SUR L'APPROXIMATION INTERNE DES DENDROÏDES PAR DES ARBRES

ROBERT CAUTY

Résumé. We prove that, for every dendroid X, every tree T_0 contained in X and every $\epsilon > 0$, there exists a tree T contained in X and containing T_0 and an ϵ-retraction of X onto T.

1. Introduction

Tous les espaces considérés dans cet article sont supposés métriques et munis d'une distance arbitraire, mais fixée, notée d. Un dendroïde est un continu connexe par arcs héréditairement unicohérent. Un arbre est un complexe simplicial connexe acyclique de dimension un (nous ne distinguons pas entre un complexe simplicial et sa réalisation géométrique). Si A est un sous-ensemble de X, une ϵ-rétraction de X sur A est une rétraction r de X sur A telle que $d(x, r(x)) < \epsilon$ pour tout x dans X. Le but de cet article est de prouver le théorème suivant.

Théorème 1. *Soient X un dendroïde et T_0 un arbre contenu dans X. Pour tout $\epsilon > 0$, il y a un arbre T contenu dans X et contenant T_0 et une ϵ-rétraction de X sur T.*

Ce théorème résout un problème de Fugate ([7], p. 261), qui en avait démontré deux cas particuliers dans [6] et [7], et a de nombreuses applications. Nous montrerons dans la dernière section qu'il implique que tout dendroïde est limite d'une suite projective formée d'arbres et de rétractions. Mentionnons en ici trois applications simples.

Pour tout continu X, notons 2^X l'hyperespace de tous les fermés non vides de X, et $C(X)$ l'hyperespace des sous-continus de X, tous deux munis de la topologie de Vietoris. Si p est un point de X, $C(\{p\}, X)$ est le sous-ensemble de $C(X)$ formé des continus contenant p.

Corollaire 1. *Si X est un dendroïde, 2^X et $C(X)$ ont la propriété du point fixe.*

Corollaire 2. *Tout produit de dendroïdes a la propriété du point fixe.*

Le corollaire 1 résout une partie des questions (7.8.1) et (7.10) de [10] ; pour sa démonstration, voir pages 297-298 de [10]. Pour la démonstration du corollaire 2 et quelques compléments, le lecteur pourra consulter [5].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54F50, 54C15.

Key words and phrases. dendroid,retraction,tree.

Le corollaire suivant complète un résultat de C. Eberhart ([4], théorème 8).

Corollaire 3. *Soient X un dendroïde et p un point de X. Alors $C(\{p\}, X)$ est un cube de Hilbert si, et seulement si, p n'a aucun voisinage fermé U tel que la composante de U qui contient p soit un arbre.*

Démonstration. Si la composante D de U contenant p est un arbre, alors $C(\{p\}, D)$ est un voisinage de dimension finie de $\{p\}$ dans $C(\{p\}, X)$, donc $C(\{p\}, X)$ ne peut être un cube de Hilbert. Si p n'a pas de tel voisinage, le théorème 6 de [4] s'applique pour montrer que $C(\{p\}, X)$ est homéomorphe au cube de Hilbert puisqu'alors, si T est un arbre contenant p, $C(\{p\}, T)$ ne peut être un voisinage de $\{p\}$ dans $C(\{p\}, X)$. □

Si $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est une famille de sous-ensembles de X, nous noterons $N(\mathcal{F})$ son nerf. Les sommets de $N(\mathcal{F})$ seront identifiés à des éléments de Λ et nous noterons $\langle \lambda, \lambda' \rangle$ le simplexe de sommets λ et λ'. Nous dirons que λ et λ' sont adjacents s'ils déterminent un 1-simplexe. Si $\mathcal{G} = \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est une famille d'ensembles indexée par le même ensemble d'indices que $\mathcal{F}$ et telle que $G_\lambda \subset F_\lambda$ pour tout λ, nous dirons que $N(\mathcal{G})$ et $N(\mathcal{F})$ sont naturellement isomorphes si l'injection canonique évidente de $N(\mathcal{G})$ dans $N(\mathcal{F})$ est un isomorphisme. Si Y est un sous-ensemble de X, nous noterons $\mathcal{F}|Y$ la famille des sous-ensembles $\{F_\lambda \cap Y \mid \lambda \in \Lambda\}$ de Y.

Si A est un sous-ensemble de X et $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de sous-ensembles de X, nous noterons $\mathrm{St}(A, \mathcal{F})$ la réunion des éléments de $\mathcal{F}$ qui rencontrent A. La famille $\{\mathrm{St}(F_\lambda, \mathcal{F}) \mid \lambda \in \Lambda\}$ sera notée $\mathrm{St}(\mathcal{F})$.

Si Y est un sous-ensemble de X et $\mathcal{F}$ un recouvrement de X, une $\mathcal{F}$-rétraction de X sur Y est une rétraction r telle que, pour tout x dans X, il y ait un élément de $\mathcal{F}$ contenant à la fois x et $r(x)$.

Rappelons qu'un dendroïde X est dit colocalement connexe en un point x si tout voisinage de x contient un voisinage V de x tel que $X \setminus V$ soit connexe. J. Krasinkiewicz et P. Minc ont prouvé ([8], théorèmes 3.5 et 4.1) que le plus petit sous-ensemble connexe par arcs de X contenant l'ensemble des points en lesquels X est colocalement connexe est dense dans X. Ce résultat jouera un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 1.

Si a et b sont deux points d'un dendroïde X, nous noterons $[a, b]$ l'unique arc (dégénéré si $a = b$) d'extrémités a et b contenu dans X.

2. Réduction de la démonstration du théorème

Soit $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille finie de fermés d'un dendroïde X dont le nerf est un arbre. Nous dirons qu'un arbre T contenu dans la réunion de $\mathcal{F}$ est *convenablement placé* dans $\mathcal{F}$ s'il est possible de choisir, pour tout λ dans Λ, une composante connexe C_λ de $T \cap F_\lambda$ de façon que $T = \bigcup_\lambda C_\lambda$. Le nerf de la famille $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est alors un sous-complexe connexe de l'arbre $N(\mathcal{F})$ contenant tous les sommets de $N(\mathcal{F})$, donc est naturellemnt isomorphe à $N(\mathcal{F})$. Quand nous fixerons de telles composantes C_λ, nous appellerons C_λ la composante distinguée de $T \cap F_\lambda$.

Le point de départ de notre démonstration est la remarque élémentaire suivante.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ un recouvrement fermé fini d'un dendroïde X dont le nerf est un arbre. Soit T un arbre contenu dans X. Si T est convenablement placé dans $\mathcal{F}$, il existe une* $\mathrm{St}(\mathcal{F})$*-rétraction de X sur T.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C} = \{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ comme dans la définition ci-dessus. Si $\sigma = \langle \lambda, \lambda' \rangle$ est un 1-simplexe de $N(\mathcal{F})$, $C_\lambda \cap C_{\lambda'}$ n'est pas vide, donc $C_\lambda \cup C_{\lambda'}$ est un sous-ensemble fermé connexe de T, donc un arbre, et par suite un rétracte absolu. De plus, $C_\lambda \cup C_{\lambda'}$ contient $F_\lambda \cap F_{\lambda'} \cap T$. En effet, si x est un point de $F_\lambda \cap F_{\lambda'} \cap T$, il existe un μ dans Λ tel que C_μ contienne x ; alors x appartient à F_μ, donc $\mu = \lambda$ ou λ' puisque $N(\mathcal{F})$ est de dimension un. Nous pouvons donc trouver une fonction continue $r_\sigma : F_\lambda \cap F_{\lambda'} \to C_\lambda \cup C_{\lambda'}$ telle que $r_\sigma(x) = x$ si x est dans $F_\lambda \cap F_{\lambda'} \cap T$.

Pour tout λ dans Λ, l'ensemble $\mathrm{St}(C_\lambda, \mathcal{C})$ est un fermé connexe de T, donc un rétracte absolu et, si $\sigma = \langle \lambda, \lambda' \rangle$ est un 1-simplexe de $N(\mathcal{F})$, $r_\sigma(F_\lambda \cap F_{\lambda'})$ est contenu dans $\mathrm{St}(C_\lambda, \mathcal{C})$. Nous pouvons donc trouver une fonction continue $r_\lambda : F_\lambda \to \mathrm{St}(C_\lambda, \mathcal{C})$ telle que $r_\lambda(x) = x$ si $x \in F_\lambda \cap T$ et $r_\lambda(x) = r_\sigma(x)$ si $x \in F_\lambda \cap F_{\lambda'}$, $\sigma = \langle \lambda, \lambda' \rangle$.

Il est facile de vérifier que la fonction $r : X \to T$ définie par $r(x) = r_\lambda(x)$ si x appartient à F_λ est déterminée sans ambiguïté et est une $\mathrm{St}(\mathcal{F})$-rétraction de X sur T. □

Soit $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ un recouvrement fermé fini d'un dendroïde X. Un recouvrement fermé fini $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$ de X est appelé un raffinement spécial de $\mathcal{F}$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $N(\mathcal{G})$ est un arbre.

(ii) Il existe une fonction $\pi : M \to \Lambda$ telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $\mu \in \pi^{-1}(\lambda)$, G_μ soit réunion de composantes de F_λ.

Quand il sera utile de fixer la fonction π vérifiant la condition (ii) de cette définition, nous parlerons du raffinement spécial $(\mathcal{G}, \pi)$ de $\mathcal{F}$.

Lemme 2. *Soient X un dendroïde, T_0 un arbre contenu dans X et $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ un recouvrement fermé fini de X vérifiant*

(*i*) *$N(\mathcal{F})$ est un arbre,*

(*ii*) *les intérieurs des ensembles F_λ recouvrent X.*

Alors, il existe un raffinement spécial $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ et un arbre T contenu dans X et contenant T_0 qui est convenablement placé dans $\mathcal{G}$.

La démonstration de ce lemme tient la majeure partie de cet article. Montrons d'abord que le théorème résulte des lemmes 1 et 2. En effet, d'après H. Cook [3], X a un recouvrement ouvert fini $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ dont le nerf est un arbre et tel que le diamètre de chaque U_λ soit inférieur à $\epsilon/3$. Nous pouvons trouver, pour tout λ dans Λ un fermé F_λ contenu dans U_λ de façon que les intérieurs des F_λ recouvrent encore X. Le lemme 2 nous donne alors un raffinement spécial $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ et un arbre T contenu dans X et contenant T_0 qui est convenablement placé dans $\mathcal{G}$. D'après le lemme 1, il y a une $\mathrm{St}(\mathcal{G})$-rétraction r de X sur T. Puisque tout élément de $\mathcal{G}$ a un diamètre inférieur à $\epsilon/3$, r est aussi une ϵ-rétraction.

3. Début de la démonstration du lemme 2

Fixons un dendroïde X et un recouvrement fermé fini $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ vérifiant les hypothèses du lemme 2. Prenons, pour tout $\lambda \in \Lambda$, des ouverts U_λ et U'_λ contenus dans F_λ de façon que $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ et $\overline{U}_\lambda \subset U'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Si $\widetilde{T}$ est un arbre contenu dans X, considérons la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T})$ suivante, définie pour tout sous-continu Y de X contenant $\widetilde{T}$.

$\mathcal{P}(\widetilde{T})$ Il existe un raffinement spécial $(\mathcal{G}, \pi)$ de $\mathcal{F}|Y$, où $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$, et un arbre T contenu dans Y et contenant $\widetilde{T}$ vérifiant
- (I) T est convenablement placé dans $\mathcal{G}$,
- (II) $Y = \bigcup_{\mu\in M} G_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$,

Remarque 1. Lorsqu'il existe, nous pouvons supposer que ce raffinement spécial $(\mathcal{G}, \pi)$ a la propriété que, pour tout $\mu \in M$, G_μ est ouvert et fermé dans $Y \cap F_{\pi(\mu)}$. En effet, puisque G_μ est réunion de composantes de $Y \cap F_{\pi(\mu)}$, il existe une suite décroissante $\{G^n_\mu\}_{n=1}^\infty$ de sous-ensembles ouverts et fermés de $Y \cap F_{\pi(\mu)}$ telle que $G_\mu = \bigcap_{n=1}^\infty G^n_\mu$. Soit $\mathcal{G}_n = \{G^n_\mu \mid \mu \in M\}$. Si n est assez grand, $N(\mathcal{G}_n)$ est naturellement isomorphe à $N(\mathcal{G})$. Si les C_μ sont des composantes des $T \cap G_\mu$ telles $T = \bigcup_{\mu\in M} C_\mu$ alors C_μ est aussi une composante de $T \cap G^n_\mu$, donc T est convenablement placé dans $\mathcal{G}_n$.

Pour prouver le lemme 2, il suffit de montrer que X a la propriété $\mathcal{P}(T_0)$. Le lemme suivant permettra de simplifier cette tâche.

Lemme 3. *Soit $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ une suite décroissante de sous-continus de X contenant un arbre $\widetilde{T}$, et soit $Y = \bigcap_{n=1}^\infty Y_n$. Si Y a la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T})$, il y a un entier N tel que Y_n ait la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T})$ pour tout $n \geq N$.*

Démonstration. Soient $(\mathcal{G}, \pi)$, où $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$ un raffinement spécial de $\mathcal{F}|Y$ et T un arbre contenu dans Y et contenant $\widetilde{T}$ vérifiant les conditions (I) et (II). Comme nous l'avons remarqué, nous pouvons supposer que, pour tout $\mu \in M$, G_μ est ouvert et fermé dans $Y \cap F_{\pi(\mu)}$. Pour $\mu \in M$ et $\epsilon > 0$, posons $D(G_\mu, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, G_\mu) \leq \epsilon\}$. Si ϵ est assez petit, la famille $\mathcal{D}(\epsilon) = \{D(G_\mu, \epsilon) \mid \mu \in M\}$ vérifie

(1) $N(\mathcal{D}(\epsilon))$ est naturellement isomorphe à $N(\mathcal{G})$.

Puisque G_μ est ouvert et fermé dans $Y \cap F_{\pi(\mu)}$, si ϵ est assez petit, nous avons aussi

(2) $G_\mu = D(G_\mu, \epsilon) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)}$ pour tout $\mu \in M$.

Fixons ϵ vérifiant (1) et (2). L'ensemble $V = \bigcup_{\mu \in M} D(G_\mu, \epsilon)$ est un voisinage de Y dans X, donc il existe N_0 tel que $Y_n \subset V$ pour $n > N_0$. Pour $n > N_0$ et $\mu \in M$, posons $G_\mu^n = F_{\pi(\mu)} \cap Y_n \cap D(G_\mu, \epsilon)$. D'après (2), G_μ^n contient G_μ, donc il résulte de (1) que le nerf de la famille $\mathcal{G}_n = \{G_\mu^n \mid \mu \in M\}$ est naturellement isomorphe à $N(\mathcal{G})$.

Il existe $N_1 > N_0$ tel que si $n > N_1$, alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $\mu \in \pi^{-1}(\lambda)$, G_μ^n est réunion de composantes de $F_\lambda \cap Y_n$. En effet, supposons le contraire. Il existe alors $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \pi^{-1}(\lambda)$, une suite strictement croissante $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ d'entiers et, pour tout i, une composante K_i de $F_\lambda \cap Y_{n_i}$ qui rencontre $G_\mu^{n_i}$ mais n'est pas contenue dedans. Alors K_i rencontre la frontière de $D(G_\mu, \epsilon)$. Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{K_i\}$ converge vers un sous-ensemble connexe K de X. Nécessairement, K est contenu dans $Y \cap F_\lambda$ et rencontre la frontière de $D(G_\mu, \epsilon)$, ce qui est impossible car $D(G_\mu, \epsilon) \cap F_\lambda \cap Y = G_\mu$ est contenu dans l'intérieur de $D(G_\mu, \epsilon)$. Si $n > N_1$, $(\mathcal{G}_n, \pi)$ est donc un raffinement spécial de $\mathcal{F}|Y$.

La condition (I) étant vérifiées, nous pouvons trouver, pour tout $\mu \in M$, une composante C_μ de $T \cap G_\mu$ de façon que $T = \bigcup_{\mu \in M} C_\mu$. Si, pour $n > N_1$, C_μ^n est la composante de $T \cap G_\mu^n$ qui contient C_μ, alors $T = \bigcup_{\mu \in M} C_\mu^n$, donc T est convenablement placé dans $\mathcal{G}_n$.

Pour achever la démonstration du lemme 3, il reste à montrer que si $n > N_2$ est assez grand, alors $Y_n = \bigcup_{\mu \in M} G_\mu^n \cap U_{\pi(\mu)}$. Dans le cas contraire, il existerait une suite strictement croissante $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ d'entiers et, pour tout i, un point y_i appartenant à $Y_{n_i} \setminus \bigcup_{\mu \in M} G_\mu^{n_i} \cap Y_{\pi(\mu)}$ Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{y_i\}$ converge vers un point y de Y. Il existe μ tel que $y \in G_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$. Alors $U_{\pi(\mu)} \cap D(G_\mu, \epsilon)$ est un voisinage de y contenu dans $F_{\pi(\mu)}$, donc, pour tout i assez grand, y_i appartient à $Y_{n_i} \cap U_{\pi(\mu)} \cap D(G_\mu, \epsilon) = U_{\pi(\mu)} \cap G_\mu^{n_i}$, ce qui est contradictoire. □

Le lemme 3 implique (voir [9], §38, V.2) que, si $\widetilde{T}$ est un arbre contenu dans X et X' un sous-continu de X contenant $\widetilde{T}$ mais n'ayant pas la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T})$, alors X' contient un sous-continu $\widetilde{X}$ contenant $\widetilde{T}$, n'ayant pas la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T})$ mais tel que tout sous-continu propre de $\widetilde{X}$ contenant $\widetilde{T}$ a cette propriété. Il nous faut étudier de façon détaillée ces continus $\widetilde{X}$.

