.2. Если $f \leq g$ и $f, g \in \mathcal{R}^+$, то $\ominus f \geq \ominus g$.

Доказательство. При сделанных предположениях вычисляем

$$(\ominus f) - (\ominus g) = -\frac{f}{1 + \mu f} + \frac{g}{1 + \mu g} = \frac{g - f}{(1 + \mu f)(1 + \mu g)} \geq 0.$$

Лемма 3.3. Если $f \geq 0$ и $g \in (0, 1]$, то $\ominus(f/g) \geq (\ominus f)/g$.

Доказательство. Прямым вычислением получаем

$$\left(\ominus \frac{f}{g}\right) - \frac{\ominus f}{g} = -\frac{f}{g + \mu f} + \frac{f}{g + \mu f g} = \frac{\mu f^2(1 - g)}{(g + \mu f)(g + \mu f g)} \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.3 (Неравенство Стахурской). Предположим, что функции f, g, p rd-непрерывны и неотрицательные на \mathbb{T} . Пусть $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Если частное f/p является неубывающим на \mathbb{T} , то для любой функции $x(t)$, удовлетворяющей неравенству

$$x(t) \leq f(t) + p(t) \int_{t_0}^t q(s)x^m(s)\Delta s \quad \text{при всех } t \geq t_0 \quad (3.6)$$

верна оценка

$$x(t) \leq \frac{f(t)}{\left\{1 + (m - 1) \int_{t_0}^t (\ominus q p f^{m-1})(s)\Delta s\right\}^{1/(m-1)}} \quad (3.7)$$

на интервале $[t_0, t_m)$, где t_m является первой точкой, в которой знаменатель в правой части неравенства (3.7) становится неположительным.

Доказательство. Докажем это утверждение методом индукции. Предположим вначале, что неравенство (3.6) выполняется при $m = 2$. Определим функцию

$$v(t) = \int_{t_0}^t q(s)x^2(s)\Delta s + \frac{f(t)}{p(t)}.$$

Тогда имеем $x \leq pv$ и

$$v^\Delta = qx^2 + \left(\frac{f}{p}\right)^\Delta \leq qp^2v^2 + \left(\frac{f}{p}\right)^\Delta,$$

и согласно теоремы 6.1 из монографии [13] находим оценку

$$v(t) \leq e_{qp^2v}(t, t_0) \left\{ v(t_0) + \int_{t_0}^t e_{\ominus qp^2v}(\sigma(s), t_0) \left(\frac{f}{p}\right)^\Delta(s)\Delta s \right\} \leq e_{qp^2v}(t, t_0) \frac{f(t)}{p(t)},$$

так как $v(t_0) = f(t_0)/g(t_0)$, $(f/p)^\Delta \geq 0$ и $e_{\ominus qp^2v^2}(\sigma(s), t_0) \leq 1$. Далее определим $V = e_{\ominus qp^2v}(\cdot, t_0)$ так, что $v \leq f/(pV)$, и тогда $qp^2v \leq qpf/V$; применяя леммы 3.1 и 3.2, получаем

$$\ominus qp^2v \geq \ominus \frac{qpf}{V} \geq \frac{\ominus qpf}{V}.$$

Таким образом, имеем

$$V^\Delta = (\ominus qp^2v)V \geq \frac{\ominus qpf}{V}V = \ominus qpf.$$

Отсюда находим

$$V(t) \geq V(t_0) + \int_{t_0}^t (\ominus qpf)(s) \Delta s = 1 + \int_{t_0}^t (\ominus qpf)(s) \Delta s$$

и, следовательно,

$$v(t) \leq \frac{f(t)}{p(t)V(t)} \leq \frac{f(t)}{p(t) \left\{ 1 + \int_{t_0}^t (\ominus qpf)(s) \Delta s \right\}}.$$

Подставляя эту оценку в неравенство $x \leq pv$, получаем требуемое неравенство при $m = 2$.

Теперь предположим, что утверждение теоремы 3.3 верно для некоторого $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Пусть неравенство (3.6) верно при замене m на $m + 1$. Тогда

$$x(t) \leq f(t) + p(t) \int_{t_0}^t q(s)x(s)x^m(s) \Delta s$$

и, применяя принцип индукции, получаем

$$x(t) \leq \frac{f(t)}{\{1 + (m-1)u(t)\}^{1/(m-1)}}, \quad \text{где } u(t) := \int_{t_0}^t (\ominus qxp^{m-1})(s) \Delta s.$$

Применяя вновь леммы 3.2 и 3.3, получим

$$u^\Delta = \ominus qxp^{m-1} \geq \ominus \frac{qp f^m}{\{1 + (m-1)u\}^{1/(m-1)}} \geq \frac{\ominus qp f^m}{\{1 + (m-1)u\}^{1/(m-1)}}.$$

Таким образом,

$$mu^\Delta \{1 + (m-1)u\}^{1/(m-1)} \geq m(\ominus qp f^m).$$

Пусть $F(x) = (1 + (m-1)x)^{m/(m-1)}$ при $x \geq 0$, так что $F'(x) = m(1 + (m-1)x)^{1/(m-1)}$ является неубывающей функцией. Применяя цепное правило Келлера (см. [13], теорема 1.90), получим

$$\begin{aligned} \left\{ (1 + (m-1)u)^{m/(m-1)} \right\}^\Delta &= (F \circ u)^\Delta = u^\Delta \int_0^1 F'(u(1-h) + hu^\sigma) dh \geq \\ &\geq u^\Delta \int_0^1 F'(u) dh = u^\Delta F'(u) \geq m(\ominus qp f^m), \end{aligned}$$

при этом используется неравенство $u^\Delta \leq 0$ и его следствие $u^\sigma \leq u$. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + (m-1)u \right\}^{m/(m-1)}(t) &= 1 + \int_{t_0}^t \left\{ (1 + (m-1)u)^{m/(m-1)} \right\}^\Delta(s) \Delta s \geq \\ &\geq 1 + m \int_{t_0}^t (\ominus qp f^m)(s) \Delta s \end{aligned}$$

и, как следствие,

$$\left\{ 1 + (m-1)u(t) \right\}^{1/(m-1)} \geq \left\{ 1 + m \int_{t_0}^t (\ominus qp f^m)(s) \Delta s \right\}^{1/m}.$$

Подставляя эту оценку в неравенство $x \leq f/(1 + (m-1)u)^{1/(m-1)}$, получим неравенство (3.7) с заменой m на $m + 1$. Этим теорема 3.3 доказана.