$\widetilde{X}$ n'est pas un arbre. En effet, si $\widetilde{X}$ est un arbre, il est localement connexe, donc peut être recouvert par un nombre fini de composantes des ouverts $U_\lambda \cap \widetilde{X}$. Nous pouvons donc trouver une famille finie de sous-ensembles $J_1, \dots, J_\ell$, où chaque J_i est une composante d'un $F_{\lambda_i} \cap \widetilde{X}$, vérifiant $\widetilde{X} = \bigcup_{i=1}^\ell J_i \cap U_{\lambda_i}$. Choisissons cette famille de façon que ℓ soit minimal. Alors $J_i \neq J_j$ pour $i \neq j$, et $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_\ell\}$ est un raffinement spécial de $\mathcal{F}|\widetilde{X}$. En effet, il suffit pour le voir de constater que $N(\mathcal{J})$ est un arbre. Si i_1, i_2, i_3 sont trois éléments distincts de $\{1, \dots, \ell\}$, alors ou bien λ_{i_1}, λ_{i_2} et λ_{i_3} sont distincts, ou bien deux des ensembles J_{i_1}, J_{i_2} et J_{i_3} sont des composantes distinctes d'un même $F_\lambda \cap \widetilde{X}$; dans les deux cas, $J_{i_1} \cap J_{i_2} \cap J_{i_3} = \emptyset$, donc $N(\mathcal{J})$ est de dimension un. Si $N(\mathcal{J})$ n'est pas un arbre, il existe des éléments distincts $J_{i_0}, \ldots, J_{i_n}$ $(n > 1)$ tels que, pour $j \neq k$, $J_{i_j} \cap J_{i_k} \neq \emptyset$ si, et seulement si, $j-k \equiv \pm 1 \bmod n$. Alors J_{i_n} et $J_{i_0} \cup \cdots \cup J_{i_{n-1}}$ sont des continus dont l'intersection est réunion des fermés disjoints $J_{i_0} \cap J_{i_n}$ et $J_{i_{n-1}} \cap J_{i_n}$, ce qui contredit l'unicohérnce héréditaire de X. Posant $T = \widetilde{X}$ et $C_i = J_i$ pour $1 \leq i \leq \ell$, on constate que T est convenablement placé dans $\mathcal{J}$, donc $\widetilde{X}$ a la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T})$, contrairement à notre hypothèse.

Puisque $\widetilde{X}$ n'est pas un arbre, le résultat de Krasinkiewicz et Minc cité plus haut montre que l'ensemble $\widetilde{E}$ des points de $\widetilde{X} \setminus \widetilde{T}$ en lesquels $\widetilde{X}$ est colocalement connexe est infini. Soit $e \in \widetilde{E}$. Prenons un voisinage ouvert V de e disjoint de $\widetilde{T}$ et vérifiant

(3) $V \cap F_\lambda = \emptyset$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $e \notin F_\lambda$,

(4) $\overline{V} \subset U_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $e \in U_\lambda$,

(5) $Y = \widetilde{X} \setminus V$ est connexe.

Les hypothèses du lemme 2 garantissent que e appartient à au plus deux des F_λ et à au moins un des U_λ, donc deux cas sont possibles :

Premier cas : e n'appartient à aucun des ensembles $F_\lambda \setminus U_\lambda$.

Deuxième cas : il existe λ^+, λ^- dans Λ tels que $e \in U_{\lambda^+} \cap (F_{\lambda^-} \setminus U_{\lambda^-})$ (et $e \notin F_\lambda$ si $\lambda^+ \neq \lambda \neq \lambda^-$).

D'après (5), Y est un sous-continu propre de X contenant $\widetilde{T}$, donc il a la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T})$. Nous pouvons donc trouver un raffinement spécial $(\mathcal{G}, \pi)$ de $\mathcal{F}|Y$, où $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$, et un arbre T contenu dans Y et contenant T_0 vérifiant les conditions (I) et (II).

Pour $\mu \in M$, soit G'_μ la réunion des composantes de $F_{\pi(\mu)}$ qui rencontrent G_μ ; c'est un fermé vérifiant $G'_\mu \cap Y = G_\mu$. En effet, l'inclusion $G_\mu \subset G'_\mu$ est triviale, et si K est une composante de $F_{\pi(\mu)}$ rencontrant G_μ, alors $K \cap Y$ est un sous-continu de $F_{\pi(\mu)}$ rencontrant G_μ, donc est contenu dans G_μ puisque G_μ est réunion de composantes de $Y \cap F_{\pi(\mu)}$. Le nerf de la famille $\mathcal{G}' = \{G'_\mu \mid \mu \in M\}$ est naturellement isomorphe à $N(\mathcal{G})$. Il suffit pour le voir de vérifier que si $\bigcap_{i=1}^r G'_{\mu_i} \neq \emptyset$, alors $\bigcap_{i=1}^r G_{\mu_i} \neq \emptyset$. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^r G'_{\mu_i}$. Si x appartient à Y, il appartient à $\bigcap_{i=1}^r G'_{\mu_i} \cap Y = \bigcap_{i=1}^r G_{\mu_i}$. Si x appartient à V, la composante K_i de $F_{\pi(\mu_i)}$ qui contient x rencontre $G_{\mu_i} \subset Y$, donc contient l'arc $[x, y]$ irréductible entre x et Y ; alors y appartient à $Y \cap \bigcap_{i=1}^r K_i \subset Y \cap \bigcap_{i=1}^r G'_{\mu_i} = \bigcap_{i=1}^r G_{\mu_i}$.

Pour tout $\mu \in M$, nous pouvons choisir une composante C_μ de $T \cap G_\mu$ de façon que $T = \bigcup_{\mu \in M} C_\mu$. Comme $G'_\mu \cap T = G'_\mu \cap Y \cap T = G_\mu \cap T$, C_μ est aussi une composante de $G'_\mu \cap T$. Si $\bigcup_{\mu \in M} G'_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$ contient V, alors cette réunion est égale à $\widetilde{X}$ et $\mathcal{G}'$ est un raffinement spécial de $\mathcal{F}$ qui, avec l'arbre T, vérifie les conditions (I) et (II), donc $\widetilde{X}$ a la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T})$, ce qui contredit le choix de $\widetilde{X}$.

Dans le premier cas , l'inclusion $V \subset \bigcup_{\mu \in M} G'_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$ est automatiquement vérifiée. En effet, soit $x \in V$, et soit $[x, y]$ l'arc irréductible entre x et Y. Il existe $\mu \in M$ tel que $y \in G_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$. D'après (3), e appartient à $F_{\pi(\mu)}$, donc à $U_{\pi(\mu)}$, et $\overline{V}$ est contenu dans $U_{\pi(\mu)}$ d'après (4). Par définition de G'_μ, $[x, y]$ est contenu dans G'_μ, donc x appartient à $G'_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$.

Le premier cas est donc impossible. Dans le deuxième cas, les remarques suivantes nous seront utiles.

Remarque 2.(a) Si x apartient à $V \setminus \bigcup_{\mu \in M} G'_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$ et si L_x^+ est la composante de $F_{\lambda^+} \cap \widetilde{X}$ contenant x, alors $L_x^+ \setminus V$ est contenu dans U_{λ^-}. En effet, dans le cas contraire, comme $\overline{V} \cap F_\lambda = \emptyset$ pour $\lambda \neq \lambda^+, \lambda^-$, le continu $(\widetilde{X} \setminus V) \cap L_x^+$ contiendrait un point $y \notin \bigcup_{\lambda \neq \lambda^+} U_\lambda$. Il existe $\mu \in M$ tel que $y \in G_\mu \cap U_{\pi(\lambda)}$; nécesairement, $\pi(\mu) = \lambda^+$, donc L_x^+ est contenu dans G'_μ et x appartient à $G'_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$, ce qui est contradictoire.

(b) $\overline{V}$ est contenu dans $\overline{U}_{\lambda^-}$, donc, si $x \in V \setminus \bigcup_{\mu \in M} G'_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$, alors L_x^+ est contenu dans F_{λ^-}. En effet, si $\overline{V}$ n'est pas contenu dans $\overline{U}_{\lambda^-}$, alors l'ouvert $W = V \setminus \overline{U}_{\lambda^-}$ n'est pas vide. D'après le résultat cité de Krasinkiewicz et Minc, il existe des points e_1, e_2 en lesquels $\widetilde{X}$ est colocalement connexe et tels que $[e_1, e_2] \cap W \neq \emptyset$. Puisque $[e_1, e_2] \setminus V$ est connexe, l'un des points e_1 et e_2, par exemple e_1, appartient à V. Si $[e_1, e_2] \setminus V \neq \emptyset$, alors l'arc irréductible entre e_1 et $\widetilde{X} \setminus V$ rencontre W. Si $[e_1, e_2]$ est contenu dans V, et si $[z, q]$, $z \in [e_1, e_2]$, est l'arc irréductible entre $[e_1, e_2]$ et $\widetilde{X} \setminus V$, alors, pour $i = 1, 2$, l'arc irréductible entre e_i et $\widetilde{X} \setminus V$ est $[e_i, z] \cup [z, q]$. Comme l'un au moins des arcs $[e_1, z]$ et $[e_2, z]$ rencontre W, nous pouvons, dans tous les cas, trouver $e_1 \in \widetilde{E} \cap V$ tel que l'arc irréductible entre e_1 et $\widetilde{X} \setminus V$ rencontre W. Le premier cas étant impossible, le choix de V garantit que $e_1 \in U_{\lambda^+} \cap (F_{\lambda^-} \setminus U_{\lambda^-})$. Soit W_1 un ouvert tel que $e_1 \notin \overline{W}_1$, $\overline{W}_1 \subset W$ et $[e_1, q] \cap W_1 \neq \emptyset$. Pour tout point x assez proche de e_1, l'arc irréductible entre x et $\widetilde{X} \setminus V$ rencontre W_1, donc nous pouvons trouver un voisinage assez petit V_1 de e_1 contenu dans V, disjoint de $\overline{W}_1$, tel que $\widetilde{X} \setminus V_1$ soit connexe et que, pour tout $x \in V_1$, $\emptyset \neq L_x^+ \cap W_1 \subset \overline{X} \setminus V_1$, mais ceci, d'après (a) appliqué en remplaçant V par V_1, entraîne la contradiction que $\widetilde{X}$ a la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T})$.

(c) Si $x \in V \setminus \bigcup_{\mu \in M} G'_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$ et si $\mu \in \pi^{-1}(\lambda^-)$ est l'élément tel que $L_x^+ \setminus V \subset G_\mu$, alors G'_μ contient L_x^+, donc $\mathcal{G}'$ recouvre $\widetilde{X}$.

Remarque 3. Nous pouvons, en raisonnant comme dans la remarque 1, trouver des ensembles G''_μ, ouverts et fermés dans $\widetilde{X} \cap F_{\pi(\mu)}$ tels que $G'_\mu \subset G''_\mu$ pour tout μ et que, si $\mathcal{G}'' = \{G''_\mu \mid \mu \in M\}$, alors $N(\mathcal{G}'')$ est naturellement isomorphe à $N(\mathcal{G}')$. Comme G''_μ est ouvert dans $F_{\pi(\mu)} \cap \widetilde{X}$, $G''_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$ est ouvert dans $\widetilde{X}$, donc $\bigcup_{\mu \in M} G''_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$ est un ouvert de $\widetilde{X}$ contenant Y.

La fin de la démonstration nécessite un long détour, et sera donnée à la section 5 après quelques préliminaires.

4. Résultats auxiliaires

Soient X^* un sous-continu de X et T^* un arbre contenu dans X^* et distinct de X^*. Pour tout $x \in X^*$, soit $[x, q(x)]$ l'arc irréductible (éventuellement dégénéré) entre x et T^*. Puisque les ouverts U_λ recouvrent X, l'arc $[x, q(x)]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles dont chacun est une composante de l'un des ensembles $U_\lambda \cap [x, q(x)]$. Cela nous permet de trouver une suite finie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ d'éléments de Λ (pas nécessairement distincts) et, pour $1 \leq i \leq m$, une composante L_i de $F_{\lambda_i} \cap X^*$ vérifiant les conditions suivantes :

(6) $x \in L_1$

(7) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i < m$,

(8) $q(x) \in L_m$.

Soit $m(x, T^*)$ le plus petit entier m pour lequel il existe des indices $\lambda_i \in \Lambda$ et des composantes L_i des F_{λ_i} vérifiant les conditions (6)-(8).

Lemme 4. *Si $m = m(x, T^*) > 1$, alors les suites $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ et $\{L_i\}_{i=1}^m$ vérifiant les conditions (6)-(8) sont uniques.*

Démonstration. La minimalité de m garantit que $L_i \neq L_j$ si $i \neq j$. Si $k+1 < j$, alors $L_k \cap L_j = \emptyset$ car sinon la suite des (L_i, λ_i) peut être raccourcie en éliminant les termes d'indices compris strictement entre k et j. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des couples (L, λ) où $\lambda \in \Lambda$ et L est une composante de $F_\lambda \cap X^*$ telle que $[x, q(x)] \cap \left(L_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda' \neq \lambda} F_{\lambda'}\right) \neq \emptyset$. Il suffit de montrer que $\mathcal{K}$ est l'ensemble des (L_i, λ_i), $1 \leq i \leq m$, car (7) et le fait que $L_i \cap L_j = \emptyset$ si $|i - j| > 1$ déterminent alors la numérotation de ces couples.

L'ensemble $C = L_1 \cup \cdots \cup L_m$ est un continu contenant x et $q(x)$, donc il contient l'arc $[x, q(x)]$. Si (L, λ) appartient à $\mathcal{K}$, alors il existe i tel que $(L, \lambda) = (L_i, \lambda_i)$ car sinon C ne pourrait contenir l'arc $[x, q(x)]$. Soit $1 < i < m$. Les ensembles $A_i = \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j$ et $B_j = \bigcup_{j=i+1}^{m} L_j$ sont des fermés disjoints de C contenant x et $q(x)$ respectivement, donc $L_i \cap [x, q(x)]$ contient un arc $[a_i, b_i]$ irréductible entre A_i et B_i ($a_i \in A_i$). Nécessairement, $a_i \in L_{i-1} \subset F_{\lambda_{i-1}}$ et $b_i \in L_{i+1} \subset F_{\lambda_{i+1}}$. Ou bien $\lambda_{i-1} \neq \lambda_{i+1}$, ou bien L_{i-1} et L_{i+1} sont des composantes distinctes de $F_{\lambda_{i-1}} \cap X^*$; dans les deux cas, le fait que $N(\mathcal{F})$ est de dimension un entraîne que $[a_i, b_i]$ contient un point de $L_i \setminus \bigcup_{\lambda \neq \lambda_i} F_\lambda$, donc (L_i, λ_i) appartient à $\mathcal{K}$. Si $i = 0$, le fait que x n'appartient pas à L_2 garantit que $[x, q(x)] \cap L_1$ contient un point n'appartenant pas à $\bigcup_{\lambda \neq \lambda_1} F_\lambda$, et un argument analogue s'applique pour $i = m$ puisque $q(x)$ n'appartient pas à L_{m-1}. □

Si $m(x, T^*) > 1$ nous noterons λ_i^x et L_i^x les éléments dont l'unicité vient d'être démontrée ($1 \leq i \leq m(x, T^*)$). Si $m(x, T^*) = 1$, nous fixerons un élément $\lambda_1^x \in \Lambda$ tel qu'il existe une composante L_1^x de $F_{\lambda_1^x} \cap X^*$ contenant x et $q(x)$ (il y a au plus deux choix possibles pour (λ_1^x, L_1^x)).

Pour $n \geq 1$, posons $R_n = \{x \in X^* \mid m(x, T^*) = n\}$ et $S_n = \bigcup_{r=1}^n R_r$.

Lemme 5. *Pour tout $n \geq 1$, S_n est fermé dans X^*.*

Démonstration. Soit $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ une suite de points de S_n convergeant vers un point x. Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer qu'il existe $r \leq n$ tel que $m(x_j, T^*) = r$ pour tout j et que les $\lambda_i^{x_j}$ ne dépendent pas de j ; posons $\lambda_i = \lambda_i^{x_j}$ $(j \geq 1)$. Nous pouvons supposer que, pour $1 \leq i \leq r$, $\{L_i^{x_j}\}$ converge vers un sous-continu K_i, nécessairement contenu dans F_{λ_i} ; soit L_i la composante de $F_{\lambda_i} \cap X^*$ qui contient K_i. Puisque x_j appartient à $L_1^{x_j}$, x appartient à $K_1 \subset L_1$. Puisque $L_i^{x_j} \cap L_{i+1}^{x_j} \neq \emptyset$ pour tout j, nous avons $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$, donc $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ pour $i < r$. Puisque $L_r^{x_j} \cap T^* \neq \emptyset$ pour tout j, nous avons $L_r \cap T^* \neq \emptyset$, donc le continu $L_1 \cup \cdots \cup L_r$ contient $[x, q(x)]$. Si $s \leq r$ est le premier indice tel que $q(x) \in L_s$, alors la suite $(L_1, \lambda_1), \ldots, (L_s, \lambda_s)$ vérifie les conditions (6)-(8), donc $m(x, T^*) \leq s \leq n$. $\square$

Remarque 4. La démonstration précédente montre que, si $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ est une suite de points de R_n convergeant vers un point $x \in R_n$, alors elle a une sous-suite $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ telle que $\lambda_i^{x_k} = \lambda_i^x$ pour tout $i \leq n$ et tout $k \geq 1$, et que la suite $\{L_i^{x_k}\}$ converge vers un sous-continu de L_i^x pour tout $i \leq n$.

Soit E^* l'ensemble des points en lesquels X^* est colocalement connexe. Le fait suivant jouera un rôle très important.

Lemme 6. *Il existe un point $e \in X^* \setminus T^*$, un voisinage V de e dans X^* et un entier $m > 0$ vérifiant*

(i) e appartient à E^*,

(ii) $m(x, T^*) = m$ pour tout $x \in \overline{V}$,

(iii) pour tout $i \leq m$, λ_i^x ne dépend pas du point $x \in \overline{V}$,

(iv) ou bien $L_m^x = L_m^e$ pour tout $x \in \overline{V}$, ou bien il existe $\lambda_\# \neq \lambda_m^e$ et une composante $C_\#$ de $T^* \cap F_{\lambda_\#}$ tels que $L_m^x \cap T^* \subset C_\# \cap U_{\lambda_\#}$ pour tout $x \in \overline{V}$.

Démonstration. Soit $e_0 \in E^* \setminus T^*$, et soit $V_0 \subset X^* \setminus T^*$ un voisinage ouvert de e_0 dans X^* tel que $X^* \setminus V_0$ soit connexe. Posant $m_0 = \sup\{m(x, T^*) \mid x \in V_0\}$, nous avons

$$m_0 = \sup\{m(x, T^*) \mid x \in V_0 \cap E^*\}. \tag{9}$$

En effet, d'après le résultat de Krasinkiewicz et Minc [8] déja mentionné, si x est un point de V_0, il est limite d'une suite $\{x_i\}$ où, pour tout i, x_i appartient à un arc $[e_i^+, e_i^-]$ dont les extrémités sont des points en lesquels X^* est colocalement connexe. Nous pouvons supposer que les x_i appartiennent à l'ouvert V_0 ; comme $[e_i^+, e_i^-] \setminus V_0$ est connexe, l'un des arcs $[e_i^+, x_i]$ et $[e_i^-, x_i]$ est contenu dans V_0, et x_i appartient alors à l'arc irréductible entre l'un des points $e_i^\pm$ appartenant à V_0 et T^*, donc $m(x_i) \leq m(e_i^\pm)$, et le lemme 5 entraîne que

$$m(x,T^*) \le \liminf m(x_i,T^*) \le \liminf m(e_i^{\pm},T^*),$$

d'où (9). Si $m_0 < \infty$, prenons un point $e' \in V_0 \cap E^*$ tel que $m(e',T^*) = m_0$. Le lemme 5 nous permet de trouver un voisinage V' de e' tel que $V' \subset V_0$ et que $m(x,T^*) = m_0$ pour tout $x \in V'$.

Si $m_0 = \infty$, prenons $e_1 \in V_0 \cap E_0$ tel que $m(e_1,T^*) > m(e_0,T^*)$. Utilisant le lemme 5, prenons un voisinage ouvert V_1 de e_1 tel que $\overline{V}_1 \subset V_0$, que $X^* \setminus V_1$ soit connexe et que $m(x,T^*) > m(e_0,T^*)$ pour tout $x \in V_1$. Soit $m_1 = \sup\{m(x,T^*) \,|\, x \in V_1\}$. Si $m_1 < \infty$, prenons $e' \in V_1 \cap E^*$ tel que $m(e_1,T^*) = m_1$ et un voisinage V' de e' tel que $V' \subset V_1$ et que $m(x,T^*) = m_1$ pour tout $x \in V'$. Si $m_1 = \infty$, prenons $e_2 \in V_1 \cap E^*$ tel que $m(e_2,T^*) > m(e_1,T^*)$.

Continuons ainsi inductivement : si un ouvert V_n a été construit de façon que $X^* \setminus V_n$ soit connexe et si $m_n = \sup\{m(x,T^*) \,|\, x \in V_n\} < \infty$, prenons $e' \in V_n \cap E^*$ tel que $m(e',T^*) = m_n$, et un voisinage V' de e' contenu dans V_n et tel que $m(x,T^*) = m_n$ pour tout $x \in V'$. Si $m_n = \infty$, prenons $e_{n+1} \in V_n \cap E^*$ tel que $m(e_{n+1},T^*) > m(e_n,T^*)$, et un voisinage ouvert V_{n+1} de e_{n+1} tel que $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$, que $X^* \setminus V_{n+1}$ soit connexe et que $m(x,T^*) > m(e_n,T^*)$ pour tout $x \in V_{n+1}$. Cette construction ne peut durer indéfiniment, car sinon nous aurions

$$\emptyset \ne \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{V}_n \subset X^* \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset.$$

Quand la construction s'arrête, nous avons un point $e' \in E^*$, un entier m et un voisinage ouvert V' de e' tel que $m(x,T^*) = m$ pour tout $x \in V'$. Puisque $e' \in E^*$, nous pouvons supposer que $X^* \setminus V'$ est connexe. Remarquons que si W est un ouvert de $\overline{V'}$ qui est réunion de composantes de $\overline{V'}$, alors $W \cap V' \cap E^* \ne \emptyset$. En effet, le résultat cité de Krasinkiewicz et Minc entraîne qu'il existe un arc $[e^+,e^-]$, dont les extrémités sont des points en lesquels X^* est colocalement connexe, tel que $[e^+,e^-] \cap W \cap V' \ne \emptyset$. Comme $[e^+,e^-] \setminus V'$ est connexe, V' contient un arc $[e^{\pm},x]$ où x appartient à $W \cap V'$; comme W est réunion de composantes de $\overline{V'}$, cet arc est contenu dans W, donc $e^{\pm}$ appartient à $W \cap V'$.

Supposons d'abord $m = 1$. Nous pouvons supposer que V' vérifie les conditions (3) et (4) ci-dessus. Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $e' \in U_\lambda$. Si, pour tout $x \in \overline{V'}$, la composante L_x de $F_\lambda \cap X^*$ contenant x rencontre T^*, alors (iii) est vérifiée avec $\lambda_1^x = \lambda$ pour tout x. S'il existe $x_0 \in \overline{V'}$ tel que $L_{x_0} \cap T^* = \emptyset$, alors $W = \{x \in \overline{V'} \,|\, L_x \cap T^* = \emptyset\}$ est ouvert dans $\overline{V'}$ et est réunion de composantes de $\overline{V'}$, donc $W \cap V'$ contient $e'' \in E^*$. Il existe un unique $\lambda' \ne \lambda$ tel que $\overline{V'} \cap F_{\lambda'} \ne \emptyset$, et si V'' est un voisinage de e'' tel que $\overline{V''} \subset W$, alors (iii) est vérifiée avec $\lambda_1^x = \lambda'$ pour tout $x \in \overline{V''}$.

Si $m > 1$, soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des suites $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ de m éléments de Λ. Pour $\mathfrak{s} = (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathfrak{S}$, soit $H_{\mathfrak{s}} = \{x \in \overline{V'} \,|\, \lambda_i^x = \lambda_i \text{ pour tout } i \le m\}$. La remarque 4 implique que $H_{\mathfrak{s}}$ est fermé dans $\overline{V'}$. Les ensembles $H_{\mathfrak{s}}$ sont deux à deux disjoints et recouvrent $\overline{V'}$; étant en nombre fini, ils sont aussi ouverts dans $\overline{V'}$. Soit $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ tel que $H_{\mathfrak{s}} \neq \emptyset$. Comme $H_{\mathfrak{s}}$ est ouvert et fermé dans $\overline{V'}$, $H_{\mathfrak{s}} \cap V' \cap E^* \neq \emptyset$. Prenant un point $e'' \in H_{\mathfrak{s}} \cap E^*$ et un voisinage V'' de e'' tel que $\overline{V''} \subset H_{\mathfrak{s}}$, la condition (iii) de l'affirmation est vérifiée.

Nous avons donc obtenu un point $e'' \in E^*$ et un voisinage V'' de e'' vérifiant les conditions (i)-(iii). S'il existe un voisinage W de e'' contenu dans V'' et tel que $L_m^x = L_m^{e''}$ pour tout $x \in \overline{W}$, posons $e = e''$, et prenons pour V un tel voisinage. Supposons enfin que, pour tout voisinage W de e'' contenu dans V'', il existe $x \in W$ tel que $L_m^x \neq L_m^{e''}$. Alors $L_m^{e''} \cap T^*$ est une composante de $F_{\lambda_m^{e''}} \cap T^*$, donc sa frontière relativement à T^* est finie, et chaque point de cette frontière appartient à un ouvert U_λ avec $\lambda \neq \lambda_m^{e''}$. Ceci nous permet de trouver un voisinage O de $L_m^{e''} \cap T^*$ dans T^* tel que $O \setminus L_m^{e''}$ soit de la forme $\bigcup_{k=0}^r]a_k, b_k[$, où les $]a_k, b_k[$ sont deux à deux disjoints et où, pour tout k, il existe $\lambda_k \neq \lambda_m^{e''}$ tel que $]a_k, b_k[\subset U_{\lambda_k}$. Soit P un voisinage de $L_m^{e''}$ dans X^* tel que $P \cap T^* = O$. La remarque 4 nous permet de trouver un voisinage W de e'' contenu dans V'' et tel que $L_m^x \subset P$ pour tout $x \in \overline{W}$. Soit $x_0 \in W$ tel que $L_m^{x_0} \neq L_m^{e''}$. Alors $L_m^{x_0} \cap T^*$ est connexe et contenu dans $(P \cap T^*) \setminus L_m^{e''} = O \setminus L_m^{e''}$, donc il existe $k \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $L_m^{x_0} \cap T^* \subset]a_k, b_k[$. Soit $\lambda_\# \neq \lambda_m^{e''}$ tel que $]a_k, b_k[\subset U_{\lambda_\#}$, et soit $C_\#$ la composante de $F_{\lambda_\#} \cap T^*$ qui contient $]a_k, b_k[$. Soit Q un voisinage de $L_m^{x_0}$ tel que $Q \cap T^* =]a_k, b_k[$, et soit $M = \{x \in \overline{V''} \mid L_m^x \subset Q\}$. La remarque 4 entraîne que M est ouvert dans $\overline{V''}$. Comme $\overline{V''}$ est contenu dans au moins un des F_λ, (iii) implique que chaque composante de $\overline{V''}$ est contenue dans L_1^x pour tout point x de cette composante, donc M est réunion de composantes de $\overline{V''}$, et $M \cap V''$ contient un point $e \in E^*$. Si V est un voisinage de e tel que $\overline{V} \subset M$, alors $L_m^x \cap T^* \subset Q \cap T^* \subset]a_k, b_k[$ pour tout $x \in \overline{V}$, donc (iv) est aussi vérifiée. □

Remarque 5. L'argument précédent montre que, pour tout $e_0 \in E^*$, tout voisinage de e_0 contient un point $e \in E^*$ et un voisinage V de e vérifiant les conditions du lemme 6.

5. Fin de la démonstration du lemme 2

Si X n'a pas la propriété $\mathcal{P}(T_0)$, il contient un sous-continu X_0 contenant T_0 et minimal parmi les sous-continus contenant T_0 n'ayant pas la propriété $\mathcal{P}(T_0)$. Fixons un point $a \in T_0$. Partant de (X_0, T_0), nous construirons inductivement des suites, finies ou infinies, de continus X_n et d'arbres T_n vérifiant

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_n \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X_1 \subset X_0.$$

Posant $X_{-1} = X$ et $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, nous construirons aussi inductivement un recouvrement fermé $\mathcal{F}_n = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n\}$ de X_{n-1} qui, pour $n \geq 0$, est un raffinement spécial de $\mathcal{F}_{n-1}|X_{n-1}$, donc aussi de $\mathcal{F}|X_{n-1}$. Nous noterons $\rho_n : \Lambda_n \to \Lambda$ (resp. $\theta_n : \Lambda_n \to \Lambda_{n-1}$) la fonction telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, F_λ soit réunion de composantes de $F_{\rho_n(\lambda)} \cap X_{n-1}$ (resp. $F_{\theta_n(\lambda)} \cap X_{n-1}$) .

Posons $U^0_\lambda = U_\lambda$ et, pour $n > 0$ et $\lambda \in \Lambda_n$, soit U^n_λ l'intérieur de $U^{n-1}_{\theta_n(\lambda)} \cap F_\lambda$ relativement à X_{n-1}. Nous imposerons aux $\mathcal{F}_n$ de vérifier

$$(\star) \qquad X_{n-1} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_n} U^n_\lambda,$$

et, si $\widetilde{T}$ est un arbre contenu dans X_{n-1}, nous considérerons la propriété suivante, définie pour tout sous-continu Y de X_{n-1} contenant $\widetilde{T}$.

$\mathcal{P}_n(\widetilde{T})$ Il existe un raffinement spécial $(\mathcal{G}, \pi)$ de $\mathcal{F}_n|Y$, où $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$, et un arbre T contenu dans Y et contenant $\widetilde{T}$ vérifiant

(I) T est convenablement placé dans $\mathcal{G}$,

(II) $Y = \bigcup_{\mu\in M} G_\mu \cap U^n_{\pi(\mu)}$.

Comme $U^n_\lambda \subset U^{n-1}_{\theta_n(\lambda)}$, si Y a la propriété $\mathcal{P}_n(\widetilde{T})$, il a aussi la propriété $\mathcal{P}_{n-1}(\widetilde{T})$. Tout ce que nous avons dit plus haut au sujet de la propriété $\mathcal{P}(\widetilde{T}) = \mathcal{P}_0(\widetilde{T})$ s'applique aussi à $\mathcal{P}_n(\widetilde{T})$. En outre, si X^* est un sous-continu de X_{n-1} et T^* un arbre contenu dans X^*, les lemmes 4 à 6 restent vrais si on y utilise le recouvrement $\mathcal{F}_n$ au lieu de $\mathcal{F}$ et, pour tout $x \in X^*$, le nombre $m(x, T^*)$ ne dépend pas du fait que l'on utilise $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}_n$ pour le définir : si $(\lambda'_1, L_1), \ldots, (\lambda'_m, L_m)$ est une suite de longueur minimale vérifiant les conditions (6) à (8) relativement à $\mathcal{F}_n$, alors $(\rho_n(\lambda'_1), L_1), \ldots, (\rho_n(\lambda'_m), L_m)$ est une suite de longueur minimale vérifiant ces conditions relativement à $\mathcal{F}$.

Pour $n \geq 0$, nous supposerons X_n minimal parmi les sous-continus de X_{n-1} contenant T_n et n'ayant pas la propriété $\mathcal{P}_n(T_n)$. Nous noterons E_n l'ensemble des points de $X_n \setminus T_n$ en lesquels X_n est colocalement connexe. Pour $x \in X_n$, nous noterons $[x, q_n(x)]$ l'arc irréductible entre x et T_n et, pour $i \leq m(x, T_n)$, nous noterons $\lambda^x_{i,n}$ et $L^x_{i,n}$ les éléments de Λ_n et les composantes des $F_\lambda \cap X_n$ ($\lambda \in \Lambda_n$) définis après le lemme 4 (en y remplaçant T^* par T_n).

Soit $n \geq 0$. Supposons avoir construit X_n, T_n et choisi un point $e_n \in E_n$, un voisinage ouvert V_n de e_n dans X_n et un entier m_n vérifiant les conditions du lemme 6 relativement à $\mathcal{F}_n$, X_n et T_n (si $n = 0$, nous prenons e_0, V_0 et m_0 arbitrairement ; pour $n > 0$, le choix de ces éléments sera précisé ci-dessous). Soient λ^+_n et λ^-_n les éléments de Λ_n tels que $e_n \in U^n_{\lambda^+_n} \cap (F_{\lambda^-_n} \setminus U^n_{\lambda^-_n})$ (si un tel couple d'éléments n'existait pas, X_n aurait la propriété $\mathcal{P}_n(T_n)$ d'après ce qui a été fait a la section 3). Quitte à diminuer V_n, nous pouvons supposer que $X_n \setminus V_n$ est connexe et que $\overline{V}_n$ est contenu dans $U_{\lambda^+_n}$, et la remarque 2 nous permet ausi de supposer que $\overline{V}_n$ est contenu dans $\overline{U^n_{\lambda^-_n}}$. Pour $x \in V_n$, nous notons $L^+_{x,n}$ et $L^-_{x,n}$ les composantes de $F_{\lambda^+_n} \cap X_n$ et $F_{\lambda^-_n} \cap X_n$ respectivement contenant x.

La remarque 3 nous permet de trouver une famille finie $\mathcal{G}_n = \{F_\mu \mid \mu \in M_n\}$ de sous-ensembles de X_n dont le nerf est un arbre et telle que, pour une fonction convenable $\pi_n : M_n \to \Lambda_n$, F_μ soit ouvert et fermé dans $F_{\pi_n(\mu)} \cap X_n$

et que $Q_n = X_n \setminus \bigcup_{\mu\in M_n} F_\mu \cap U^n_{\pi_n(\mu)}$ soit contenu dans V_n. Notons que Q_n est fermé dans X_n (remarque 3). Nous pouvons aussi trouver un arbre T_{n+1} contenu dans X_n et contenant T_n, qui est convenablement placé dans $\mathcal{G}_n$. Soit $\mathcal{C}_n = \{C_\mu \mid \mu \in M_n\}$ la famille des composantes distinguées des ensembles $F_\mu \cap T_{n+1}$.

L'ensemble $H_n = F_{\lambda_n^+} \setminus \bigcup\{F_\mu \mid \mu \in M_n \text{ et } \pi_n(\mu) = \lambda_n^+\}$ est ouvert et fermé dans $F_{\lambda_n^+}$, donc $H_n \cap U^n_{\lambda_n^+}$ est ouvert dans X_n. Soit $Q_n^\flat = H_n \cap \overline{V}_n$; cet ensemble est ouvert et fermé dans $\overline{V}_n$. Notons que Q_n est contenu dans $V_n \cap H_n$.

Soit M_n^- l'ensemble des $\nu \in M_n$ tels que $F_\nu \cap Q_n^\flat \neq \emptyset$, et soit M_n^+ une copie de M_n^- disjointe de M_n. L'élément de M_n^+ correspondant à $\nu \in M_n^-$ sera noté ν^+. Posons $\Lambda_{n+1} = M_n \cup M_n^+$, et définissons $\theta_{n+1} : \Lambda_{n+1} \to \Lambda_n$ par $\theta_{n+1}|M_n = \pi_n$ et $\theta_{n+1}(\nu^+) = \lambda_n^+$ pour tout $\nu^+ \in M_n^+$. Pour $\nu \in M_n^-$, soit F_{ν^+} la réunion des composantes de $F_{\lambda_n^+}$ qui rencontrent $F_\nu \cap Q_n^\flat$; comme $F_\nu \cap Q_n^\flat$ est fermé dans X_n, F_{ν^+} est fermé.

Si x est un point de $Q_n^\flat$, alors $L^+_{x,n} \subset F_{\lambda_n^-}$. Si $L^+_{x,n}$ contient un point de Q_n, cela résulte de la remarque 2. Si $L^+_{x,n}$ ne contient aucun point de Q_n, alors $L^+_{x,n} \cap (V_n \setminus U_{\lambda_n^-}) = \emptyset$, et si $L^+_{x,n} \setminus V_n$ n'était pas contenu dans $F_{\lambda_n^-}$, il contiendrait un point $y \notin F_\lambda$ pour $\lambda_n^+ \neq \lambda \in \Lambda_n$; ce point appartiendrait à un F_μ avec $\pi_n(\mu) = \lambda_n^+$, et $L^+_{x,n}$ serait contenu dans $F_\mu \subset X_n \setminus H_n$. Cela entraîne que les F_{ν^+}, $\nu^+ \in M_n^+$, sont deux à deux disjoints et que, si $\mathcal{F}_{n+1}$ est la réunion de $\mathcal{G}_n$ et des F_{ν^+}, $\nu^+ \in M_n^+$, alors $N(\mathcal{F}_{n+1})$ se déduit de $N(\mathcal{G}_n)$ par l'adjonction d'un 1-simplexe $\langle \nu, \nu^+\rangle$ pour tout $\nu \in M_n^-$, donc est un arbre.