Приведем теперь результат, имеющий ключевое значение для этого раздела. Прототипом этого утверждения является лемма 1 из статьи [28], доказанная для временной шкалы $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

Лемма 3.4. *Предположим, что для системы (3.1) выполняется условие (3.3) при $m > 1$ и условие (3.4). Тогда любое решение системы (3.1) удовлетворяет оценке*

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \frac{\varphi(t)\psi(t_0)\|x_0\|}{\left\{1 - (m-1)\|x_0\|^{m-1}\psi^{m-1}(t_0)D(t, t_0)\right\}^{1/(m-1)}} \quad (3.8)$$

при всех $t \geq t_0$, для которых

$$(m-1)\|x_0\|^{m-1}\psi^{m-1}(t_0)D(t, t_0) < 1,$$

где

$$D(t, t_0) = \int_{t_0}^t \phi^m(\tau)\psi(\sigma(\tau))a(\tau)\Delta\tau.$$

Доказательство. Вначале заметим, что в данном утверждении все условия теоремы 3.3 выполняются. Пусть x — решение системы (3.1). Тогда вследствие соотношения (3.2) при всех $t \geq t_0$ верна оценка

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \varphi(t)\psi(t_0)\|x_0\| + \int_{t_0}^t \varphi(t)\psi(\sigma(\tau))a(\tau)\|x(\tau; t_0, x_0)\|^m \Delta\tau.$$

Следовательно, функция $y = \|x(\cdot; t_0, x_0)\|/\varphi$ удовлетворяет неравенству

$$y(t) \leq \psi(t_0)\|x_0\| + \int_{t_0}^t \varphi^m(\tau)\psi(\sigma(\tau))a(\tau)y^m(\tau)\Delta\tau \quad \text{при всех } t \geq t_0.$$

Согласно теореме 3.3 имеем неравенство

$$y(t) \leq \frac{\psi(t_0)\|x_0\|}{\left\{1 + (m-1)\int_{t_0}^t (\ominus\phi^m\psi^\sigma a\psi^{m-1}(t_0)\|x_0\|^{m-1})(\tau)\Delta\tau\right\}^{1/(m-1)}},$$

которое выполняется до тех пор, пока знаменатель остается положительным. Так как

$$\ominus g = -\frac{g}{1 + \mu g} \geq -g \quad \text{при всех } g \geq 0,$$

то, возвращаясь к определению y , находим, что неравенство (3.8) доказано.

Оценка (3.8) позволяет установить новые условия устойчивости невозмущенного движения квазилинейной системы (3.1) на временной шкале аналогично тому, как это было сделано для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (cf. [28], теоремы 1–3).

Теорема 3.4. *Предположим, что для системы (3.1) выполняется условие (3.3) при $m > 1$ и условие (3.4).*

- (1) *Если при всех $s \geq t_0$ существует $K(s) > 0$ такое, что $\varphi(t) \leq K(s)$ при всех $t \geq s \geq t_0$ и*

$$D(t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} D(t, t_0) < \infty, \quad (3.9)$$

то невозмущенное движение системы (3.1) устойчиво;

- (2) *если существуют $K_1, K_2 > 0$ такие, что $\varphi(t)\psi(s) \leq K_1$ при всех $t \geq s \geq t_0$ и $\psi^{m-1}(s)\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} D(t, s)\right\} \leq K_2$ при всех $s \geq t_0$, то невозмущенное движение системы (3.1) равномерно устойчиво;*

(3) если выполняется условие (3.9) и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$, то невозмущенное движение системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Докажем вначале утверждение (1) теоремы 3.4. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{T}$. Определим

$$\delta(\varepsilon, t_0) = \min \left\{ [2(m-1)\psi^{m-1}(t_0)D(t_0)]^{-1/(m-1)}, \varepsilon\psi^{-1}(t_0)K^{-1}(t_0)2^{-1/(m-1)} \right\}$$

и предположим, что $\|x_0\| < \delta$. Тогда согласно лемме 3.4 имеем

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, x_0)\| &< \frac{\varphi(t)\psi(t_0)\delta}{\{1 - (m-1)\delta^{m-1}\psi^{m-1}(t_0)D(t, t_0)\}^{1/(m-1)}} \leq \\ &\leq \frac{\varphi(t)\psi(t_0)\varepsilon\psi^{-1}(t_0)K^{-1}(t_0)2^{-1/(m-1)}}{\{1 - (m-1)2^{-1}(m-1)^{-1}\psi^{1-m}(t_0)D^{-1}(t_0)\psi^{m-1}(t_0)D(t, t_0)\}^{1/(m-1)}} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon 2^{-1/(m-1)}}{\{1 - 2^{-1}\}^{1/(m-1)}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь докажем утверждение (2). Пусть задано $\varepsilon > 0$. Определим

$$\delta(\varepsilon) = \min \left\{ [2(m-1)K_2]^{-1/(m-1)}, \varepsilon K_1^{-1} 2^{-1/(m-1)} \right\}$$

и предположим, что $\|x_0\| < \delta$. В этом случае согласно лемме 3.4 имеем

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, x_0)\| &< \frac{\varphi(t)\psi(t_0)\delta}{\{1 - (m-1)\delta^{m-1}\psi^{m-1}(t_0)D(t, t_0)\}^{1/(m-1)}} \leq \\ &\leq \frac{\varphi(t)\psi(t_0)\varepsilon K_1^{-1} 2^{-1/(m-1)}}{\{1 - (m-1)2^{-1}(m-1)^{-1}K_2^{-1}\psi^{m-1}(t_0)D(t, t_0)\}^{1/(m-1)}} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon 2^{-1/(m-1)}}{\{1 - 2^{-1}\}^{1/(m-1)}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство утверждения (3) следующее. Так как φ стремится к нулю, то оно ограничено. Согласно утверждению (1) невозмущенное движение устойчиво. Пусть $\delta_0 > 0$ такое, что знаменатель в неравенстве (3.8) положителен, и предположим, что $\|x_0\| < \delta_0$. Тогда согласно лемме 3.4

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \frac{\varphi(t)\psi(t_0)\delta_0}{\{1 - (m-1)\delta_0^{m-1}\psi^{m-1}(t_0)D(t, t_0)\}^{1/(m-1)}} \rightarrow 0$$

как только $t \rightarrow \infty$.

§4. Анализ устойчивости на основе обобщенного прямого метода Ляпунова. Созданный А.М. Ляпуновым [3] прямой метод исследования устойчивости движения непрерывных систем с конечным числом степеней свободы к настоящему времени распространен на многие классы систем дифференциальных уравнений (см. [25] и библиографию там).

4.1. Общие теоремы. В данном параграфе приведены основные теоремы прямого метода Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале \mathbb{T} .

На временной шкале \mathbb{T} будем рассматривать следующие подмножества:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{t \in \mathbb{T} : t \text{ плотные слева и рассеяны справа}\}; \\ \mathcal{B} &= \{t \in \mathbb{T} : t \text{ рассеяны слева и рассеяны справа}\}; \\ \mathcal{C} &= \{t \in \mathbb{T} : t \text{ рассеяны слева и плотные справа}\}; \\ \mathcal{D} &= \{t \in \mathbb{T} : t \text{ плотные слева и плотные справа}\}. \end{aligned}$$

Предположим, что $\sup \mathbb{T} = a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$ и $\inf \mathbb{T} = b \in \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$, и обозначим эйлерову производную вектора состояния системы $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{T}$ через $\dot{x}(t)$, если она существует.