Pour $\nu \in M_n$, F_ν est ouvert et fermé dans $F_{\pi_n(\nu)}$, d'où $U^{n+1}_\nu = F_\nu \cap U^n_{\pi_n(\nu)}$, donc $X_n \setminus Q_n$ est contenu dans $\bigcup_{\nu\in M_n} U^{n+1}_\nu$. Si $x \in Q_n^\flat$, alors $L^+_{x,n} \setminus V_n \neq \emptyset$, et si y est un point de cet ensemble, il existe $\nu \in M_n$ tel que $y \in F_\nu$; nécessairement $\pi_n(\nu) = \lambda_n^-$, donc $\nu \in M_n^-$ et $x \in F_{\nu^+}$. Nous avons donc $Q_n^\flat \subset \bigcup_{\nu^+\in M_n^+} F_{\nu^+}$, d'où

$$V_n \cap Q_n^\flat = V_n \cap H_n = \bigcup_{\nu^+\in M_n^+} V_n \cap H_n \cap F_{\nu^+}.$$

Comme H_n est ouvert et fermé dans $F_{\lambda_n^+}$ et V_n ouvert dans X_n et contenu dans $F_{\lambda_n^+}$, $V_n \cap H_n$ est ouvert dans X_n. Comme les F_{ν^+} sont des fermés disjoints, les $V_n \cap H_n \cap F_{\nu^+}$ sont disjoints et fermés dans $V_n \cap H_n$; comme ils recouvrent $V_n \cap H_n$, ces ensembles sont aussi ouverts dans $V_n \cap H_n$, donc dans X_n, et, comme V_n est contenu dans $U^n_{\lambda_n^+}$, $V_n \cap H_n \cap F_{\nu^+}$ est contenu dans l'intérieur de $F_{\nu^+} \cap U^n_{\lambda_n^+}$ relativement à X_n. Puisque $Q_n \subset V_n \cap H_n$, nous avons donc aussi $Q_n \subset \bigcup_{\nu^+\in M_n^+} U^{n+1}_{\nu^+}$, donc $\mathcal{F}_{n+1}$ vérifie la condition $(\star)$.

Nous pouvons supposer que, pour tout $x \in Q_n^\flat$, $L^+_{x,n} \cap T_{n+1} = \emptyset$, car s'il existe $x \in F_{\nu^+}$ tel que $L^+_{x,n} \cap T_{n+1} \neq \emptyset$, nous pouvons rajouter F_{ν^+} à $\mathcal{G}_n$;

prenant pour C_{ν^+} la composante de $T_{n+1} \cap F_{\lambda_n^+}$ qui contient $L^+_{x,n} \cap T_{n+1}$, nous constatons que l'arbre T_{n+1} est encore convenablement placé dans $\mathcal{G}_n \cup \{F_{\nu^+}\}$. Nous pouvons aussi supposer que $\lambda^x_{1,n} = \lambda^-_n$ pour tout $x \in Q^\flat_n$. En effet, si $m_n = 1$, cela résulte du fait que $L^+_{x,n} \cap T_n \subset L^+_{x,n} \cap T_{n+1} = \emptyset$, et si $m_n > 1$, cela résulte de l'inclusion $L^+_{x,n} \subset F_{\lambda_n^-}$ et de la caractérisation des (λ_i, L_i) donnée dans la démonstration du lemme 4.

Puisque T_{n+1} contient T_n et que X_n n'a pas la propriété $\mathcal{P}_n(T_n)$, il n'a pas la propriété $\mathcal{P}_n(T_{n+1})$ ni, a fortiori, la propriété $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$. Le lemme 3 nous fournit alors un sous-continu X_{n+1} de X_n contenant T_{n+1} et minimal parmi les sous-continus contenant T_{n+1} et n'ayant pas la propriété $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$.

Puisque X_{n+1} n'a pas la propriété $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$ et que $X_{n+1} \setminus Q_n \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{n+1}} U^{n+1}_\lambda$, nous avons $X_{n+1} \cap Q_n \neq \emptyset$ (sinon $\mathcal{G}_n | X_{n+1}$ et T_{n+1} vérifient les conditions (I) et (II) de la définition de $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$). S'il y a un entier $i \leq m_n$ tel qu'il existe deux points x_1, x_2 dans $X_{n+1} \cap Q^\flat_n$ pour lesquels $L^{x_1}_{i,n} \neq L^{x_2}_{i,n}$, nous notons m'_n le plus grand de ces entiers, et s'il n'existe pas de tel entier i, nous posons $m'_n = 0$. Définissons un entier $m^\dagger_n$ comme suit : s'il existe un entier $m'_n < i \leq m_n$ pour lequel il est possible de trouver $\mu \in \pi_n^{-1}(\lambda^x_{i,n})$ tel que $C_\mu \cap L^x_{i,n} \neq \emptyset$ $(x \in Q_n)$, nous notons $m^\dagger_n$ le plus petit de ces entiers, et s'il n'existe pas de tel entier i, nous posons $m^\dagger_n = m_n + 1$.

Définissons un élément $\lambda^n_\#$ de Λ_n et une composante $L^n_\#$ de $F_{\lambda^n_\#} \cap X_n$ comme suit. Si $m'_n = m_n$, la condition (iv) du lemme 6 nous fournit un élément $\lambda^n_\#$ de Λ_n et une composante $C_\#$ de $F_{\lambda^n_\#} \cap T_n$ telle que $L^x_{m_n,n} \cap C_\# \neq \emptyset$ pour tout $x \in \overline{V}_n$; soit alors $L^n_\#$ la composante de $F_{\lambda^n_\#} \cap X_n$ qui contient $C_\#$. Si $m'_n < m_n$ et $m^\dagger_n \leq m_n$, posons $(\lambda^n_\#, L^n_\#) = (\lambda^x_{m^\dagger_n,n}, L^x_{m^\dagger_n,n})$ pour $x \in Q^\flat_n$ (ce couple ne dépend pas du choix de x puisque $m^\dagger_n > m'_n$). Enfin, si $m'_n < m_n$ et $m^\dagger_n = m_n + 1$, alors, pour $x \in Q^\flat_n$, $L^x_{m_n,n} \cap T_n$ ne peut contenir aucun point n'appartenant pas à $\bigcup \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n \setminus \{\lambda^x_{m_n,n}\}\}$ (comme T_n est convenablement placé dans $\mathcal{G}_n$, un tel point devrait appartenir à une composante distinguée C_μ avec $\pi_n(\mu) = \lambda^x_{m_n,n}$, et nous aurions $m^\dagger_n \leq m_n$) ; il existe donc un unique $\lambda' \neq \lambda_{m_n,n}$ dans Λ_n tel que $L^x_{m_n,n} \cap T_n \subset F_{\lambda'}$; nous posons alors $\lambda^n_\# = \lambda'$, et nous notons $L^n_\#$ la composante de $F_{\lambda'} \cap X_n$ qui contient $L^x_{m_n,n} \cap T_n$. Soit $J_n = [a, a_n]$ l'arc irréductible entre a et $L^n_\#$.

Considérons les trois cas suivants :

($\mathbf{A}_n$) $m'_n > 0$ et $m^\dagger_n = m'_n + 1$.

($\mathbf{B}_n$) $m'_n = 0$ et il existe un point $e \in E_{n+1} \setminus Q^\flat_n$, un voisinage V de e dans X_{n+1} et un entier m vérifiant les conditions du lemme 6 relativement à $\mathcal{F}_{n+1}$, X_{n+1} et T_{n+1} et tels que, quels que soient $y \in \overline{V}$ et $x \in Q_n$, $(\lambda^y_{j,n}, L^y_{j,n}) \neq (\lambda^x_{i,n}, L^x_{i,n})$ pour tout $j \leq m(y, T_n)$ et tout $i < m^\dagger_n$.

($\mathbf{C}_n$) $m'_n = 0$ et $E_{n+1} \subset X_{n+1} \cap Q^\flat_n$.

Lemme 7. *Si le cas* $(\mathbf{A}_n)$ *s'applique, alors* X_{n+1} *a la propriété* $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous poserons, pour $x \in \overline{V}_n$ et $i \leq m_n$, $(\lambda^x_{i,n}, L^x_{i,n}) = (\lambda_i, L^x_i)$, l'élément $\lambda_i \in \Lambda_n$ ne dépendant pas du point $x \in \overline{V}_n$. La définition de m'_n garantit l'existence de deux points x_0, x_1 de $Q^\flat_n \cap X_{n+1}$ tels que $L^{x_0}_{m'_n} \neq L^{x_1}_{m'_n}$. Ecrivons $F_{\lambda_{m'_n}} = A_0 \cup A_1$, où A_0 et A_1 sont ouverts dans $F_{\lambda_{m'_n}}$, disjoints et tels que $L^{x_j}_{m'_n} \subset A_j$ pour $j = 0, 1$. Pour $j = 0, 1$, soit $B_j = \{x \in Q^\flat_n \cap X_{n+1} \,|\, L^x_{m'_n} \subset A_j\}$. Les ensembles B_0 et B_1 sont disjoints, vérifient $B_0 \cup B_1 = Q^\flat_n \cap X_{n+1}$, et la remarque 4 implique qu'ils sont ouverts dans $Q^\flat_n \cap X_{n+1}$. Comme $Q^\flat_n$ est ouvert et fermé dans $\overline{V}_n$, les ensembles B_0 et B_1 sont donc ouverts et fermés dans $\overline{V}_n \cap X_{n+1}$, et comme $X_{n+1} \setminus V_n$ est connexe, $B_j \cap V_n$ contient un point de E_{n+1} pour $j = 0, 1$. Nous pouvons donc, pour $j = 0, 1$, trouver un ouvert W_j de X_{n+1} tel que $\overline{W}_j \subset V_n \cap B_j$ et que $X_{n+1} \setminus W_j$ soit connexe.

La remarque 3 nous permet de trouver une famille finie $\mathcal{G}^\S_j = \{G^j_\kappa \,|\, \kappa \in K_j\}$ de sous-ensembles de X_{n+1} dont le nerf est un arbre, telle que, pour une fonction convenable $\xi_j : K_j \to \Lambda_{n+1}$, G^j_κ soit ouvert et fermé dans $F_{\xi_j(\kappa)} \cap X_{n+1}$, et que le fermé $Q^\S_j = X_{n+1} \setminus \bigcup_{\kappa \in K_j} G_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi_j(\kappa)}$ soit contenu dans W_j. Nous pouvons supposer que $\mathcal{G}^\S_j$ recouvre X_{n+1} (remarque 2). Nous pouvons aussi trouver un arbre $T^\S_j$ contenu dans X_{n+1} et contenant T_{n+1} qui est convenablement placé dans $\mathcal{G}^\S_j$; soient $\{C^j_\kappa \,|\, \kappa \in K_j\}$ les composantes distinguées des $G^j_\kappa \cap T^\S_j$.

Soit $K^\natural_j$ l'ensemble des éléments $\kappa \in K_j$ pour lesquels il existe $\mu \in M_n$ tel que $\xi_j(\kappa) = \mu$ et $C_\mu \subset C^j_\kappa$. Notons $N^\natural_j$ le sous-complexe plein de $N(\mathcal{G}^\S_j)$ engendré par les sommets appartenant à $K^\natural_j$, et N_j le sous-complexe plein de $N(\mathcal{G}^\S_j)$ engendré par les sommets appartenant à $K_j \setminus K^\natural_j$.

$Q_n \cap W_{1-j}$ est contenu dans $X_{n+1} \setminus W_j \subset X_{n+1} \setminus Q^\S_j$, donc, pour tout point x de $Q_n \cap W_{1-j}$, il existe $\kappa \in K_j$ tel que $x \in G^j_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi_j(\kappa)}$; nécessairement, $\xi_j(\kappa)$ appartient à M^+_n, donc κ n'appartient pas à $K^\natural_j$. Soient $Z_1, \ldots, Z_{p_0}$ les composantes de N_0 contenant un sommet $\kappa \in \xi_0^{-1}(M_n)$ tel que $G^0_\kappa \cap Q_n \cap B_1 \neq \emptyset$, et soient $Z_{p_0+1}, \ldots, Z_{p_1}$ les composantes de N_1 contenant un sommet $\kappa \in \xi_1^{-1}(M^+_n)$ tel que $G^1_\kappa \cap Q_n \cap B_0 \neq \emptyset$ (Il est évidemment possible que Q_n soit contenu dans B_1 ou B_0. Le traitement de ce cas ne diffère pas du cas général ci-dessous ; il suffit de poser $p_0 = 0$ ou $p_1 = p_0$ et d'omettre les considérations superflues). Pour $1 \leq k \leq p_0$ (resp. $p_0 < k \leq p_1$), nous notons $\overline{K}_k$ l'ensemble des sommets de Z_k, $\bar{\kappa}_k$ le sommet de Z_k adjacent à $N^\natural_0$ (resp. $N^\natural_1$), κ'_k le sommet de $N^\natural_0$ (resp. $N^\natural_1$) adjacent à Z_k, et μ_k l'élément de M_n tel que $\xi_0(\kappa'_k) = \mu_k$ et $C_{\mu_k} \subset C^0_{\kappa'_k}$ (resp. $\xi_1(\kappa'_k) = \mu_k$ et $C_{\mu_k} \subset C^1_{\kappa'_k}$). Nous posons $K'_k = \overline{K}_k \cup \{\kappa'_k\}$.

Posons $p_{-1} = 0$. Soient $p_{j-1} < k \leq p_j$ et κ un sommet de Z_k tel que $\xi_j(\kappa) \in M_n^+$. Si y est un point de C^j_κ, alors, par définition des F_{ν^+}, $L^+_{y,n} \cap Q^\flat_n \neq \emptyset$; soit x un point de cette intersection. Puisque $L^+_{y,n} = L^+_{x,n} \subset F_{\lambda^-_n}$ et que $L^+_{x,n} \cap T_n \subset L^+_{x,n} \cap T_{n+1} = \emptyset$, nous avons $m(y, T_n) = m(x, T_n)$ et $(\lambda^y_{i,n}, L^y_{i,n}) = (\lambda_i, L^x_{i,n})$ pour tout $i \leq m_n$. L'arc $[y, q_n(y)]$ est contenu dans $T^\S_j$ et, pour tout $i \leq m_n$, $L_{i,n} \cap [y, q_n(y)]$ contient un point n'appartenant pas à $\bigcup\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n \setminus \{\lambda_i\}\}$ (voir la démonstration du lemme 4 si $m_n > 1$; si $m_n = 1$, utiliser le fait que $L^+_{y,n} \cap L^-_{y,n} \neq \emptyset$ et $L^+_{y,n} \cap T_n = \emptyset$). Il en résulte que, pour tout $i \leq m_n$, il existe $\kappa_i \in \xi_j^{-1} \circ \theta^{-1}_{n+1}(\lambda_i)$ tel que $[y, q_n(y)] \cap L^y_{i,n} \subset C^j_{\kappa_i}$. S'il existe $i \leq m^\dagger_n$ et $\mu \in \pi_n^{-1}(\lambda_i)$ tels que $C_\mu \cap L^y_{i,n} \neq \emptyset$ (ce qui entraîne $C_\mu \subset C^j_{\kappa_i}$), soit i_k le plus petit de ces entiers ; nous avons alors $\kappa'_k = \kappa_{i_k}$, et $\bar\kappa_k = \kappa_{i_k - 1}$ si $i_k > 1$, tandis que si $i_k = 1$, alors $\bar\kappa_{i_k}$ est l'élément $\kappa \in \xi_j^{-1}(M^+_n)$ tel que $y \in C^j_\kappa$ (et alors $Z_k = \{\kappa\}$). S'il n'y a pas de tel entier i, alors $m'_n = m_n$ et $m^\dagger_n = m_n + 1$, et la condition (iv) du lemme 6 nous fournit un élément $\lambda^n_\# \neq \lambda_{m_n}$ et une composante $C_\#$ de $F_{\lambda^n_\#} \cap T_n$ telle que $L^x_{m_n,n} \cap C_\# \neq \emptyset$ pour tout $x \in \overline{V}_n$. Comme $C_\#$ rencontre des composantes distinctes de $F_{\lambda_{m_n}} \cap X_n$, elle doit contenir un point n'appartenant pas à $\bigcup\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n \setminus \{\lambda^n_\#\}\}$, et il doit exister $\mu_\# \in \pi_n^{-1}(\lambda_\#)$ et $\kappa_\# \in \xi_j^{-1}(\mu_\#)$ tels que $C_\# \subset C_{\mu_\#} \subset C^j_{\kappa_\#}$. Nous avons alors $\kappa'_k = \kappa_\#$ et $\bar\kappa_k = \kappa_{m_n}$.

Pour $p_{j-1} < k \leq p_j$, posons $T_{Z_k} = \bigcup_{\kappa \in \overline{K}_k} C^j_\kappa$; c'est un sous-arbre de $T^\S_j$ tel que $T_{Z_k} \cap C^j_{\kappa'_k} \neq \emptyset$, donc l'arc $[u_k, v_k]$ irréductible entre T_{Z_k} et T_{n+1} est contenu dans $C^j_{\kappa'_k}$. Pour $1 \leq r \leq p_1$, posons $\widehat{T}_r = T_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^r (T_{Z_k} \cup [u_k, v_k])$; c'est un arbre contenu dans X_{n+1}. Soit $\widehat{K}_n = M_n \cup (\bigcup_{k=1}^r \overline{K}_k)$. Définissons $\eta_r : \widehat{K}_r \to \Lambda_{n+1}$ par $\eta_r | M_n = id$ et $\eta_r | \overline{K}_k = \xi_j | \overline{K}_k$ si $p_{j-1} < k \leq p_j$. Pour $\mu \in M_n$, soit $\widehat{C}^r_\mu$ la composante de $\widehat{T}_r \cap F_\mu$ qui contient C_μ, et pour $\kappa \in \overline{K}_k$ avec $p_{j-1} < k \leq p_j$, soit $\widehat{C}^r_\kappa$ la composante de $\widehat{T}_r \cap G^j_\kappa$ qui contient C^j_κ. Les C_μ avec $\mu \in M_n$ recouvrent T_{n+1}, les C^j_κ avec $\kappa \in \overline{K}_k$ recouvrent T_{Z_k} et, si $p_{j-1} < k \leq p_j$, alors $[u_k, v_k]$ est contenu dans $C^j_{\kappa'_k} \cap \widehat{T}_r \subset \widehat{C}^r_{\mu_k}$, donc nous avons $\widehat{T}_r = \bigcup_{\hat\kappa \in \widehat{K}_r} \widehat{C}^r_{\hat\kappa}$.