Для анализа устойчивости нулевого решения системы на временной шкале рассматривается система динамических уравнений возмущенного движения

$$x^\Delta(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.1)$$

где

$$x^\Delta(t) = \begin{cases} \frac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\mu(t)}, & \text{если } t \in \mathcal{A} \cup \mathcal{C}, \\ \dot{x}(t) & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. О системе (4.1) сделаем следующие предположения.

Н₁. Вектор-функция $F(t) = f(t, x(t))$ удовлетворяет условию $F \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$, как только x является дифференцируемой функцией со значениями в N , $N \subset \mathbb{R}^n$ — открытая связная окрестность состояния $x = 0$.

Н₂. Вектор-функция $f(t, x)$ является покомпонентно регрессивной, т.е.

$$e^T + \mu(t)f(t, x) \neq 0 \text{ при всех } t \in [t_0, \infty), \text{ где } e^T = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Н₃. $f(t, x) = 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$, если и только если $x = 0$.

Н₄. Функция зернистости $0 < \mu(t) \in M$ при всех $t \in \mathbb{T}$, где M — компактное множество.

В качестве вспомогательной функции для анализа устойчивости состояния $x = 0$ системы (4.1) будем применять матрично-значную функцию [25]

$$U(t, x) = [v_{ij}(t, x)], \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

где $v_{ii}(t, x): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ при $i = 1, \dots, m$ и $v_{ij}(t, x): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$.

Предполагается, что элементы $v_{ij}(t, x)$ функции (4.2) удовлетворяют условиям:

- (а) $v_{ij}(t, x)$ локально Липшицевы по x при всех $t \in \mathbb{T}$;
- (б) $v_{ij}(t, x) = 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$, если только $x = 0$;
- (в) $v_{ij}(t, x) = v_{ji}(t, x)$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $i, j = 1, \dots, m$.

Наряду с функцией (4.2) будем использовать скалярную функцию

$$v(t, x, \theta) = \theta^T U(t, x) \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^m, \quad (4.3)$$

и функции сравнения K -класса. Напомним, что вещественная функция $a(r)$ принадлежит K -классу (KR -классу), если она определена, непрерывна и строго возрастает при $0 \leq r \leq r_1$ ($0 \leq r < +\infty$) и $a(0) = 0$.

Определение 4.1. Матрично-значная функция (4.2) называется:

- (а) *положительно (отрицательно) полуопределенной* на $\mathbb{T} \times N$, $N \subset \mathbb{R}^n$, если $v(t, x, \theta) \geq 0$ ($v(t, x, \theta) \leq 0$) при всех $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$ соответственно;
- (б) *положительно определенной* на $\mathbb{T} \times N$, $N \subset \mathbb{R}^n$, если существует функция $a \in K$ -классу такая, что $v(t, x, \theta) \geq a(\|x\|)$ при всех $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$;
- (в) *убывающей* на $\mathbb{T} \times N$, если существует функция $b \in K$ -классу такая, что $v(t, x, \theta) \leq b(\|x\|)$ при всех $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$;
- (г) *радиально неограниченной* на $\mathbb{T} \times N$, если $v(t, x, \theta) \rightarrow +\infty$ при $\|x\| \rightarrow +\infty$, при $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$.

Предложение 4.1. Матрично-значная функция $U: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ является положительно определённой на \mathbb{T} , если и только если функция (4.3) может быть представлена в виде

$$\theta^T U(t, x) \theta = \theta^T U_+(t, x) \theta + a(\|x\|), \quad t \in \mathbb{T},$$

где $U_+(t, x)$ — положительно полуопределённая матрично-значная функция и $a \in K$ -классу.

Предложение 4.2. Матрично-значная функция $U: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ является убывающей на \mathbb{T} , если и только если функция (4.3) может быть представлена в виде

$$\theta^T U(t, x) \theta = \theta^T U_-(t, x) \theta + b(\|x\|), \quad t \in \mathbb{T},$$

где $U_-(t, x)$ — отрицательно полуопределённая матрично-значная функция и $b \in K$ -классу.

Далее будет использоваться выражение полной Δ -производной функции (4.3) вдоль решений системы (4.1). Определим его так:

$$v_+^\Delta(t, x, \theta) = \theta^T U_+^\Delta(t, x) \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^m, \quad t \in \mathbb{T},$$

где $U_+^\Delta(t, x)$ вычисляется поэлементно согласно формулы

$$U_+^\Delta(t) = \begin{cases} \overline{\lim} \{ [u_{ij}(t+h) - u_{ij}(t)] h^{-1} : h \rightarrow 0, h+t \in \mathbb{T} \}, & \text{если } t = \sigma(t), \\ [u_{ij}(\sigma(t)) - u_{ij}(t)] \mu^{-1}(t), & \text{если } t < \sigma(t), \end{cases}$$

где $u_{ij}(t) = u_{ij}(t, x(t; t_0, x_0))$.

В частном случае, когда $v(t, x, \theta) = x^T x$, $x \in \mathbb{R}^n$, согласно правилу (3) теоремы 2.3 имеем

$$\begin{aligned} v_+^\Delta(t, x, \theta) &= (x^T x)^\Delta(t) = x^T(t) x^\Delta(t) + x^{T\Delta}(t) x(\sigma(t)) = \\ &= x^T(t) f(t, x(t)) + f^T(t, x(t)) [x(t) + \mu(t) f(t, x(t))]. \end{aligned}$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $\mu(t) = 0$ и

$$v_+^\Delta(t, x, \theta) = \frac{d}{dt} (x^T x) = x^T f(t, x) + f^T(t, x) x.$$

Если $U(t, x) = x x^T$, $x \in \mathbb{R}^n$, то $v_+^\Delta(t, x, \theta) = \theta^T (x x^T)^\Delta(t) \theta = \theta^T \{ x(t) f^T(t, x(t)) + f(t, x) x^T(t) + \mu(t) f(t, x(t)) f^T(t, x(t)) \} \theta$. Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $\mu(t) = 0$ и

$$v_+^\Delta(t, x, \theta) = \theta^T \frac{d}{dt} (x x^T) \theta = \theta^T \{ x(t) f^T(t, x) + f(t, x) x^T(t) \} \theta.$$

Далее сформулируем утверждения об устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (4.1).

Теорема 4.1. Предположим, что вектор-функция $f(t, x)$ в системе (4.1) удовлетворяет предположениям H_1 – H_4 на $\mathbb{T} \times N$, $N \subset \mathbb{R}^n$. Если существует:

- (1) матрично-значная функция $U: \mathbb{T} \times N \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ и вектор $\theta \in \mathbb{R}_+^m$ такие, что функция $v(t, x, \theta) = \theta^T U(t, x) \theta$ локально Липшицева по x при всех $t \in \mathbb{T}$;
- (2) функции сравнения ψ_{i1} , ψ_{i2} , $\psi_{i3} \in K$ -классу и $m \times m$ -матрицы A_j , $j = 1, 2$, такие, что при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times N$
 - (а) $\psi_1^T(\|x\|) A_1 \psi_1(\|x\|) \leq v(t, x, \theta)$;
 - (б) $v(t, x, \theta) \leq \psi_2^T(\|x\|) A_2 \psi_2(\|x\|)$;

(в) существует $t \times t$ матрица $A_3 = A_3(\mu(t))$ такая, что

$$v_+^\Delta(t, x, \theta) \leq \psi_3^T(\|x\|)A_3\psi_3(\|x\|)$$

при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times N$;

(г) существует $0 < \mu^* \in M$ такое, что $\frac{1}{2} [A_3^T(\mu(t)) + A_3(\mu(t))] \leq A_3(\mu^*)$ при любых $0 < \mu(t) < \mu^*$,

тогда, если матрицы A_1 и A_2 — положительно определённые и матрица $A_3^* = A_3(\mu^*)$ — отрицательно полуопределённая, то состояние $x = 0$ системы (4.1) устойчиво при условиях 2(а), 2(б), 2(г) и равномерно устойчиво при условиях 2(а)–2(г).

Доказательство. Из того, что A_1 и A_2 положительно определённые матрицы, следует, что $\lambda_m(A_1) > 0$ и $\lambda_M(A_2) > 0$, где $\lambda_m(A_1)$ и $\lambda_M(A_2)$ — минимальное и максимальное собственные значения матриц A_1 и A_2 соответственно. Учитывая это, оценки (а), (б) из условия 2 теоремы 4.1 представим в виде

$$\lambda_m(A_1)\bar{\psi}_1(\|x\|) \leq v(t, x, \theta) \leq \lambda_M(A_2)\bar{\psi}_2(\|x\|)$$

при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times N$, где $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2 \in K$ -классу такие, что

$$\bar{\psi}_1(\|x\|) \leq \psi_1^T(\|x\|)\psi_1(\|x\|), \quad \bar{\psi}_2(\|x\|) \geq \psi_2^T(\|x\|)\psi_2(\|x\|)$$

при всех $x \in N$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $S(t)$ — следующее утверждение:

Существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $\|x_0\| < \delta$ следует $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$.

Пусть

$$S^* = \{t \in [t_0, \infty) : S(t) \text{ не верно}\}.$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы 4.1, множество $S^* = \emptyset$. Предположим обратное, что $S^* \neq \emptyset$. Из того, что S^* замкнутое и непустое, следует, что $\inf S^* = t^* \in S^*$. Покажем, что утверждение $S(t^*)$ верно. Пусть $t^* = t_0$, тогда $S(t_0)$ верно, так как $\|x(t_0; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при $\|x_0\| < \varepsilon$, так как $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$.

Далее, пусть $t^* \neq t_0$. Покажем, что и в этом случае $S(t^*)$ верно.

Действительно, выберем $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ так, что $\lambda_M(A_2)\bar{\psi}_2(\delta_1) < \lambda_m(A_1)\bar{\psi}_1(\varepsilon)$.

Далее, пусть $\delta = \min(\varepsilon, \delta_1)$ такое, что

$$\|x(t^*; t_0, x_0)\| \geq \varepsilon \text{ и } \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon,$$

при $t \in [t_0, t^*)$ и $\|x_0\| < \delta$. Из условия 2(в), 2(г) теоремы 4.1 имеем

$$v_+^\Delta(t, x, \theta) \leq \lambda_M(A_3^*)\bar{\psi}_3(\|x\|) \leq 0$$

при всех $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$. Отсюда при $t = t^*$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda_m(A_1)\bar{\psi}_1(\varepsilon) &= \lambda_m(A_1)\bar{\psi}_1(\|x(t^*; t_0, x_0)\|) \leq v(t^*, x(t^*), \theta) \leq \\ &\leq v(t_0, x_0, \theta) < \lambda_M(A_2)\bar{\psi}_2(\delta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

при $\|x_0\| < \delta$. Из противоречия (4.4) следует, что $S(t^*)$ верно, так что $t^* \notin S^*$. Следовательно, $S^* = \emptyset$. Этим теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.1 (cf. [18]). Пусть вектор-функция f в системе (4.1) удовлетворяет предположениям Н₁–Н₄ на $\mathbb{T} \times N$, $N \subset \mathbb{R}^n$ и существует, по крайней мере, одна пара индексов $(p, q) \in [1, m]$, для которой $(v_{pq}(t, x) \neq 0) \in U(t, x)$ и функция $v(t, x, \theta) = e^T U(t, x)e = v(t, x)$ при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times N$ удовлетворяет условиям:

(а) $\psi_1(\|x\|) \leq v(t, x)$;

- (б) $v(t, x) \leq \psi_2(\|x\|)$;
(в) $v^\Delta(t, x)|_{(4.1)} \leq 0$ при всех $0 < \mu(t) < \mu^* \in M$,

где ψ_1, ψ_2 — некоторые функции K -класса.

Тогда состояние $x = 0$ системы (4.1) устойчиво при условиях (а) и (с) и равномерно устойчиво при условиях (а)–(с).

Теорема 4.2. *Предположим, что вектор-функция $f(t, x)$ в системе (4.1) удовлетворяет условиям H_1 – H_4 на $\mathbb{T} \times N$, $N \subset \mathbb{R}^n$. Если существуют:*

- (1) *матрично-значная функция $U : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ и вектор $\theta \in \mathbb{R}_+^m$ такие, что функция $v(t, x, \theta) = \theta^T U(t, x) \theta$ локально Липшицева по x при всех $t \in \mathbb{T}$;*
(2) *функции сравнения $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3} \in K$ -классу и $m \times m$ матрицы B_j , $j = 1, 2, 3$, такие, что:*

- (а) $\psi_1^T(\|x\|) B_1 \psi_1(\|x\|) \leq v(t, x, \theta)$;
(б) $v(t, x, \theta) \leq \psi_2^T(\|x\|) B_2 \psi_2(\|x\|)$ при всех $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$;
(в) *существует $m \times m$ матрица $B_3 = B_3(\mu(t))$ такая, что*

$$v^\Delta(t, x, \theta) \leq \psi_3^T(\|x\|) B_3 \psi_3(\|x\|) + w(t, \psi_3(\|x\|))$$

при всех $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$, где функция $w(t, \cdot)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{\|\psi_3\| \rightarrow 0} \frac{|w(t, \psi_3(\|x\|))|}{\|\psi_3\|} = 0 \quad \text{при} \quad \|\psi_3\| \rightarrow 0$$

равномерно по $t \in \mathbb{T}$;

- (г) *существует $0 < \mu^* \in M$ такое, что $\frac{1}{2} [B_3^T(\mu(t)) + B_3(\mu(t))] \leq B_3(\mu^*)$ при любых $0 < \mu(t) < \mu^*$,*

тогда, если матрицы B_1 и B_2 — положительно определённые и матрица $B_3^ = B_3(\mu^*)$ — отрицательно определённая, то:*

- (а) *при условии 2(а), 2(в) состояние $x = 0$ системы (4.1) асимптотически устойчиво на \mathbb{T} ;*
(б) *при условиях 2(а)–2(в) состояние системы (4.1) равномерно асимптотически устойчиво на \mathbb{T} .*

Доказательство. Рассмотрим утверждение

$$\{S_1(t): S(t) \text{ при } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0, \text{ если } \|x_0\| < \delta(t_0)\}.$$

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 4.1, нетрудно проверить справедливость утверждений теоремы 4.2.