Pour $1 \leq r \leq p_1$, soit $\widehat{N}_r$ l'arbre obtenu en ajoutant à la réunion disjointe de $N(\mathcal{G}_n)$ et des $\overline{K}_k$ avec $k \leq r$ les 1-simplexes $\langle \mu_k, \bar\kappa_k \rangle$ avec $k \leq r$.

Pour $j = 0, 1$ et $p_{j-1} < k \leq p_j$, posons

$$Q^k_n = Q_n \cap B_{1-j} \cap \Big(\bigcup\{G^j_\kappa \mid \kappa \in \overline{K}_k \text{ et } \xi_j(\kappa) \in M^+_n\}\Big).$$

Les ensembles Q^k_n sont fermés, et comme les G^j_κ avec $\xi_j(\kappa) \in M^+_n$ recouvrent $B_{1-j} \cap Q_n$, nous avons $Q_n = \bigcup_{k=1}^{p_1} Q^k_n$. Par récurrence, nous construirons, pour $r \leq p_1$, des familles $\widehat{\mathcal{G}}^r = \{\widehat{G}^r_{\hat\kappa} \mid \hat\kappa \in \widehat{K}_r\}$ de façon que $\widehat{G}^r_{\hat\kappa}$ soit ouvert et fermé dans $F_{\eta_r(\hat\kappa)} \cap X_{n+1}$ et contienne $\widehat{C}^r_{\hat\kappa}$, que $\bigcup_{\hat\kappa \in \widehat{K}_r} \widehat{G}^r_{\hat\kappa} \cap U^{n+1}_{\eta_r(\hat\kappa)}$

contienne $(X_{n+1} \setminus Q_n) \cup (\bigcup_{k=1}^{r} Q_n^k)$, et que le nerf de $\widehat{\mathcal{G}}^r$ soit isomorphe à l'arbre $\widehat{N}_r$. Alors $\widehat{C}^r_{\hat{\kappa}}$ sera aussi une composante de $\widehat{G}^r_{\hat{\kappa}} \cap \widehat{T}_r$, donc $\widehat{T}_r$ sera convenablement placé dans $\widehat{\mathcal{G}}^r$. Finalement, $\widehat{\mathcal{G}}^{p_1}$ et $\widehat{T}_{p_1}$ vérifieront les conditions (I) et (II) de la propriété $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$ relativement à X_{n+1}.

Pour $p_{j-1} < k \leq p_j$, posons

$$O_k = G^j_{\kappa'_k} \setminus \bigcup_{\kappa \in K_j \setminus \{\kappa'_k\}} G^j_\kappa = X_{n+1} \setminus \bigcup_{\kappa \in K_j \setminus \{\kappa'_k\}} G^j_\kappa,$$

où la dernière égalité, qui résulte du fait que $\mathcal{G}^\S_j$ recouvre X_{n+1}, montre que O_k est ouvert dans X_{n+1}. Soit D_k le fermé, réunion des composantes de $X_{n+1} \setminus O_k$ qui rencontrent $T_{Z_k} \cup Q_n^k$. Posons

$$\Sigma_k = \Big(\bigcup_{\substack{1 \leq k' \leq p_1 \\ k' \neq k}} D_{k'} \Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{\mu \in M_n \\ \mu \neq \mu_k}} C_\mu \Big).$$

Nous avons $D_k \cap \Sigma_k = \emptyset$. Pour le voir, notons que Z_k est aussi une composante du sous-complexe plein de $N(\mathcal{G}^\S_j)$ engendré par les sommets distincts de κ'_k, donc l'ensemble $G_{Z_k} = \bigcup \{ G^j_\kappa \mid \kappa \in \overline{K}_k \}$ est ouvert et fermé dans $X_{n+1} \setminus O_k$ et, comme G_{Z_k} contient $T_{Z_k} \cup Q_n^k$, il contient D_k. Puisqu'il n'existe pas d'indice $\mu \in M_n$ tel que $\xi_j(\bar{\kappa}_k) = \mu$ et $C_\mu \subset C^j_{\bar{\kappa}_k}$, $T_{n+1} \cap G_{Z_k}$ est contenu dans $G_{\kappa'_k}$, donc G_{Z_k} est disjoint de C_μ pour $\mu \neq \mu_k$. Si $p_{j-1} < k' \leq p_j$ et $k' \neq k$, aucun sommet de $Z_{k'}$ n'est adjacent à un sommet de Z_k, donc $G_{Z_k} \cap G_{Z_{k'}} = \emptyset$. Pour achever de prouver que $D_k \cap \Sigma_k = \emptyset$, il ne reste plus qu'à montrer que si $k \leq p_0 < k'$, alors $D_k \cap D_{k'} = \emptyset$. Mais chaque composante de D_k (resp. $D_{k'}$) contient un point $x \in Q_n^\flat \cap B_1$ (resp. $x' \in Q_n^\flat \cap B_0$), et nous avons $L^x_{m_n} \neq L^{x'}_{m_n}$. Si $[y, y']$ est l'arc irréductible entre $L^x_{m_n}$ et $L^{x'}_{m_n}$, alors $[x, x'] = [x, y] \cup [y, y'] \cup [y', x']$. Si $m_n = m'_n$, alors $[y, y']$ est contenu dans la composante $C_\#$ de $F_{\lambda^n_\#} \cap T_n$ fournie par la condition (iv) du lemme 6. Si $m'_n < m_n$, alors $L^x_{m'_n+1} = L^{x'}_{m'_n+1}$ contient $[y, y']$ et, puisque $m^\dagger_n = m'_n + 1$, nous avons $(\lambda^n_\#, L^n_\#) = (\lambda_{m^\dagger_n}, L_{m^\dagger_n})$ et il existe $\mu \in \pi_n^{-1}(\lambda^n_\#)$ tel que $C_\mu \cap L^n_\# \neq \emptyset$. D'après ce que nous avons vu plus haut, ou bien $\mu_k \in \pi_n^{-1}(\lambda^n_\#)$, et alors κ'_k est l'élément de $\xi_j^{-1}(\mu_k)$ contenant $L^n_\# \cap T^\S_j$ et $]y, y'[$ est contenu dans O_k, ou bien il existe $i \leq m'_n$ tel que $\mu_k \in \pi_n^{-1}(\lambda_i)$, et alors $[y, y'] \cap D_k = \emptyset$, car si $\kappa_\#$ est l'élément de K_0 tel que $L_\# \cap T^\S_0 = C^0_{\kappa_\#}$, alors $[y, y']$ est contenu dans $G^0_{\kappa_\#}$ et $\kappa_\#$ n'appartient pas à K'_k. Dans ces deux cas, la composante de D_k contenant x est contenue dans la composante connexe *par arcs* de $X_{n+1} \setminus]y, y'[$ contenant y. De même, la composante de $D_{k'}$ contenant x' est contenue dans la composante connexe *par arcs* de $X_{n+1} \setminus]y, y'[$ contenant y', et la relation $D_k \cap D_{k'} = \emptyset$ en résulte.

Soit $p_{j-1} < k \leq p_j$. Puisque G^j_κ est ouvert et fermé dans $F_{\xi_j(\kappa)}$, l'ensemble $G^j_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi_j(\kappa)}$ est ouvert dans X_{n+1} pour tout $\kappa \in K_j$. Comme $Q^\S_j$ est contenu dans la réunion des D_ℓ avec $p_{(1-j)-1} < \ell \leq p_{1-j}$, D_k est disjoint de $Q_j^{\S}$, donc contenu dans la réunion des $G_\kappa^j \cap U_{\xi_j(\kappa)}^{n+1}$. Comme $N(\mathcal{G}_j^{\S})$ est un arbre, $D_k \cap G_\kappa^j = \emptyset$ si $\kappa \notin K_k'$, donc D_k est contenu dans l'ouvert $P_k = \bigcup_{\kappa \in K_k'} G_\kappa^j \cap U_{\xi_j(\kappa)}^{n+1}$.

En plus des familles $\widehat{\mathcal{G}}^r$, nous construirons inductivement, pour $r < k \leq p_1$ et $\kappa \in K_k'$, un ensemble $G_\kappa^{j,r}$, ouvert et fermé dans G_κ^j, où j est tel que $p_{j-1} < k \leq p_j$. Les ensembles $P_k^r = \bigcup_{\kappa \in K_k'} G_\kappa^{j,r} \cap U_{\xi_j(\kappa)}^{n+1}$ et $O_k^r = O_k \cap G_{\kappa_k'}^{j,r}$ seront alors ouverts dans X_{n+1}. Nous noterons D_k^r la réunion des composantes de $X_{n+1} \setminus O_k^r$ qui rencontrent $T_{Z_k} \cup Q_n^k$, et poserons

$$\Sigma_k^r = \Big(\bigcup_{\substack{r<k' \\ k' \neq k}} D_{k'}^r\Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{\hat\kappa \in \widehat{K}_r \\ \hat\kappa \neq \mu_k}} \widehat{C}_{\hat\kappa}^r\Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{\kappa \in \overline{K}_{k'} \\ k' \leq r}} \widehat{G}_\kappa^r\Big).$$

Nous voulons que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout $k > r$:

(10) $G_{\kappa_k'}^{j,r} \subset \widehat{G}_{\mu_k}^r$,

(11) $D_k^r \subset P_k^r$,

(12) $D_k^r \cap \Sigma_k^r = \emptyset$.

Pour $r = 0$ et $1 \leq k \leq p_1$, nous posons $O_k^0 = O_k$, $P_k^0 = P_k$, $D_k^0 = D_k$, $\Sigma_k^0 = \Sigma_k$ et $\widehat{G}_\mu^0 = F_\mu$ pour $\mu \in M_n = \widehat{K}_0$. Pour $r = 0$, la condition (10) résulte du fait que $\xi_j(\kappa_k') = \mu_k$, et les conditions (11) et (12) ont déjà été vérifiées.

Soit $0 \leq r < p_1$, et supposons avoir construit $\widehat{\mathcal{G}}^r$ et les $G_\kappa^{j,r}$. Puisque le fermé D_{r+1}^r, qui est réunion de composantes de $X_{n+1} \setminus O_{r+1}^r$, est contenu dans P_{r+1}^r et disjoint de Σ_{r+1}^r, nous pouvons trouver un sous-ensemble Y_r de $X_{n+1} \setminus O_{r+1}^r$, ouvert et fermé dans $X_{n+1} \setminus O_{r+1}^r$, contenu dans P_{r+1}^r, et tel que $D_{r+1}^r \subset Y_r \subset P_{r+1}^r$ et $Y_r \cap \Sigma_{r+1} = \emptyset$. Posons

$$\widetilde{G}_\kappa^{r+1} = G_\kappa^{j,r} \cap Y_r \text{ pour } \kappa \in \overline{K}_{r+1} \ (j \text{ tel que } p_{j-1} < r+1 \leq p_j),$$
$$\widetilde{G}_{\hat\kappa}^{r+1} = \widehat{G}_{\hat\kappa}^r \setminus Y_r \text{ pour } \hat\kappa \in \widehat{K}_r \setminus \{\mu_{r+1}\},$$
$$\widetilde{G}_{\mu_{r+1}}^{r+1} = \widehat{G}_{\mu_{r+1}}^r \setminus \bigcup\{\widetilde{G}_\kappa^{r+1} \mid \kappa \in \overline{K}_{r+1} \text{ et } \xi_j(\kappa) = \mu_{r+1}\}$$

Si $\kappa \in \overline{K}_{r+1}$, alors $G_\kappa^{j,r}$ est contenu dans $X_{n+1} \setminus O_k \subset X_{n+1} \setminus O_k^r$, et $\widetilde{G}_\kappa^{r+1}$ esr ouvert et fermé dans $G_\kappa^{j,r}$, donc ouvert et fermé dans $F_{\eta_{r+1}(\kappa)} = F_{\xi_j(\kappa)}$. Si $\hat\kappa \in \widehat{K}_n \setminus M_n$, alors (12) implique que $\widetilde{G}_{\hat\kappa}^r \cap Y_r = \emptyset$, donc $\widetilde{G}_{\hat\kappa}^{r+1} = \widehat{G}_{\hat\kappa}^r$ est ouvert et fermé dans $F_{\eta_{r+1}(\hat\kappa)} = F_{\eta_r(\hat\kappa)}$. Si $\mu \in M_n \setminus \{\mu_{r+1}\}$, alors $\widehat{G}_\mu^r \subset F_\mu \subset X_{n+1} \setminus O_{r+1}$, donc $\widetilde{G}_\mu^{r+1}$ est ouvert et fermé dans $\widehat{G}_\mu^r$ et aussi dans $F_\mu = F_{\eta_{r+1}(\mu)}$. Enfin, $\widetilde{G}_{\mu_{r+1}}^{r+1}$ est ouvert et fermé dans $\widehat{G}_{\mu_{r+1}}^r$ puisque son complémentaire l'est, et il est donc ouvert et fermé dans $F_{\mu_{r+1}}$.

Pour $\kappa \in \overline{K}_{r+1}$, C_κ^j est contenu dans Y_r, donc dans $\widetilde{G}_\kappa^{r+1}$, et il en est de même de $\widehat{C}_\kappa^{r+1}$ puisque c'est une composante de $G_\kappa^j \cap \widehat{T}_{r+1}$. Pour $\hat\kappa \in$

$\widehat{K}_r \setminus \{\mu_{r+1}\}$, $\widehat{C}^r_{\hat\kappa}$ et $\widehat{C}^{r+1}_{\hat\kappa}$ sont contenus dans $\widetilde{G}^{r+1}_{\hat\kappa}$. Enfin, puisque $T^\S_j$ est convenablement placé dans $\mathcal{G}^\S_j$, $C^j_{\kappa'_{r+1}} \cap G^j_\kappa = \emptyset$ pour tout $\kappa \in \overline{K}_{r+1}$ tel que $\xi_j(\kappa) = \mu_{r+1}$ et, comme $\widehat{C}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$ est la composante de $F_{\mu_{r+1}} \cap T_{n+1}$ qui contient $C^j_{\kappa'_{r+1}}$, elle est contenue dans $\widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$.

Puisque $Q^{r+1}_n \subset D^r_{r+1} \subset Y_r \subset P^r_{r+1}$, nous avons $Q^{r+1}_n \subset \bigcup\{\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi_j(\kappa)} \,|\, \kappa \in \overline{K}_{r+1}\}$. Soit x un point de $(X_{n+1} \setminus Q_n) \cup (\bigcup_{k=1}^r Q^k_n)$. Il existe $\hat\kappa \in \widehat{K}_n$ tel que $x \in \widehat{G}^r_{\hat\kappa} \cap U^{n+1}_{\eta_r(\hat\kappa)}$. Si x n'appartient pas à Y_r, il appartient à $\widetilde{G}^{r+1}_{\hat\kappa} \cap U^{n+1}_{\eta_{r+1}}$ (même si $\hat\kappa = \mu_{r+1}$, car alors x n'appartient à aucun $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa$ avec $\kappa \in \overline{K}_{r+1}$). Si x appartient à Y_r, il existe $\kappa \in K'_{r+1}$ tel que $x \in G^{j,r}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi_j(\kappa)}$. Si $\kappa \neq \kappa'_{r+1}$, alors x appartient à $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap U^{n+1}_{\eta_{r+1}(\kappa)}$, et si $\kappa = \kappa'_{r+1}$, alors x appartient à $\widehat{G}^r_{\mu_{r+1}}$ d'après (10) et ne peut appartenir à aucun $G^j_{\kappa'}$ tel que $\kappa' \in \overline{K}_{r+1}$ et $\xi_j(\kappa') = \mu_{r+1}$, donc il appartient à $\widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}} \cap U^{n+1}_{\mu_{r+1}}$. Nous avons donc $(X_{n+1} \setminus Q_n) \cup (\bigcup_{k=1}^{r+1} Q^k_n) \subset \bigcup_{\hat\kappa \in \widehat{K}_{r+1}} \widetilde{G}^{r+1}_{\hat\kappa} \cap U^{n+1}_{\eta_{r+1}(\hat\kappa)}$.

Soit $\widetilde{\mathcal{G}}^{r+1} = \{\widetilde{G}^{r+1}_{\hat\kappa} \,|\, \hat\kappa \in \widehat{K}_{r+1}\}$. Comparons $N(\widetilde{\mathcal{G}}^{r+1})$ et $\widehat{N}_{r+1}$. Si κ, κ' sont deux éléments de $\overline{K}_{r+1}$ tels que $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\kappa'} \neq \emptyset$, alors $G^j_\kappa \cap G^j_{\kappa'} \neq \emptyset$; inversement, si $G^j_\kappa \cap G^j_{\kappa'} \neq \emptyset$, alors $C^j_\kappa \cap C^j_{\kappa'} \neq \emptyset$ ($T^\S_j$ est convenablement placé dans $\mathcal{G}^\S_j$), donc $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\kappa'} \neq \emptyset$. De même, si $\hat\kappa$ et $\hat\kappa'$ appartiennent à $\widehat{K}_r$, alors $\widetilde{G}^{r+1}_{\hat\kappa} \cap \widetilde{G}_{\hat\kappa'} \neq \emptyset$ si, et seulement si, $\widehat{G}^r_{\hat\kappa} \cap \widehat{G}^r_{\hat\kappa'} \neq \emptyset$. Comme $N(\widehat{\mathcal{G}}^r)$ est isomorphe à $\widehat{N}_r$, $N(\widehat{\mathcal{G}}^{r+1})$ ne peut être distinct de $\widehat{N}_{r+1}$ que s'il existe $\kappa \in \overline{K}_{r+1}$ tel que $\kappa \neq \bar\kappa_{r+1}$ et $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}} \neq \emptyset$.