Следствие 4.2 (cf. [18]). Пусть вектор-функция f в системе (4.1) удовлетворяет условиям H_1 – H_4 на $\mathbb{T} \times N$, $N \subset \mathbb{R}^n$ и существует, по крайней мере, одна пара индексов $(p, q) \in [1, m]$, для которой $(v_{pq}(t, x) \neq 0) \in U(t, x)$ и функция $v(t, x, \theta) = e^T U(t, x) e = v(t, x)$ при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times N$ удовлетворяет условиям:

- (а) $\psi_1(\|x\|) \leq v(t, x)$;
(б) $v(t, x) \leq \psi_2(\|x\|)$;

(в) при всех $0 < \mu(t) < \mu^* \in M$ выполняется неравенство

$$v^\Delta(t, x)|_{(4.1)} \leq -\psi_3(\|x\|) + m(t, \psi_3(\|x\|))$$

и

$$\lim \frac{|m(t, \psi_3(\|x\|))|}{\psi_3(\|x\|)} \quad \text{при} \quad \psi_3 \rightarrow 0$$

равномерно по $t \in \mathbb{T}$, где ψ_1, ψ_2, ψ_3 — функции сравнения класса K .

Тогда при условиях (а), (в) состояние $x = 0$ системы (4.1) асимптотически устойчиво и при условиях (а)–(в) состояние $x = 0$ системы (4.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 4.3. *Предположим, что вектор-функция $f(t, x)$ в системе (4.1) удовлетворяет условиям $H_1 - H_4$ на $\mathbb{T} \times N$, $N \subset \mathbb{R}^n$. Пусть:*

- (1) *существуют матрично-значная функция $U: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ и вектор $\theta \in \mathbb{R}_+^m$ такие, что функция $v(t, x, \theta) = \theta^T U(t, x) \theta$ локально Липшицева по x при всех $t \in \mathbb{T}$;*
- (2) *существуют $\psi_1, \psi_3 \in K$ и $m \times m$ матрица A_1 такие, что при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times N$:*
 - (а) $\psi_1^T(\|x\|) A_1 \psi_1(\|x\|) \leq v(t, x, \theta)$;
 - (б) *существует $m \times m$ матрица $C_3 = C_3(\mu(t))$ такая, что $v_+^\Delta(t, x, \theta) \geq \psi_3^T(\|x\|) C_3 \psi_3(\|x\|)$ при $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times L \times \mathbb{R}_+^m$, $L \subset N$;*
 - (в) *существует $m \times m$ матрица $C_3(\mu^*) \geq \frac{1}{2} [C_3^T(\mu(t)) + C_3(\mu(t))]$, $\mu^* \in M$, $t \in \mathbb{T}$;*

(3) *точка $x = 0$ принадлежит границе L ;*

(4) $v(t, x, \theta) = 0$ на $\mathbb{T} \times (\partial L \cap B_\Delta)$, где $B_\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < \Delta\}$.

Тогда, если матрицы A_1 , $C_3(\mu^*)$ — положительно определенные, то состояние $x = 0$ системы (4.1) неустойчиво.

Доказательство этой теоремы основано на рассмотрении утверждения

$$\{S_2(t): \text{существует } t_1 \in [t_0, \infty) \text{ такое, что } \|x(t_1; t_0, x_0)\| > \varepsilon \\ \text{при любом } 0 < \delta < \varepsilon, \text{ для которого } \|x_0\| < \delta\}$$

и применении рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 4.1.

Следствие 4.3 (cf. [18]). Пусть вектор-функция f в системе (4.1) удовлетворяет условиям $H_1 - H_4$ на $\mathbb{T} \times N$, $N \subset \mathbb{R}^n$ и существует по крайней мере одна пара $(p, q) \in [1, m]$ для которой $(v_{pq}(t, x) \neq 0) \in U(t, x)$ и функция $v(t, x, e) = e^T U(t, x) e = v(t, x)$ при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times N$ удовлетворяет условиям:

- (а) $\psi_1(\|x\|) \leq v(t, x)$, $\psi_1 \in K$;
- (б) при всех $0 < \mu(t) < \mu^* < M$ выполняется неравенство $v_+^\Delta(t, x, \theta)|_{(4.1)} \geq \psi_3(\|x\|)$, $\psi_3 \in K$;
- (в) точка $(x = 0) \in \partial L$;
- (г) $v(t, x) = 0$ на $\mathbb{T} \times (\partial \mathbb{T} \cap B_\Delta)$.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (4.1) неустойчиво.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнения возмущенного движения на \mathbb{T} с функцией зернистости $0 < \mu(t) < +\infty$

$$\begin{aligned} x^\Delta &= y(x + y), & x(t_0) &= x_0, \\ y^\Delta &= -x(x + y), & y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для функции $v(x, y) = x^2 + y^2$ при $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ имеем

$$\dot{v}(x(t), y(t)) = 0 \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

и

$$v_+^\Delta(x(t), y(t))|_{(4.5)} = \mu(t)(x + y)^2(x^2 + y^2) \quad (4.7)$$

Из (4.6) следует, что $x = y = 0$ системы, соответствующей (4.5) при $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ устойчиво, в то время как $x = y = 0$ системы (4.5) неустойчиво при любой функции зернистости $0 < \mu(t) < +\infty$.

Пример 4.2. Пусть задана система динамических уравнений

$$\begin{aligned} x^\Delta &= -x - y(x^2 + y^2), & x(t_0) &= x_0, \\ y^\Delta &= -y + x(x^2 + y^2), & y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для функции $v(x, y) = x^2 + y^2$ при $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ имеем

$$\dot{v}(x(t), y(t)) = -2(x^2 + y^2) \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

и на $\mathbb{T} -$

$$v_+^\Delta(x(t), y(t))|_{(4.8)} = -2(x^2 + y^2) + \mu(t)[x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^3]. \quad (4.10)$$

Из анализа (4.9), (4.10) следует, что $x = y = 0$ системы, соответствующей системе (4.8) при $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, асимптотически устойчиво.

Если шкала \mathbb{T} имеет зернистость $\mu(t) = 1$, т.е. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то при начальных значениях (x_0, y_0) из области $x_0^2 + y_0^2 < 1$ нулевое решение системы (4.8) будет асимптотически устойчиво на \mathbb{Z} . Если же $\mu(t) = 2$, что соответствует временной шкале $\mathbb{T} = 2\mathbb{N}_0 = \{k_0, k_0 + 2, k_0 + 4, \dots\}$, то

$$v^\Delta(x(t), y(t))|_{(4.8)} = 2(x^2 + y^2)^3 \quad (4.11)$$

и состояние равновесия $x = y = 0$ системы (4.8) неустойчиво.

4.2. Линейные системы. Рассмотрим временную шкалу \mathbb{T} и линейное однородное динамическое уравнение

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (4.12)$$

где матрица $A: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ является rd-непрерывной и регрессивной. Вместе с уравнением (4.12) рассмотрим начальную задачу

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t), \quad x(s) = x_0, \quad (4.13)$$

где $s \in \mathbb{T}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

В некоторых случаях поведение решения $x(t)$ системы (4.12) может быть исследовано при помощи функции $v(x(t)) = x^T x$, для которой

$$v^\Delta(x(t))|_{(4.12)} = x^T (A^T \oplus A)(t)x, \quad (4.14)$$

где $(A^T \oplus A)(t) = A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t)$.

Следуя [12], определим множества:

$$\Lambda_s(\mathbb{T}) = \{A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}) : \exists c \in \mathcal{R}^+, \text{ для которого } (A^T \oplus A)(t) \leq 2cI < 0 \text{ при всех } t \in \mathbb{T}\};$$

$$\Lambda_u(\mathbb{T}) = \{A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}) : \exists c > 0, \text{ для которого } (A^T \oplus A)(t) \geq 2cI \text{ при всех } t \in \mathbb{T}\},$$

где I — $n \times n$ единичная матрица, \mathcal{R}^+ — множество положительно регрессивных функций. Пусть норма матрицы M определяется формулой $\|M\| = \sup_{u \neq 0} \frac{|Mu|}{|u|}$.

Известно [12] следующее утверждение.

Теорема 4.4. Пусть в системе (4.12) матрица $A \in \Lambda_s(\mathbb{T})$, тогда:

- (а) $\|e_A(t, s)\| \leq e_c(t, s)$ при всех $s \leq t$;
- (б) $\|e_A(t, s)\| \geq e_c(t, s)$ при всех $s \geq t$;
- (в) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_A(t, s)\| = 0$ при каждом фиксированном s и $\lim_{s \rightarrow -\infty} \|e_A(t, s)\| = 0$ при каждом фиксированном t .

Если матрица $A \in \Lambda_u(\mathbb{T})$, то:

- (г) $\|e_A(t, s)\| \geq e_c(t, s)$ при всех $t \leq s$;
- (д) $\|e_A(t, s)\| \leq e_c(t, s)$ при всех $t \geq s$;
- (е) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|e_A(t, s)\| = \infty$ при каждом фиксированном s и $\lim_{s \rightarrow \infty} \|e_A(t, s)\| = 0$ при каждом фиксированном t .

Доказательство этих утверждений основано на анализе выражения Δ -производной функции $v(x) = x^T x$:

$$v^\Delta(x(t))|_{(4.12)} = (2 \odot c)v(x(t)), \quad (4.15)$$

где $2 \odot c = c \oplus c = 2c + \mu c^2$.

Далее применим теоремы 4.1–4.3 к системе (4.12). Предположим, что в матрично-значной функции $U(t, x)$ элементы $v_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, такие, что $v_{ii}(t, x) = x_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $v_{ij}(t, x) \equiv 0$ при $i \neq j$. В этом случае функция (4.3) с $\theta = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}_+^n$ имеет вид

$$v(t, x, \theta) = \theta^T U(t, x) \theta = x^T x, \quad (t \in \mathbb{T}^k). \quad (4.16)$$

Следствие 4.4. Пусть система (4.1) имеет вид (4.12) и функция (4.3) имеет вид (4.16). Тогда, если существует $\mu^* \in M$ такое, что матрица $D_0(t, \mu(t))$ в выражении

$$v_{\mp}^\Delta(t, x(t)) = x^T(t) D_0(t, \mu(t)) x(t), \quad (4.17)$$

где $D_0(t, \mu(t)) = (A^T \oplus A)(t)$, отрицательно полуопределенная (отрицательно определена) при всех $0 < \mu(t) \leq \mu^* \in M$, то состояние равновесия $x = 0$ системы (4.12) устойчиво (асимптотически устойчиво) соответственно.

Далее рассмотрим случай, когда

$$v(t, x, \theta) = \theta^T U(t, x) \theta = x^T H(t) x, \quad t \in \mathbb{T}^k, \quad (4.18)$$

где $H \in C_{\text{rd}}^1(\mathbb{T}^k, \mathbb{R}^{n \times n})$, и предположим, что выполняется условие

$$\alpha \|x(t)\|^2 \leq x^T H(t) x \leq \beta \|x(t)\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{T}^k, \quad (4.19)$$

где $\alpha, \beta > 0$ — const.

Следствие 4.5 (cf. [15]). Пусть система (4.1) имеет вид (4.12) и для функции (4.18) выполняется оценка (4.19). Тогда, если существует $\mu^* \in M$ такое, что матрица $D_1(t, \mu(t))$ в выражении

$$v_{\mp}^{\Delta}(t, x(t))|_{(4.12)} = x^T(t)D_1(t, \mu)x(t), \quad (4.20)$$

где

$$D_1(t, \mu) = (I + \mu A^T(t))H^{\Delta}(t)(I + \mu A(t)) + A^T(t)H(t) + H(t)A(t) + \mu A^T(t)H(t)A(t), \quad (4.21)$$

отрицательно полуопределенная (отрицательно определенная) при всех $0 < \mu(t) \leq \mu^* \in M$, то состояние равновесия $x = 0$ системы (4.12) равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) соответственно.

Замечание 4.1. Если в выражении (4.21) Δ -производная матрицы $H(t)$, $H^{\Delta}(t) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$, то анализ знакоопределенности выражения $v_{\mp}^{\Delta}(t, x(t))|_{(4.12)}$ упрощается.

Далее предположим, что существует положительно-определенная постоянная матрица Q , $Q = Q^T$, такая, что

$$A^T(t)H(t) + H(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)H(t)A(t) = -Q. \quad (4.22)$$

Тогда выражение (4.20) принимает вид

$$v_{\mp}^{\Delta}(t, x(t))|_{(4.12)} = x^T(t)[(I + \mu(t)A^T(t))H^{\Delta}(t)(I + \mu(t)A(t)) - Q]x(t), \quad t \in \mathbb{T}^k. \quad (4.23)$$

Из уравнения

$$(I + \mu(t)A^T(t))H^{\Delta}(t)(I + \mu(t)A(t)) - Q = 0$$

определим $\mu_{\max} = \max \{ \mu(t) : t \in \mathbb{T}^k \} \in M$.

Следствие 4.6. Пусть система (4.1) имеет вид (4.12) и для функции (4.18) выполняются условия (4.19) и при $0 < \mu(t) < \mu_{\max}$ выполняется неравенство

$$A(t)H(t) + H(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)H(t)A(t) \leq -Q,$$

тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (4.12) равномерно асимптотически устойчиво.

Матричное уравнение (4.22) является обобщением известного матричного уравнения Ляпунова [34]

$$A^T H + H A = -Q \quad (4.24)$$

для устойчивой автономной системы, для которого известно решение в виде

$$H = \int_0^{\infty} \exp(A^T s) Q \exp(As) ds. \quad (4.25)$$

Матрица A в уравнении (4.24) является постоянной и устойчивой.

Для того, чтобы построить решение $H(t)$ уравнения (4.22) на \mathbb{T}^k будет использовано следующее утверждение.