Soit $\kappa \in \overline{K}_{r+1}$ tel que $\kappa \neq \bar\kappa_{r+1}$ et $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}} \neq \emptyset$. Par définition de $\widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$, nous avons $\xi_j(\kappa) \neq \mu_{r+1}$. Il n'existe pas d'indice $\kappa' \neq \kappa$ dans K'_{r+1} tel que $\widetilde{G}^{r+1}_{\kappa'} \cap \widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}} \neq \emptyset$, car $\xi_j(\kappa')$ devrait être distinct de $\xi_j(\kappa)$, donc égal à μ_{r+1}, et κ' serait distinct de $\bar\kappa_{r+1}$, or un tel $\widetilde{G}^{r+1}_{\kappa'}$ est disjoint de $\widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$. Soit $x \in \widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$, et soit L^x la composante de $F_{\mu_{r+1}} \cap X_{n+1}$ qui contient x. Comme $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \subset P_{r+1}$ et $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}} \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\kappa'} = \emptyset$ pour $\kappa \neq \kappa' \in K'_{r+1}$, nous avons $L^x \cap \widetilde{G}^{r+1}_\kappa \subset U^{r+1}_{\xi_j(\kappa)}$. Si l'ensemble $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi_j(\kappa)}$, qui est ouvert dans X_{n+1} ne contenait pas L^x, sa frontière (relativement à X_{n+1}) devrait contenir un point y de L^x ; comme cette frontière est contenue dans le fermé $Y_r \cap \widetilde{G}^{r+1}_\kappa \subset P^r_{r+1}$, il devrait exister $\kappa' \in K'_{r+1}$ tel que $y \in U^{n+1}_{\xi_j(\kappa')}$, d'où $y \in \widetilde{G}^{r+1}_{\kappa'}$, ce qui est impossible. La réunion S_κ des composantes de $F_{\mu_{r+1}} \cap X_{n+1}$ qui rencontrent $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$ est donc contenue dans l'ouvert $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi_j(\kappa)}$. Comme $\kappa \neq \bar\kappa_{r+1}$, nous avons $G^j_\kappa \cap G^j_{\kappa'_{r+1}} = \emptyset$ et, puisque $\widehat{C}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$ est contenue dans $G^j_{\kappa'_{r+1}}$, S_κ est disjoint de $\widehat{C}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$. Nous pouvons donc trouver un sous-ensemble R_κ de $F_{\mu_{r+1}} \cap X_{n+1}$, ouvert et fermé dans $F_{\mu_{r+1}} \cap X_{n+1}$ tel que $S_\kappa \subset R_\kappa \subset \widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi_j(\kappa)}$ et $R_\kappa \cap \widehat{C}^{r+1}_{\mu_{r+1}} = \emptyset$.

Posons $\widehat{G}^{r+1}_{\hat\kappa} = \widetilde{G}^{r+1}_{\hat\kappa}$ pour $\hat\kappa \in \widehat{K}_{r+1}\setminus\{\mu_{r+1}\}$, et soit $\widehat{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}} = \widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}} \setminus \bigcup R_\kappa$, la réunion étant étendue à tous les $\kappa \in \overline{K}_{r+1}$ tels que $\xi_j(\kappa) = \mu_{r+1}$ et $\widetilde{G}^{r+1}_\kappa \cap \widetilde{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}} \neq \emptyset$. Nous avons encore $\widehat{C}^{r+1}_{\hat\kappa} \subset \widehat{G}^{r+1}_{\hat\kappa}$ pour tout $\hat\kappa \in \widehat{K}_{r+1}$, et la définition des R_κ garantit que $\widehat{G}^{r+1}_{\mu_{r+1}} \cap \widehat{G}^{r+1}_\kappa = \emptyset$ pour tout $\kappa \in \overline{K}_{r+1} \setminus \{\bar\kappa_{r+1}\}$, donc $N(\widehat{\mathcal{G}}^{r+1})$ est isomorphe à $\widehat{N}_{r+1}$. Puisque R_κ est contenu dans $\widetilde{G}^{n+1}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi_j(\kappa)}$, nous avons

$$(X_{n+1} \setminus Q_n) \cup (\bigcup_{k=1}^{r+1} Q^k_n) \subset \bigcup_{\hat\kappa \in \widehat{K}_{r+1}} \widetilde{G}^{r+1}_{\hat\kappa} \cap U^{n+1}_{\eta_{r+1}(\hat\kappa)} = \bigcup_{\hat\kappa \in \widehat{K}_{r+1}} \widehat{G}^{r+1}_{\hat\kappa} \cap U^{n+1}_{\eta_{r+1}(\hat\kappa)}.$$

Pour $r+1 < k \leq p_1$ et j tel que $p_{j-1} < k \leq p_j$, posons, pour $\kappa \in K'_k$, $G^{j,r+1}_\kappa = G^{j,r}_\kappa \cap \widehat{G}^{r+1}_{\xi_j(\kappa)}$ si $\xi_j(\kappa) \in M_n$ et $G^{j,r+1}_\kappa = G^{j,r}_\kappa$ si $\xi_j(\kappa) \notin M_n$. Evidemment, $G^{j,r+1}_\kappa$ est ouvert et fermé dans $G^{j,r}_\kappa$, donc aussi dans G^j_κ, et la condition (10) est vérifiée. Pour tout $\mu \in M_n$, $\widehat{G}^r_\mu \setminus \widehat{G}^{r+1}_\mu$ est contenu dans Y_r, donc $G^{j,r}_\kappa \setminus G^{j,r+1}_\kappa$ est contenu dans Y_r pour tout $\kappa \in K'_k$. Nous avons $D^r_k = D^{r+1}_k$ pour tout $k > r+1$. En effet, puisque $G^{j,r+1}_{\kappa'_k}$ est contenu dans $G^{j,r}_{\kappa'_k}$, nous avons $D^r_k \subset D^{r+1}_k$. Si $D^r_k \neq D^{r+1}_k$, alors D^{r+1}_k contient un arc $[x,y]$ avec $x \in D^r_k$ et $y \notin D^r_k$. Soit $[x,z]$ la composante de x dans $D^r_k \cap [x,z]$. Le point z est alors limite d'une suite de points de $[z,y] \cap (O^r_k \setminus O^{r+1}_k)$ et, comme $G^{j,r}_{\kappa'_k} \setminus G^{j,r+1}_{\kappa'_k}$ est fermé, z appartient à $G^{j,r}_{\kappa'_k} \setminus G^{j,r+1}_{\kappa'_k}$, mais ceci est impossible car $G^{j,r}_{\kappa'_k} \setminus G^{r+1}_{\kappa'_k}$ est contenu dans Y_r, qui est disjoint de D^r_k.

Nous avons $P^r_k \setminus P^{r+1}_k \subset Y_r$ et $D^r_k \cap Y_r = \emptyset$, donc (11) implique que $D^{r+1}_k = D^r_k$ est contenu dans P^{r+1}_k. Pour montrer que $D^{r+1}_k \cap \Sigma^{r+1}_k = \emptyset$, il suffit, d'après (12), de vérifier que $D^r_k \cap (\Sigma^{r+1}_k \setminus \Sigma^r_k) = \emptyset$. Mais $\Sigma^{r+1}_k \setminus \Sigma^r_k$ est contenu dans $Y_r \cup (\widehat{T}_{r+1} \setminus \widehat{T}_r) \subset Y_r \cup \widehat{C}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$, donc $D^r_k \cap (\Sigma^{r+1}_k \setminus \Sigma^r_k) \subset \widehat{C}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$, et si $\mu_{r+1} \neq \mu_k$, alors $\widehat{G}^r_{\mu_{r+1}}$ est contenu dans $X_{n+1} \setminus O_k$ (car $O_k \subset F_{\mu_k}$) donc, d'après (12), D^r_k ne rencontre pas $\widehat{C}^r_{\mu_{r+1}} \subset \widehat{C}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$ et, $\widehat{C}^{r+1}_{\mu_{r+1}}$, étant connexe et contenu dans $X_{n+1} \setminus O_k$, est disjoint de D^r_k, d'où l'égalité $D^r_k \cap (\Sigma^{r+1}_k \setminus \Sigma^r_k) = \emptyset$.

Avec la vérification des conditions (10)-(12) s'achève la démonstration du lemme.

$\square$

Lemme 8. *Si le cas* $(\mathbf{B}_n)$ *s'applique, alors* X_{n+1} *a la proptiété* $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$.

Démonstration. Puisque $m'_n = 0$, le couple $(\lambda^x_{i,n}, L^x_{i,n})$ ne dépend pas du point $x \in Q^\flat_n$ quel que soit $i \leq m_n$; nous le noterons (λ_i, L_i). Pour tout $x \in Q^\flat_n$, nous avons $(\lambda_1, L_1) = (\lambda^-_n, L^-_{x,n})$, et $L^+_{x,n}$, étant connexe et contenu dans $F_{\lambda_n^-}$, doit être contenu dans L_1. Il existe donc un unique $\nu^- \in M_n^-$ tel que $F_{\nu^-} \cap Q_n^\flat \cap X_{n+1} \neq \emptyset$, celui tel que $L_1 \subset F_{\nu^-}$, et si ν^+ est l'élément correspondant de M_n^+, alors $Q_n^\flat \cap X_{n+1} \subset F_{\nu^+}$, ce qui entraîne que $Q_n \cap X_{n+1} \subset U_{\nu^+}^{n+1}$.

Supposons d'abord que $m_n^\dagger = 1$. Soit $\widehat{\mathcal{G}}$ la réunion de $\mathcal{G}_n|X_{n+1}$ et de $F_{\nu^+} \cap X_{n+1}$. Le nerf de $\widehat{\mathcal{G}}$ se déduit de $N(\mathcal{G}_n)$ par l'adjonction du 1-simplexe $\langle \nu^-, \nu^+ \rangle$, donc est un arbre. Puisque $Q_n \cap X_{n+1} \subset U_{\nu^+}^{n+1}$, $\widehat{\mathcal{G}}$ est un raffinement spécial de $\mathcal{F}_{n+1}|X_{n+1}$ vérifiant (II) de la définition de la condition $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$. Puisque $m_n^\dagger = 1$, il existe $\mu_0 \in \pi_n^{-1}(\lambda_1) = \pi_n^{-1}(\lambda_n^-)$ tel que $C_{\mu_0} \cap L_1 \neq \emptyset$. Fixons un point $x_0 \in Q_n$. L'arc $[x_0, q_{n+1}(x_0)]$ est alors contenu dans L_1. Soit $\widehat{T} = T_{n+1} \cup [x_0, q_{n+1}(x_0)]$. Pour $\mu \in M_n$, soit $\widehat{C}_\mu$ la composante de $\widehat{T} \cap F_\mu$ qui contient C_μ, et soit $\widehat{C}_{\nu^+}$ la composante de $F_{\nu^+} \cap \widehat{T}$ qui contient x_0. L'ensemble $L_1 \cap \widehat{T}$ est connexe, rencontre C_{μ_0} et contient $[x_0, q_{n+1}(x_0)]$, donc $\widehat{C}_{\mu_0} = L_1 \cap \widehat{T}$ contient $[x_0, q_{n+1}(x_0)]$. Il en résulte que $\widehat{T} = \big(\bigcup_{\mu \in M_n} \widehat{C}_\mu\big) \cup \widehat{C}_{\nu^+}$, donc l'arbre $\widehat{T}$ est convenablement placé dans $\widehat{\mathcal{G}}$, et la condition $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$ est vérifiée.

Supposons maintenant $m_n^\dagger > 1$. Fixons e, V et m comme dans $(\mathbf{B}_n)$. Nous pouvons supposer que $\overline{V} \cap (Q_n^\flat \cup T_{n+1}) = \emptyset$ et que V vérifie les conditions (3)-(5) de la section 3 (X et $\mathcal{F}$ y étant remplacés par X_{n+1} et $\mathcal{F}_{n+1}$). La remarque 3 nous permet de trouver une famille finie $\mathcal{G} = \{G_\kappa \mid \kappa \in K\}$ de sous-ensembles de X_{n+1} dont le nerf est un arbre et telle que, pour une fonction convenable $\xi : K \to \Lambda_{n+1}$, G_κ soit ouvert et fermé dans $F_{\xi(\kappa)} \cap X_{n+1}$ et que le fermé $Q = X_{n+1} \setminus \bigcup_{\kappa \in K} G_\kappa \cap U_{\xi(\kappa)}^{n+1}$ soit contenu dans V. Nous pouvons en outre supposer que $\mathcal{G}$ recouvre X_{n+1} (remarque 2). Nous pouvons aussi trouver un arbre T contenu dans X_{n+1} et contenant T_{n+1} qui est convenablement placé dans $\mathcal{G}$; soient $\{C_\kappa \mid \kappa \in K\}$ les composantes distinguées des $G_\kappa \cap T$.

Puisque $\overline{V} \cap Q_n^\flat = \emptyset$ et que $Q_n \cap U_\lambda^{n+1} = \emptyset$ pour $\lambda \in M_n$, nous avons $Q_n \subset \bigcup \{G_\kappa \cap U_{\nu^+}^{n+1} \mid \xi(\kappa) = \nu^+\}$. Si $\kappa \in \xi^{-1}(\nu^+)$ et si $y \in C_\kappa$, alors, un argument utilisé dans la démonstration du lemme 7 garantit que, pour tout $i \leq m_n$, il existe $\kappa_i \in \xi^{-1} \circ \theta_{n+1}^{-1}(\lambda_i)$ tel que $[y, q_n(y)] \cap L_i \subset C_{\kappa_i}$.

Il existe $\mu_\# \in \pi_n^{-1}(\lambda_\#^n)$ tel que $C_{\mu_\#} \subset L_\#^n$. Cela résulte de la définition de $m_n^\dagger$ lorsque $m_n^\dagger \leq m_n$ et $\lambda_\#^n = \lambda_{m_n,n}^x$ ($x \in Q_n^\flat$). Lorsque $m_n^\dagger = m_n + 1$, il n'existe pas d'indice $\mu \in \pi_n^{-1}(\lambda_{m_n})$ tel que $C_\mu \subset L_{m_n}$, et $\lambda_\#^n$ est l'élément distinct de λ_{m_n} tel que $L_{m_n} \cap T_{n+1} \subset F_{\lambda_\#^n}$. Dans ce dernier cas, $\mu_\#$ est l'élément de $\pi_n^{-1}(\lambda_\#^n)$ tel que $F_{\mu_\#}$ contienne $L_{m_n} \cap T_{n+1}$, et $C_{\mu_\#}$ contient un point $z_\#$ n'appartenant pas à $\bigcup \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n \setminus \{\lambda_\#^n\}\}$ (à moins que $T_{n+1} = C_{\mu_\#}$, mais alors $\Lambda_n = \{\lambda_\#^n, \lambda_{m_n}\}$, et ce cas est trivial), et $z_\#$ n'appartient pas à F_λ pour $\lambda \in \Lambda_{n+1} \setminus \{\mu_\#\}$.

Il existe $\kappa_\# \in \xi^{-1}(\mu_\#)$ tel que $C_{\mu_\#} \subset C_{\kappa_\#}$. Si $m_n^\dagger = m_n + 1$, cela résulte du fait que $\mu_\#$ est le seul élément de Λ_{n+1} tel que $F_{\mu_\#}$ contienne $z_\#$. Si

$m_n^\dagger \leq m_n$, alors $\lambda_\#^n = \lambda_{m_n^\dagger}$ et, comme nous l'avons remarqué plus haut, il existe $y \in T$ et $\kappa_\# \in \xi^{-1}(\theta_{n+1}^{-1}(\lambda_{m_n^\dagger}))$ tels que $[y, q_n(y)] \cap L_{m_n^\dagger} \subset C_{\kappa_\#}$; alors, $C_{\kappa_\#} = L_{m_n^\dagger} \cap T$ contient $C_{\mu_\#} = L_{m_n^\dagger} \cap T_{n+1}$.

Soit N le sous-complexe plein de $N(\mathcal{G})$ engendré par les sommets distincts de $\kappa_\#$. Tous les $\kappa \in K$ tels que $\xi(\kappa) = \nu^+$ sont contenus dans une seule composante Z de N. En effet, si $\xi(\kappa) = \nu^+$ et si $y \in C_\kappa$, alors il existe $\kappa_1 \in \xi^{-1} \circ \theta_{n+1}^{-1}(\lambda_1)$ tel que $[y, q_n(y)] \cap L_1 \subset C_{\kappa_1}$, et $C_{\kappa_1} = L_1 \cap T$ ne dépend pas de κ ; puisque, ou bien $m_n > 1$, ou bien $m_n = 1$ et $m_n^\dagger = 2$, nous avons $(\lambda_1, L_1) \neq (\lambda_\#, L_\#)$, donc $\kappa_1 \neq \kappa_\#$, et Z est la composante de N contenant κ_1. Soit K_Z l'ensemble des sommets de N_Z et κ_Z le sommet de N_Z adjacent à $\kappa_\#$. Nous avons $\theta_{n+1} \circ \xi(\kappa_Z) = \lambda_{m_n^\dagger - 1}$ et $C_{\kappa_Z} = L_{m_n^\dagger - 1} \cap T$; en effet, si κ appartient à $\xi^{-1}(\nu^+)$ et y à C_κ, alors, puisque $(\lambda_i, L_i) \neq (\lambda_\#^n, L_\#^n)$ pour $i < m_n^\dagger$, l'élément κ_i de $\xi^{-1} \circ \theta_{n+1}^{-1}(\lambda_i)$ tel que $[y, q_n(y)] \cap L_i \subset C_{\kappa_i}$ appartient à K_Z, d'où l'affirmation puisque $[y, q_n(y)] \cap L_{m_n^\dagger - 1} \cap L_\#^n \neq \emptyset$.

Posons $T_Z = \bigcup_{\kappa \in K_Z} C_\kappa$; c'est un sous-arbre de T tel que $T_Z \cap C_{\kappa_\#} \neq \emptyset$, donc l'arc $[u, v]$ irréductible entre T_Z et T_{n+1} est contenu dans $C_{\kappa_\#}$. Alors $\widehat{T} = T_{n+1} \cup T_Z \cup [u, v]$ est un sous-arbre de T. Posons $\widehat{K} = M_n \cup K_Z$, et définissons $\hat{\xi} : \widehat{K} \to \Lambda_{n+1}$ par $\hat{\xi} | M_n = id$ et $\hat{\xi} | K_Z = \xi | K_Z$. Pour $\mu \in M_n$, soit $\widehat{C}_\mu$ la composante de $\widehat{T} \cap F_\mu$ qui contient C_μ et, pour $\kappa \in K_Z$, soit $\widehat{C}_\kappa$ la composante de $\widehat{T} \cap G_\kappa$ qui contient C_κ. Les C_μ avec $\mu \in M_n$ recouvrent T_{n+1}, et les C_κ avec $\kappa \in K_Z$ recouvrent T_Z ; comme en outre $[u, v]$ est contenu dans $\widehat{C}_{\mu_\#}$, nous avons $\widehat{T} = \bigcup_{\hat{\kappa} \in \widehat{K}} \widehat{C}_{\hat{\kappa}}$.