Предложение 4.3 [13]. Пусть матрица $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ дифференцируемая матрица на \mathbb{T} . Если C является решением матричного динамического уравнения

$$C^{\Delta} = A(\tau)C - C(\sigma(\tau))A(\tau),$$

то

$$C(\tau)e_A(\tau, s) = e_A(\tau, s)C(s).$$

Следствие 4.7. Пусть матрица $A \in \mathcal{R}$ и C — постоянная матрица. Если матрица C коммутирует с $A(t)$, то C коммутирует с $e_{A(t)}$. В частности, если $A(t)$ — постоянная матрица относительно $e_{A(t)}$, то $A(t)$ коммутирует с $e_{A(t)}$.

Используя предложение 4.3, в работе [15] найдено решение уравнения (4.22) в следующем виде.

Предложение 4.4. Предположим, что система (4.12) такова, что все собственные значения $n \times n$ матрицы $A(t)$ лежат в круге Хильбера: $\{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{1}{h}| = \frac{1}{h}\}$, $h > 0$ при всех $t \geq t_0$. Тогда для каждого $t \in \mathbb{T}$ существует некоторая временная шкала \mathbb{S} такая, что интегрирование на $\mathbb{T}_S = [0, \infty)$ позволяет найти решение уравнения (4.22) в виде

$$H(t) = \int_{\mathbb{T}_S} e_{A^\tau}(s, 0) Q e_A(s, 0) \Delta s. \quad (4.26)$$

Кроме того, если матрица Q — положительно определенная, то матрица $H(t)$ — также положительно определенная при всех $t \geq t_0$.

Доказательство этого утверждения проводится прямой подстановкой выражения (4.26) в левую часть уравнения (4.22). При этом рассматриваются случаи $\mu(t) > 0$ и $\mathbb{S} = \mu(t)\mathbb{N}_0$ и $\mu(t) = 0$; $\mathbb{S} = \mathbb{R}$.

Следствие 4.8. Пусть система (4.1) имеет вид (4.12) и для функции (4.18) выполняется оценка $\alpha \|x(t)\|^2 \leq x^T H(t)x$, $\alpha > 0 = \text{const}$ при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, $H(t) \in \text{C}_{\text{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Если существует значение $0 < \mu^* \in M$ такое, что хотя бы для одного значения $t^* \in \mathbb{T}$ матрица $D_1(t, \mu(t))$ в выражении (4.20) — полуопределенно положительная (определенно положительная), то состояние $x = 0$ системы (4.12) неустойчиво (сильно неустойчиво).

Под сильной неустойчивостью понимается экспоненциальный рост решения $x(t)$ на \mathbb{T} системы (4.12).

В заключение этого параграфа заметим, что в [19] приведены условия существования функции Ляпунова в случае равномерной экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (4.12) на временной шкале в виде

$$v(t, x) = \sup_{\tau \in A_t} \|x(t + \tau; t, x)\| e^{c\tau}, \quad (4.27)$$

где $A_t = \{\tau \in [0, \infty) : t + \tau \in \mathbb{T}\}$.

Теоремы обращения с функциями вида (4.27) для непрерывных систем доказаны в монографиях [34, 35].

§5. Заключительные замечания. Доказательства всех утверждений, приведенных в §2, имеются в монографиях [13, 14] (см. также [16, 17]). Приведенные в статье достаточные условия устойчивости, равномерной устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости получены на основе двух общих подходов, анонсированных в данной работе. А именно, в §3 изложен подход, в основе которого лежит применение интегральных неравенств, имеющих место на временной шкале. Для анализа устойчивости невозмущенного движения квазилинейной системы (3.1) применяется известное из [13] неравенство Гронуолла и нелинейное неравенство Стахурской на временной шкале, которое установлено в данной статье впервые. Это неравенство доказано для случая целых m в неравенстве (3.6).

В §4 анализ устойчивости системы (4.1) проведен на основе обобщенного прямого метода Ляпунова. Это обобщение связано с применением матрично-значной функции для динамических уравнений на временной шкале. В работе [30] положено начало такого рода исследованиям. Применение матрично-значных функций для динамических уравнений на временной шкале позволяет строить гетерогенные функции Ляпунова [26], т.е. функции, состоящие из непрерывных и дискретных компонент, что невозможно сделать в рамках скалярной функции Ляпунова. Некоторая конкретизация в выборе функции Ляпунова проведена при исследовании линейных динамических уравнений. В заключительной теореме 4.5 приведены условия существования функции Ляпунова в случае экспоненциальной

устойчивости невозмущенного движения на временной шкале. Этим иллюстрируется универсальность прямого метода Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале.

Заметим, что построение общей теории устойчивости динамических уравнений на временной шкале является одной из открытых проблем теории уравнений этого класса. Представляет несомненный интерес для приложений обобщение предложенных подходов для анализа колебательных систем [28, 29], а также гибридных систем [32], содержащих непрерывную и дискретную компоненты.

РЕЗЮМЕ. В статті досліджується стійкість динамічних рівнянь на часовій шкалі. Основними результатами є нові умови стійкості, рівномірної стійкості та рівномірної асимптотичної стійкості для квазілінійних та нелінійних систем.

SUMMARY. Stability of dynamic equations on time scales is considered in the paper/ The main results are new conditions of stability, uniform stability and uniform asymptotic stability for quasilinear and nonlinear systems.

Key words: dynamic equations on time scales, stability, uniform stability, asymptotic stability, nonlinear integral inequality, Liapunov functions.

1. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия. — 1888. — **1**. — С. 7–60.
2. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-серия. — 1889. — **2**, № 1–2. — С. 1–94.
3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. — Харьков: Харьк. матем. общ., 1892. — **XI**. — 250 с.
4. *Ляпунов А.М.* К вопросу об устойчивости движения. (Дополнение к сочинению “Общая задача об устойчивости движения”. — Харьков, 1892.) // Записки Харьк. университета. — 1893. — № 1. — С. 99–104.
5. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Матем. сборник. — 1893. — **XVII**, вып. 2. — С. 253–333.
6. *Ляпунов А.М.* О рядах, предложенных Хилл’ем для представления движения луны // Тр. Отд. физ. наук Общ. любит. естествознания (Москва). — 1896. — **VIII**, вып.1. — С. 1–23.
7. *Ляпунов А.М.* Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия. — 1896. — **V**, №№ 3–6. — С. 190–254.
8. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. — Ленинград: Изд-во Ленинград. ун-та., 1963. — 116 с.
9. *Ляпунов А.М.* Лекции по теоретической механике. — Киев: Наук. думка, 1982. — 632 с.
10. *Ляпунов Б.М.* Краткий очерк жизни и деятельности А.М. Ляпунова // А.М. Ляпунов. Лекции по теоретической механике. — Киев: Наукова думка, 1982. — С. 7–22.
11. *Смирнов В.И.* Очерк научных трудов А.М. Ляпунова // А.М. Ляпунов. Избранные труды / Ред. академик В.И.Смирнов. — М.: Изд-во АН СССР, 1948. — С. 341–450.
12. *Bohner M., Hering R.* Perturbations of dynamic equations // J. Difference Eqns Appl. — 2002. — **8**, N 4. — P. 295–305.
13. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. — Boston: Birkhäuser, 2001. — 358 pp.
14. *Bohner M., Peterson A.* Advances in Dynamic Equations on Time Scales. — Boston: Birkhäuser, 2003. — 348 pp.