Soit $\widehat{N}$ l'arbre obtenu en rajoutant le 1-simplexe $\langle \mu_\#, \kappa \rangle$ à la réunion disjointe de $N(\mathcal{G})$ et de N_Z. Pour tout $\hat{\kappa} \in \widehat{K}$, nous construirons un fermé $\widehat{G}_{\hat{\kappa}}$, qui contient $\widehat{C}_{\hat{\kappa}}$ et est réunion de composantes de $F_{\hat{\xi}(\hat{\kappa})} \cap X_{n+1}$, de façon que $X_{n+1} = \bigcup_{\hat{\kappa} \in \widehat{K}} \widehat{G}_{\hat{\kappa}} \cap U_{\hat{\xi}(\hat{\kappa})}^{n+1}$ et que le nerf de la famille $\widehat{\mathcal{G}} = \{\widehat{G}_{\hat{\kappa}} \mid \hat{\kappa} \in \widehat{K}\}$ soit isomorphe à l'arbre $\widehat{N}$. Il en résultera que X_{n+1} vérifie les conditions (I) et (II) de la propriété $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$.

Puisque $\mathcal{G}$ recouvre X_{n+1}, l'ensemble

$$O = G_{\kappa_\#} \setminus \bigcup_{\kappa \neq \kappa_\#} G_\kappa = X_{n+1} \setminus \bigcup_{\kappa \neq \kappa_\#} G_\kappa$$

est ouvert dans X_{n+1}. Pour $x \in Q_n \cap X_{n+1}$, nous avons $L_x^+ \subset L_1 \subset G_{\kappa_1}$, donc la composante D de $X_{n+1} \setminus O$ qui contient T_Z contient aussi $Q_n \cap X_{n+1}$.

Si μ appartient à $M_n \setminus \{\mu_\#\}$, alors $C_\mu \cap D = \emptyset$. En effet, si x appartient à $C_\mu \cap D$, alors l'arc de $T_{n+1} \subset T$ irréductible entre x et $C_{\mu_\#} = C_{\kappa_\#} \cap T_{n+1}$ doit contenir un point z de $G_{\kappa_1} \setminus \bigcup_{\kappa \neq \kappa_1} G_\kappa$, et il existe $\mu' \in M_n$ et $\kappa' \in K$ tels que $z \in C_{\mu'} \cap C_{\kappa'}$, d'où $\xi(\kappa') = \mu'$ et $C_{\mu'} = C_{\kappa'} \cap T_{n+1}$. Comme T est convenablement placé dans $\mathcal{G}$, nous avons $\kappa' = \kappa_1$, d'où $\pi_n(\mu') = \theta_{n+1}(\mu') = \theta_{n+1} \circ \xi(\kappa_1) = \lambda_{m_n^\dagger - 1}$, et $C_{\mu'} \subset C_{\kappa_1} \subset L_{m_n^\dagger - 1}$, ce qui contredit la définition de $m_n^\dagger$.

Nous pouvons supposer que les ensembles D et Q sont disjoints. En effet, si c appartient à $D\cap Q$ et x à $Q_n\cap X_{n+1}$, alors l'arc $[c,d]$ irréductible entre c et la composante de $[x,q_n(x)]\setminus O$ qui contient x, est contenu dans D, et $[c,q_n(c)]=[c,d]\cup[d,q_n(x)]$. Si d n'appartient pas à $C_{\kappa_\#}$, il existe $i<m_n^\dagger$ tel que $L_i\cap[d,q_n(x)]\setminus\bigcup\{F_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda_n\setminus\{\lambda_i\}\}\neq\emptyset$, et il existe $j\leq m(c,T_n)$ tel que $(\lambda_i,L_i)=(\lambda^c_{j,n},L^c_{j,n})$, en contradiction avec $(\mathbf{B}_n)$. Si $d\in C_{\kappa_\#}$ et $c\notin L^n_\#$, il y a un $j\leq m(c,T_n)$ tel que $(\lambda^c_{j,n},L^c_{j,n})\neq(\lambda^n_\#,L^n_\#)$ et $L^c_{j,n}\cap C_{\kappa_\#}\neq\emptyset$; comme $(\lambda^c_{j,n},L^c_{j,n})\neq(\lambda_{m_n^\dagger-1},L_{m_n^\dagger-1})$, l'arc irréductible entre $L^c_{j,n}$ et d, qui est contenu dans $[c,d]$, rencontre O, ce qui est absurde. Supposons enfin que c appartienne à $L^n_\#\subset G_{\kappa_\#}$; puisque c n'appartient pas à $G_{\kappa_\#}\cap U^{n+1}_{\xi(\kappa_\#)}$, $\mu_\#=\xi(\kappa_\#)$ est l'élément de Λ_{n+1} tel que $c\in F_{\mu_\#}\setminus U^{n+1}_{\mu_\#}$. Procédons alors comme dans le cas où $m_n^\dagger=1$ ci-dessus : rajoutons à $\mathcal{G}$ un sous-ensemble ouvert et fermé convenable de $F_{\mu_\#}\cap X_{n+1}$ contenant $L^n_\#\cap X_{n+1}$, et à T l'arc $[c,q_{n+1}(c)]\subset L^n_\#$; après cette modification, le sous-ensemble Q correspondant est disjoint de $L^n_\#$.

Puisque G_κ est ouvert et fermé dans $F_{\xi(\kappa)}$, l'ensemble $G_\kappa\cap U^{n+1}_{\xi(\kappa)}$ est ouvert dans X_{n+1} pour tout $\kappa\in K$. Comme D est disjoint de Q, il est contenu dans la réunion des $G_\kappa\cap U^{n+1}_{\xi(\kappa)}$. Comme $N(\mathcal{G})$ est un arbre, $D\cap G_\kappa=\emptyset$ si $\kappa\notin K'=K_Z\cup\{\kappa_Z\}$, donc D est contenu dans l'ouvert $P=\bigcup_{\kappa\in K'}G_\kappa\cap U^{n+1}_{\xi(\kappa)}$.

Puisque la composante D de $X_{n+1}\setminus O$ est contenue dans l'ouvert P et disjointe du fermé $Q\cup\bigcup\{C_\mu\,|\,\mu\in M_n\setminus\{\mu_\#\}\}$, nous pouvons trouver un sous-ensemble Y de $X_{n+1}\setminus O$, ouvert et fermé dans $X_{n+1}\setminus O$, contenu dans P, et tel que $D\subset Y$ et $\big(Q\cup\bigcup\{C_\mu\,|\,\mu\in M_n\setminus\{\mu_\#\}\}\big)\cap Y=\emptyset$. Posons

$$\widetilde{G}_\kappa=G_\kappa\cap Y \text{ pour tout } \kappa\in K_Z,$$

$$\widetilde{G}_\mu=F_\mu\setminus Y \text{ pour tout } \mu\in M_n\setminus\{\mu_\#\},$$

$$\widetilde{G}_{\mu_\#}=F_{\mu_\#}\setminus\bigcup\{\widetilde{G}_\kappa\,|\,\kappa\in K_Z \text{ et } \xi(\kappa)=\mu_\#\}.$$

Si $\kappa\in K_Z$, alors G_κ est contenu dans $X_{n+1}\setminus O$, et $\widetilde{G}_\kappa$ est ouvert et fermé dans G_κ, donc aussi dans $F_{\xi(\kappa)}=F_{\hat{\xi}(\kappa)}$. Pour les mêmes raisons, $\widehat{G}_\mu$ est ouvert et fermé dans $F_\mu=F_{\hat{\xi}(\mu)}$ pour $\mu\in M_n\setminus\{\mu_\#\}$. Enfin, $\widetilde{G}_{\mu_\#}$ est ouvert et fermé dans $F_{\mu_\#}$, puisque son complémentaire dans $F_{\mu_\#}$ l'est.

Pour $\kappa\in K_Z$, C_κ est contenu dans Y, donc dans $\widetilde{G}_\kappa$, et il en est de même de $\widehat{C}_\kappa$, puisque c'est une composante de $G_\kappa\cap\widehat{T}$. Pour $\mu\in M_n\setminus\{\mu_\#\}$, C_μ est contenu dans $X_{n+1}\setminus Y$, donc C_μ et $\widehat{C}_\mu$ sont contenus dans $\widetilde{G}_\mu$. Enfin, puisque T est convenablement placé dans $\mathcal{G}$, $C_{\kappa_\#}\cap G_\kappa=\emptyset$ pour tout $\kappa\in K_Z$ tel que $\xi(\kappa)=\mu_\#$ et, comme $C_{\kappa_\#}$ est la composante de $F_{\mu_\#}\cap T$ qui contient $C_{\mu_\#}$, elle est contenue dans $\widetilde{G}_{\mu_\#}$, et il en est de même de $\widehat{C}_{\mu_\#}$.

Soit x un point de X_{n+1}. Si x n'appartient pas à Y, il n'appartient pas à Q_n, donc il existe $\mu\in M_n$ tel que $x\in U^{n+1}_\mu$, et x appartient à $\widetilde{G}_\mu\cap U^{n+1}_{\hat{\xi}(\mu)}$ (même dans le cas où $\mu=\mu_\#$, car x n'appartient alors à aucun $\widetilde{G}_\kappa$ avec

$\kappa \in K_Z$). Si x appartient à $Y \subset P$, il existe $\kappa \in K'$ tel que $x \in G_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi(\kappa)}$. Si $\kappa \neq \kappa_\#$, alors x appartient à $\widetilde{G}_\kappa \cap U^{n+1}_{\hat{\xi}(\kappa)}$, et si $\kappa = \kappa_\#$, alors x appartient à $F_{\mu_\#}$ et ne peut appartenir à aucun $G_{\kappa'}$ tel que $\kappa' \in K_Z$ et $\xi(\kappa') = \mu_\#$, donc il appartient à $\widetilde{G}_{\mu_\#} \cap U^{n+1}_{\mu_\#}$. Nous avons donc $X_{n+1} = \bigcup_{\hat{\kappa} \in \widehat{K}} \widetilde{G}_{\hat{\kappa}} \cap U^{n+1}_{\hat{\xi}(\hat{\kappa})}$.

Soit $\widetilde{\mathcal{G}} = \{\widetilde{G}_{\hat{\kappa}} \mid \hat{\kappa} \in \widehat{K}\}$. Comparons $N(\widetilde{\mathcal{G}})$ et $\widehat{N}$. Si κ, κ' sont deux éléments de K_Z tels que $\widetilde{G}_\kappa \cap \widetilde{G}_{\kappa'} \neq \emptyset$, alors $G_\kappa \cap G_{\kappa'} \neq \emptyset$; inversement, si $G_\kappa \cap G_{\kappa'} \neq \emptyset$, alors $C_\kappa \cap C_{\kappa'} \neq \emptyset$ (T est convenablement placé dans $\mathcal{G}$), donc $\widetilde{G}_\kappa \cap \widetilde{G}_{\kappa'} \neq \emptyset$. Un raisonnement analogue montre que si μ et μ' appartiennent à M_n, alors $\widetilde{G}_\mu \cap \widetilde{G}_{\mu'} \neq \emptyset$ si, et seulement si, $F_\mu \cap F_{\mu'} \neq \emptyset$. Donc $N(\widetilde{\mathcal{G}})$ ne peut être distinct de $\widehat{N}$ que s'il existe $\kappa \in K_Z$ tel que $\kappa \neq \kappa_Z$ et $\widetilde{G}_\kappa \cap \widetilde{G}_{\mu_\#} \neq \emptyset$.

Soit $\kappa \in K_Z$ tel que $\kappa \neq \kappa_Z$ et $\widetilde{G}_\kappa \cap \widetilde{G}_{\mu_\#} \neq \emptyset$. Par définition de $\widetilde{G}_{\mu_\#}$, nous avons $\xi(\kappa) \neq \mu_\#$. Il n'existe pas d'indice $\kappa' \neq \kappa$ dans K' tel que $\widetilde{G}_{\kappa'} \cap \widetilde{G}_\kappa \cap \widetilde{G}_{\mu_\#} \neq \emptyset$, car $\xi(\kappa')$ devrait être distinct de $\xi(\kappa)$, donc égal à $\mu_\#$, et κ' serait distinct de κ_Z, or un tel $\widetilde{G}_{\kappa'}$ est disjoint de $\widetilde{G}_{\mu_\#}$. Soit $x \in \widetilde{G}_\kappa \cap \widetilde{G}_{\mu_\#}$, et soit $L^x_\#$ la composante de $F_{\mu_\#} \cap X_{n+1}$ qui contient x. Comme $\widetilde{G}_\kappa \subset P$ et $\widetilde{G}_\kappa \cap \widetilde{G}_{\mu_\#} \cap \widetilde{G}_{\kappa'} = \emptyset$ pour $\kappa \neq \kappa' \in K'$, nous avons $L^x_\# \cap \widetilde{G}_\kappa \subset U^{n+1}_{\xi(\kappa)}$. Si l'ensemble $\widetilde{G}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi(\kappa)}$, qui est ouvert dans X_{n+1}, ne contenait pas $L^x_\#$, sa frontière (relativement à X_{n+1}) devrait contenir un point y de $L^x_\#$; comme cette frontière est contenue dans le fermé $\widetilde{G}_\kappa \subset P$, il devrait exister $\kappa' \neq \kappa$ dans K' tel que $y \in U^{n+1}_{\xi(\kappa')}$, d'où $y \in \widetilde{G}_{\kappa'}$, ce qui est impossible. La réunion S_κ des composantes de $F_{\mu_\#} \cap X_{n+1}$ qui rencontrent $\widetilde{G}_\kappa \cap \widetilde{G}_{\mu_\#}$ est donc contenue dans l'ouvert $\widetilde{G}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi(\kappa)}$. Comme $\kappa \neq \kappa_Z$, nous avons $G_\kappa \cap G_{\kappa_\#} = \emptyset$ et, puisque $\widehat{C}_{\mu_\#}$ est contenu dans $G_{\kappa_\#}$, S_κ est disjoint de $\widehat{C}_{\mu_\#}$. Nous pouvons donc trouver un sous-ensemble R_κ de $F_{\mu_\#} \cap X_{n+1}$, ouvert et fermé dans $F_{\mu_\#} \cap X_{n+1}$ tel que $S_\kappa \subset R_\kappa \subset \widetilde{G}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi(\kappa)}$ et $R_\kappa \cap \widehat{C}_{\mu_\#} = \emptyset$.

Posons $\widehat{G}_{\hat{\kappa}} = \widetilde{G}_{\hat{\kappa}}$ pour $\hat{\kappa} \in \widehat{K} \setminus \{\mu_\#\}$, et soit $\widehat{G}_{\mu_\#} = \widetilde{G}_{\mu_\#} \setminus \bigcup R_\kappa$, la réunion étant étendue à tous les $\kappa \in K_Z$ tels que $\xi(\kappa) = \mu_\#$ et $\widetilde{G}_{\mu_\#} \cap \widetilde{G}_\kappa \neq \emptyset$. Nous avons encore $\widetilde{C}_{\hat{\kappa}} \subset \widetilde{G}_{\hat{\kappa}}$ pour tout $\hat{\kappa} \in \widetilde{K}$, et la définition des R_κ garantit que $\widehat{G}_{\mu_\#} \cap \widetilde{G}_\kappa = \emptyset$ pour tout $\kappa \in K_Z \setminus \{\kappa_Z\}$, donc le nerf de la famille $\widehat{\mathcal{G}} = \{\widehat{G}_{\hat{\kappa}} \mid \hat{\kappa} \in \widehat{K}\}$ est isomorphe à $\widehat{N}$. Puisque R_κ est contenu dans $\widetilde{G}_\kappa \cap U^{n+1}_{\xi(\kappa)}$, nous avons

$$\bigcup_{\hat{\kappa} \in \widehat{K}} \widehat{G}_{\hat{\kappa}} \cap U^{n+1}_{\hat{\xi}(\hat{\kappa})} = \bigcup_{\hat{\kappa} \in \widehat{K}} \widetilde{G}_{\hat{\kappa}} \cap U^{n+1}_{\hat{\xi}(\hat{\kappa})} = X_{n+1}.$$

La famille $\widehat{\mathcal{G}}$ a donc toutes les propriétés souhaitées, d'où le lemme. $\square$

Lemme 9. *Si le cas* $(\mathbf{C}_n)$ *s'applique, alors* X_{n+1} *a la propriété* $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$.

Démonstration. Comme nous l'avons remarqué dans la démonstration du lemme 8, il existe un unique $\nu^- \in M_n^-$ tel que $F_{\nu^-} \cap Q_n^\flat \neq \emptyset$, et si ν^+ est l'élément correspondant de M_n^+, alors $Q_n^\flat \cap X_{n+1} \subset F_{\nu^+}$.

Fixons $e \in E_{n+1}$. Si X_{n+1} est un arbre, il a la propriété $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$. Sinon, E_{n+1} contient un élément $e' \neq e$. Si Λ_{n+1} ne contient aucun λ tel que $e' \in F_\lambda \setminus U_\lambda$, alors X_{n+1} a la propriété $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$ d'après ce que nous avons vu à la section 3. Dans le cas contraire, que nous supposerons, e' appartient à $U_{\nu^+} \cap (F_{\nu^-} \setminus U_{\nu^-})$.

Prenons un voisinage ouvert V de e dans X_{n+1} tel que $V \cap F_\lambda = \emptyset$ pour $\lambda \in \Lambda_{n+1} \setminus \{\nu^-, \nu^+\}$, que $X_{n+1} \setminus V$ soit connexe et que $e' \notin V$. La construction de la section 3 nous fournit une famille finie $\mathcal{G} = \{G_\kappa \mid \kappa \in K\}$ de sous-ensembles de X_{n+1} dont le nerf est un arbre et telle que, pour une fonction convenable $\xi : K \to \Lambda_{n+1}$, G_κ soit ouvert et fermé dans $F_{\xi(\kappa)} \cap X_{n+1}$ et que le fermé $Q = X_{n+1} \setminus \bigcup_{\kappa \in K} G_\kappa \cap U_{\xi(\kappa)}^{n+1}$ soit contenu dans V. Elle nous fournit aussi un arbre T contenu dans X_{n+1} et contenant T_{n+1} qui est convenablement placé dans $\mathcal{G}$.

Puisque e' n'appartient pas à V, il existe $\kappa^+ \in K$ tel que $e' \in G_{\kappa^+} \cap U_{\xi(\kappa^+)}^{n+1}$. Nécessairement, $\xi(\kappa^+) = \nu^+$. Comme $L_{1,n}^{e'} \cap X_{n+1}$ est la composante de $X_{n+1} \cap F_{\lambda_n^-}$ contenant e', il doit exister un $\kappa^- \neq \kappa^+$ tel que $L_{1,n}^{e'} \cap G_{\kappa^-} \cap G_{\kappa^+} \neq \emptyset$; nécessairement $\xi(\kappa^-) = \nu^-$. L'ensemble $\widetilde{G}_{\kappa^+} = G_{\kappa^+} \cup \bigcup_{x \in Q} (L_{x,n}^+ \cap X_{n+1})$ est fermé. Soit $\widetilde{\mathcal{G}}$ la famille obtenue en remplaçant G_{κ^+} par $\widetilde{G}_{\kappa^+}$ (sans changer les autres G_κ). Comme $L_{x,n}^+ \subset L_{1,n}^{e'} \subset G_{\kappa^-}$ pour tout $x \in Q$, ce remplacement ne change pas le nerf de $\mathcal{G}$, donc T est encore convenablement placé dans $\widetilde{\mathcal{G}}$. Mais maintenant, $Q \subset \widetilde{G}_{\kappa^+} \cap U_{\nu^+}^{n+1}$, et la condition (II) de la propriété $\mathcal{P}_{n+1}(T_{n+1})$ est aussi vérifiée, d'où le lemme. □

Ainsi, si l'un des cas $(\mathbf{A}_n)$-$(\mathbf{C}_n)$ s'applique, nous avons obtenu la contradiction souhaitée, et la démonstration s'arrête là. Sinon, deux possibilités seprésentent.

$(\mathbf{D}_n)$ $m_n' > 0$ et $m_n^\dagger > m_n' + 1$.

$(\mathbf{E}_n)$ $m_n' = 0$ et les cas $(\mathbf{B}_n)$ et $(\mathbf{C}_n)$ ne s'appliquent pas.

Nous choisissons alors un point $e_{n+1} \in E_{n+1}$, un voisinage ouvert V_{n+1} de e_{n+1} dans X_{n+1} et un entier m_{n+1} vérifiant les conditions du lemme 6 relativement à $\mathcal{F}_{n+1}$, X_{n+1} et T_{n+1} selon les règles suivantes :

Si $(\mathbf{D}_n)$ s'applique, nous décomposons $Q_n^\flat \cap X_{n+1} = B_0 \cup B_1$, où B_0 et B_1 sont des ouverts disjoints de $\overline{V}_n \cap X_{n+1}$ tels que $B_0 \cap Q_n^\flat \neq \emptyset \neq B_1 \cap Q_n^\flat$ et que $L_{m_n',n}^x \neq L_{m_n',n}^y$ quels que soient $x \in B_0$ et $y \in B_1$ (voir la démonstration du lemme 7). Comme $Q_n \cap X_{n+1}$ n'est pas vide, nous pouvons supposer que $B_1 \cap Q_n \neq \emptyset$. Puisque $X_{n+1} \setminus V_n$ est connexe et que B_0 est réunion de composantes de $\overline{V}_n \cap X_{n+1}$, $B_0 \cap E_{n+1}$ n'est pas vide, et la remarque 5 nous permet de choisir e_{n+1} de façon que $\overline{V}_{n+1} \subset B_0$.

Si $(\mathbf{E}_n)$ s'applique, alors $E_{n+1} \setminus Q_n^\flat \neq \emptyset$, et nous choisissons V_{n+1} de façon que $\overline{V}_{n+1} \cap Q_n^\flat = \emptyset$.

Pour achever la démonstration du lemme 2, il nous reste à traiter le cas où la construction des X_n se poursuit indéfiniment. Pour $n \geq 0$, soit $\lambda_n = \rho_n(\lambda_\#^n) \in \Lambda$, et soit L_n la composante de F_{λ_n} qui contient $L_\#^n$. Notons que J_n est aussi l'arc irréductible entre a et L_n.

Lemme 10. *Pour tout $n \geq 0$, $J_n \subset J_{n+1}$ et, pour tout $n > 0$ $[a_n, a_{n+1}]$ contient un point b_n n'appartenant pas à $\bigcup\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n \setminus \{\lambda_n\}\}$.*

Démonstration. Rappelons que nous avons ou bien $m_n^\dagger \leq m_n$ et $(\lambda_\#^n, L_\#^n) = (\lambda^x_{m_n^\dagger,n}, L^x_{m_n^\dagger,n})$ pour tout $x \in Q_n^\flat$, ou bien $m_n^\dagger = m_n + 1$, $\lambda_\#^n \neq \lambda^x_{m_n,n}$ et $L_\#^n$ contient $L^x_{m_n,n} \cap T_n$ pour tout $x \in Q_n^\flat$. Par conséquent, si $i < m_n^\dagger$, l'arc irréductible entre a et $L^x_{i,n}$, $x \in Q_n^\flat$, contient a_n. Posons $i_n = m_n^\dagger - 1$.

Le choix de V_{n+1} garantit que $Q_n \setminus V_{n+1} \neq \emptyset$, donc il existe $\mu_0 \in M_{n+1}$ tel que $F_{\mu_0} \cap U^{n+1}_{\pi_{n+1}(\mu_0)} \cap (Q_n \setminus V_{n+1}) \neq \emptyset$. Alors $\pi_{n+1}(\mu_0)$ appartient nécessairement à M_n^+. Si y est un point de C_{μ_0}, la composante de y dans $F_{\lambda_n^+}$ contient un point x de $Q_n^\flat$ et, comme dans la démonstration du lemme 7, pour tout $i \leq m_n$, $L^x_{i,n} \cap [y, q_n(y)]$ contient un point n'appartenant pas à $\bigcup\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n \setminus \{\lambda_{i,n}\}\}$, ce qui entraîne l'existence d'un élément $\mu_i \in \pi^{-1}_{n+1}(\lambda^x_{i,n})$ tel que $[y, q_n(y)] \cap L^x_{i,n} \subset C_{\mu_i}$, ainsi que d'un $\mu_i' \in \pi^{-1}_{n+2}(\mu_i)$ tel que $C_{\mu_i} \subset C_{\mu_i'}$.

Pour tout $z \in X_{n+1}$, $[z, q_{n+1}(z)]$ est contenu dans $[z, q_n(z)]$. Il en résulte que $m(z, T_{n+1}) \leq m(z, T_n)$ et que, pour tout $i \leq m(z, T_{n+1})$, nous avons $\lambda^z_{i,n} = \theta_{n+1}(\lambda^z_{i,n+1})$ et $L^z_{i,n+1} = L^z_{i,n} \cap X_{n+1}$.

Si le cas $(\mathbf{D}_n)$ s'applique, alors $m_n' < m_n$, et il découle de ce qui précède que, pour $m_n' < i \leq m_n$ et $z \in \overline{V}_{n+1}$, $L^z_{i,n+1}$ contient la composante distinguée C_{μ_i}, donc $m_{n+1} \leq m_n' + 1$, $m'_{n+1} \leq m_n'$, et il existe $i \leq m_n' + 1 < m_n^\dagger$ tel que $\theta_{n+1}(\lambda_\#^{n+1}) = \lambda^x_{i,n}$ et $L_\#^{n+1} = L^x_{i,n} \cap X_{n+1}$. L'inclusion $J_n \subset J_{n+1}$ en résulte.

Si le cas $(\mathbf{E}_n)$ s'applique, alors il existe $y \in \overline{V}$ et $j \leq m(y, T_n)$ tels que $(\lambda^y_{j,n}, L^y_{j,n}) = (\lambda^x_{m_n^\dagger-1}, L^x_{m_n^\dagger-1})$ pour tout $x \in Q_n$. Pout tout $z \in \overline{V}_{n+1}$, nous avons $L^y_{j,n} = L^z_{j,n}$, car sinon l'ensemble R des $z \in \overline{V}_{n+1}$ tels que $L^y_{j,n} \neq L^z_{j,n}$ serait ouvert d'après la remarque 4 et, comme c'est une réunion de composantes de $\overline{V}_{n+1}$, $R \cap V_{n+1}$ contiendrait un point e de E_{n+1}. Remplaçant V_{n+1} par un voisinage V de e tel que $\overline{V} \subset R$, la condition $(\mathbf{B}_n)$ serait alors vérifiée. Comme $L^x_{i_n,n}$ contient la composante distinguée $C_{\mu_{i_n}}$, ou bien $\theta_{n+1}(\lambda_\#^{n+1}) = \lambda^x_{i_n,n}$ et $L_\#^{n+1} = L^x_{i_n,n} \cap X_{n+1}$, ou bien l'arc irréductible entre $L_\#^{n+1}$ et $L_\#^n$ rencontre $L^x_{i_n,n}$, et l'inclusion $J_n \subset J_{n+1}$ en résulte.

Les descriptions précédentes montrent que $(\lambda_{n+1}, L_{n+1}) \neq (\lambda_n, L_n)$ pour tout $n \geq 0$. Compte tenu des inclusions $J_n \subset J_{n+1}$ et de l'irréductibilité des J_n, pour établir l'existence des b_n, il suffit de vérifier que nous avons aussi $(\lambda_{n+2}, L_{n+2}) \neq (\lambda_n, L_n)$. Cela est évident, sauf dans le cas où $\theta_{n+1}(\lambda_\#^{n+1}) =$

$\lambda^x_{i_n,n}$ et $L^{n+1}_{\#} = L^x_{i_n,n} \cap X_{n+1}$. Pour $e = e_{n+1}$, il existe alors un entier $j \le m(e, T_n)$ tel que $(\lambda^x_{i_n,n}, L^x_{i_n,n}) = (\lambda^e_{j,n}, L^e_{j,n})$. Si $m^\dagger_n = m_n + 1$, alors $j = m(e, T_n)$ et $(\lambda^n_{\#}, L^n_{\#}) \ne (\lambda^e_{j',n}, L^e_{j',n})$ pour tout $j' \le m(e, T_n)$, tandis que si $m^\dagger_n \le m_n$, alors $j < m(e, T_n)$ et $L^n_{\#} = L^x_{m^\dagger_n} = L^e_{j+1,n}$. Puisque $L^x_{i_n,n}$ contient $C_{\mu_{i_n}}$, nous avons $m_{n+1} \le j$, et comme $L^x_{i_n,n}$ contient $C_{\mu'_{i_n}}$, nous avons aussi $m^\dagger_{n+1} \le j$. Par conséquent, ou bien $\theta_{n+1}(\theta_{n+2}(\lambda^{n+2}_{\#})) = \lambda^e_{j-1,n}$ et $L^{n+2}_{\#} = L^e_{j-1,n} \cap X_{n+1}$, ou bien $L^{n+2}_{\#} \cap L^e_{j,n} = \emptyset$. La relation $(\lambda_{n+2}, L_{n+2}) \ne (\lambda_n, L_n)$ en résulte. $\square$

D'après un résultat de Borsuk ([1], lemme 3), la suite croissante d'arcs $\{J_n\}$ est contenue dans un arc $J \subset X$. Pour un ordre naturel convenable sur A, nous avons $a_n \le b_n \le a_{n+1}$ pour tout $n \ge 1$, donc les suites $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ et $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ convergent vers un même point de J.

Pour $n \ge 1$, b_n appartient à U_{λ_n}, mais n'appartient pas à $F_{\lambda_{n+1}}$, donc l'irréductibilité de l'arc $J_{n+1} = [a, a_{n+1}]$ entraîne que a_{n+1} n'appartient pas à l'ouvert $U'_{\lambda_{n+1}}$. Pour $\lambda \in \Lambda$, les fermés $\overline{U}_\lambda$ et $F_\lambda \setminus U'_\lambda$ sont disjoints et, comme Λ est fini, il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, y) \ge \delta$ pour tout couple (x, y) de points de X pour lequel il existe λ tel que $x \in \overline{U}_\lambda$ et $y \in F_\lambda \setminus U'_\lambda$. Nous avons donc $d(a_n, b_n) \ge \delta$ pour tout $n > 1$, ce qui contredit le fait que les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ convergent vers le même point, et cette dernière contradiction achève la démonstration du lemme 2.

6. Rétractions et suites projectives

La notation (X_n, p^m_n) désignera une suite projective où X_n, $n \ge 0$, est un espace topologique et $p^m_n : X_m \to X_n$ est une fonction continue pour $n \le m$. Nous noterons X_∞ la limite de cette suite.

Le théorème suivant répond à la question 5.7 de [2].

Théorème 2. *Tout dendroïde est la limite d'une suite projective (X_n, p^m_n) formée d'arbres et de rétractions.*

Démonstration. Soit X un dendroïde. Choisissons la distance sur X de façon que le diamètre de X soit strictement inférieur à un. Par récurrence, nous construirons une suite décroissante de nombres $\epsilon_n > 0$, une suite croissante d'arbres X_n contenus dans X et des rétractions r_n de X sur X_n.

Posons $\epsilon_0 = 1$, prenons pour X_0 un point de X, et soit r_0 l'unique rétraction de X sur X_0. Soit $n > 0$, et supposons ϵ_{n-1}, X_{n-1} et r_{n-1} construits. Pour $i \le n-1$, soit $r^n_i = r_i \circ \cdots \circ r_{n-1} : X \to X_i$. La continuité uniforme des fonctions r^n_i nous permet de trouver $0 < \epsilon_n < \epsilon_{n-1}/2$ tel que

$$d(x, y) < \epsilon_n \text{ entraîne } d(r^n_i(x), r^n_i(y)) < \epsilon_i/2^n \text{ pour tout } i \le n-1.$$

Le théorème 1 nous permet de trouver un arbre X_n contenant X_{n-1} et une ϵ_n-rétraction r_n de X sur X_n. Posons $p^n_n = 1_{X_n}$ et, pour $n < m$, soit

$p_n^m : X_m \to X_n$ la restriction de r_n^m à X_m. Nous obtenons ainsi une suite projective (X_n, p_n^m) formée d'arbres et de rétractions.

Pour $n < j$, nous avons $d(x, r_j(x)) < \epsilon_j$, d'où

$$d(r_n^j(x), r_n^{j+1}(x)) = d(r_n^j(x), r_n^j(r_j(x))) < \epsilon_n/2^j,$$

ce qui entraîne que, pour $n \leq i < j$ et tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(r_n^i(x), r_n^j(x)) &\leq d(r_n(x), r_n^{i+1}(x)) + \cdots + d(r_n^{j-1}(x), r_n^j(x)) \\ &< \epsilon_n(2^{-i} + \cdots + 2^{-(j-1)}) < \epsilon_n.2^{-(i-1)}. \end{aligned}$$

La suite $\{r_n^i\}_{i=n}^\infty$ vérifie donc la condition de Cauchy uniforme, donc converge uniformément vers une fonction continue $f_n : X \to X_n$. Pour $n < m < i$, nous avons $r_i^n = (r_n^m | X_m) \circ r_m^i = p_n^m \circ r_m^i$, d'où, en passant à la limite, $f_n = p_n^m \circ f_m$ pour $n < m$. Les f_n définissent donc une fonction continue $f : X \to X_\infty$.

Comme les p_n^m sont des rétractions, X_m s'identifie au sous-espace de X_∞ formé des points $(p_0^m(x), \dots, p_{m-1}^m(x), x, x, \dots)$ où $x \in X_m$. Pour $m \leq n < j$ et $x \in X_m$, nous avons $r_n^j(x) = x$, d'où $f_n(x) = x$. Cela entraîne que le compact $f(X)$ contient X_m pour tout m. Mais $\bigcup_{m=0}^\infty X_m$ est dense dans X_∞, donc f est surjective.

Soient x, y deux points distincts de X. Puisque la suite $\{\epsilon_n\}$ tend vers zéro, il existe $n > 0$ tel que $d(x, y) > 4\epsilon_n$. Pour $i > n$, nous avons

$$d(r_n(x), r_n^i(x)) = d(r_n^{n+1}(x), r_n^i(x)) < \epsilon_n.2^{-(n-1)},$$

d'où $d(r_n(x), f_n(x)) \leq \epsilon_n.2^{-(n-1)}$; de même, $d(r_n(y), f_n(y)) \leq \epsilon_n.2^{-(n-1)}$, d'où

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_n(y)) &\geq d(x, y) - d(x, r_n(x)) - d(y, r_n(y)) \\ &\quad - d(r_n(x), f_n(x)) - d(r_n(y), f_n(y)) \\ &> 4\epsilon_n - 2\epsilon_n - 2.\epsilon_n.2^{-(n-1)} > 0. \end{aligned}$$

La fonction f est donc aussi injective, donc un homéomorphisme de X sur X_∞. □

Références

[1] K. Borsuk, *A theorem on fixed points*, Bull. Acad. Pol. Sci. 2, 1954, 17-20.

[2] J. J. Charatonik and J. R. Prajs, *AANR spaces and absolute retracts for tree-like continua*, Czech. Math. J. 55 (130), 2005, 877-891.

[3] H. Cook, *Tree-likeness of dendroids and λ-dendroids.* Fund. Math. 68, 1970, 19-22.

[4] C. Eberhart, *Intervals of continua which are Hilbert cubes*, Proc. Amer. Math. Soc. 68, 1978, 220-224.

[5] C. Eberhart and J. B. Fugate, *Approximating continua from within*, Fund. Math. 72, 1971, 223-231.

[6] J. B. Fugate, *Retracting fans onto finite fans*, Fund. Math. 71, 1971, 113-125.

[7] J. B. Fugate, *Small retractions of smooth dendroids onto trees*, Fund. Math. 71, 1971, 255-262.

[8] J. Krasinkiewicz and P. Minc, *Dendroids and their endpoints*, Fund. Math. 99, 1978, 227-244.

[9] C. Kuratowski, *Topologie II*, P. W. N., Warszawa, 1961.

[10] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker, New York, 1978.

Université Paris 6, Institut de Mathématiques de Jussieu, case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

E-mail address: cauty@math.jussieu.fr