15. *DaCunha J.J.* Lyapunov Stability and Floquet Theory for Nonautonomous Linear Dynamic Systems on Time Scales. — Waco, Texas, 2004. (Manuscript) — 102 p.
16. *Hilger S.* Analysis on measure chains: a unified approach to continuous and discrete calculus // Res. in Mathematics. — 1990. — **18**. — P. 18–56.
17. *Hilscher R.* Linear Hamiltonian systems on time scales: Transformations // Dynam. Systems Appl. — 1999. — **8**, N 3–4. — P. 489–501. In: Special Issue on “Discrete and Continuous Hamiltonian Systems”, edited by R.P. Agarwal and M. Bohner.
18. *Hoffacker J., and Tisdell C.C.* Stability and instability for dynamic equations on time scales // Computers and Mathematics with Applications. — 2005. — bf49, N 9–10. — P. 1327–1334.
19. *Kloeden P.E., Zmorzynska A.* Lyapunov functions for linear nonautonomous dynamical systems on time scales // Advances in Difference Equations. — 2006. — Article ID 69106. — P. 1–10.
20. *Liapunov A.M.* Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques // Comptes rendus de l’Acad. des sciences. Paris. — 1896. — **CXXIII**. — P. 1248–1252.
21. *Liapunov A.M.* Sur l’instabilité de l’équilibre dans certains cas où la fonction de forces n’est pas un maximum // Journ. de mathem. pures et appl., Paris. — 1897. — 5 series, **III**. — P. 81–94.
22. *Liapunov A.M.* Sur une équation différentielle linéaire du second ordre // Comptes rendus de l’Acad. des sciences. Paris. — 1899. — **CXXVIII**. — P. 910–913.
23. *Liapunov A.M.* Sur une équation transcendante et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques // Comptes rendus de l’Acad. des sciences. Paris. — 1899. — **CXXVIII**. — P. 1085–1088.
24. *Liapunov A.M.* Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques // Записки Акад. наук по Физ.-матем. отд. — 1902. — 8-я серия. **XIII**, N 2. — С. 1–70.
25. *Martynyuk A.A.* Stability by Liapunov Matrix Functions Method with Applications. — New York: Marcel Dekker, 1998. — 276 p.
26. *Martynyuk A.A.* Stability of Motion. The Role of Multicomponent Liapunov Functions. — London: Cambridge Scientific Publishers, 2007. — 300 p.
27. *Martynyuk A.A., Lakshmikantham V., Leela S.* Stability of Motion: Method of Integral Inequalities. — Kiev: Naukova Dumka, 1989. — 272 p. [Russian].
28. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* On oscillations of a frictional pendulum // Int. Appl. Mech. — 2006. — **42**, N 2. — P. 214–220.
29. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Complex behaviour of a trajectory in single- and double-frequency systems. — 2005. — **41**, N 3. — P. 315–323.
30. *Martynyuk-Chernienko Yu.A.* On the stability of dynamical systems on a time scale // Dokl. Acad. Nauk. — 2007. — **413**. — P. 1–5. [Russian].
31. *Oziraner A.S.* On the stability of motion by first approximation // Prikl. Math. and Mekh. — 1977. — **41**, № 3. — P. 413–421. [Russian].
32. *Slyn’ko V.I.* Practical stability conditions for a quasilinear hybrid system // Int. Appl. Mech. — 2005. — **41**, N 2. — P. 222–232.
33. *Stachurska B.* On a nonlinear integral inequality // Zeszyty Nauk. Uniw. Jagiello. Prace Mat. — 1971. — **15**. — P. 151–157.
34. *Yoshizawa T.* Stability Theory by Liapunov’s Second Method. — The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966. — 223 p.
35. *Zubov V.I.* Mathematical Investigation of Automatic Control Systems. — Leningrad: Mashinostroeniye, 1979. — 335 p. [Russian]

БОХНЕР МАРТИН

Уроженец Германии доктор Бохнер является профессором математики в университете Миссури-Ролла (США). Он получил степень бакалавра и магистра по математической экономике в университете Ульма (Германия) в 1989 г. и 1993 г., соответственно. Степень магистра по прикладной математике он получил в университете Сан-Диего (США) в 1992 г. Степень доктора по естественным наукам он получил в 1995 г. в университете Ульма. В 1995 г. доктор Бохнер был сотрудником университета Гугенхайма в Штудгарте. В 1997 г. он получил стипендию А.Гумбольдта и проводил исследования в Национальном университете в Сингапуре и в 1998 в университете Сан-Диего (США). Доктор Бохнер работал в университете Миссури-Ролла в 1998 г., в Технологическом университете во Флориде в 2001 г. и вновь вернулся в университет Миссури-Ролла в 2002 г.



Основными направлениями его научной деятельности являются: теория дифференциальных и разностных уравнений, Гамильтоновы системы, теория уравнений на временной шкале, проблемы собственных значений для оператора торных уравнений, теория колебаний. Его работы имеют приложения в инженерии, экономике, биологии и финансовом деле.

Профессор Бохнер автор четырех монографий и свыше 100 научных статей. Он является редактором трех международных журналов и членом редколлегии 15 международных математических журналов. Доктор Бохнер является вице-президентом Международного Общества по разностным уравнениям. Он имеет награды от университета Миссури-Ролла за научные работы и обучение.

МАРТЫНЮК АНАТОЛИЙ АНДРЕЕВИЧ

А.А.Мартынюк родился в Украине. В 1963 г. закончил Черкасский педагогический институт им. 300-летия воссоединения Украины с Россией. С 1964 г. – аспирант Института механики АН УССР (ныне Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины). В 1967 и 1973 гг. он защитил кандидатскую и докторскую диссертации в Институте математики АН УССР (ныне Институт математики НАН Украины) соответственно. С 1973 по 1978 г. работал в Институте математики НАН Украины. С 1978 г. работает в Институте механики им. С.П.Тимошенко заведующим отделом устойчивости процессов. Звание профессора присвоено в 1985 г. В 1988 г. избран членом-корреспондентом НАН Украины.



Основные научные результаты относятся к следующим научным направлениям: создание метода матрично-значных функций Ляпунова; теории устойчивости движения; нелинейная механика; устойчивость крупномасштабных систем; математическая биология.

Автор (соавтор) 315 научных работ, 20 монографий. Подготовил 2 доктора и 20 кандидатов наук. Лауреат премии им. Н.М.Крылова НАН Украины (1981). Редактор Международной серии научных монографий "Stability, Oscillations and Optimization of Systems" в издательстве Cambridge Scientific Publishers (Великобритания). Член редколлегии 5 Международных журналов. Член и заместитель председателя Национального комитета Украины по теоретической и прикладной механике (1993).

Ун-т Миссури-Ролла, Ролла (США)
Ин-т механики им. С.П. Тимошенко
НАН Украины, Киев (Украина)

Поступила 02.03.2007