National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
Institute of Mechanics of NAS of Ukraine
Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine

XV International Conference

DYNAMICAL SYSTEM MODELLING AND STABILITY INVESTIGATION

MODELLING & STABILITY

ABSTRACTS OF CONFERENCE REPORTS
Kiev, Ukraine

May 25-27, 2011

ВІСНИК
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

The various aspects of theoretical and applied researches are represented in abstracts of conference reports. Problems of adequate mathematical model of studied processes are considered.
Problems of control synthesis and stability investigation of movements are separately allocated. Significant numbers of papers are devoted to modeling of economic problems, biological and social phenomena. Big quantity of reports resented at the conference is devoted to the problems of applied mechanics. Logic-mathematical methods of modeling are considered.
Prepared by Kukharenko O.V.

Recommended for printing by Scientific Council of Cybernetics faculty of Kiev University.
Scientific Editor: doctor of physical and mathematical sciences
Khusainov D.Ya.
Reviewer: doctor of physical and mathematical sciences
Boychuk A.A.

В тезисах докладов конференции представлены различные аспекты теоретических и прикладных исследований. Рассмотрены вопросы создания математических моделей, адекватно описывающих исследуемые объекты.
Отдельно рассмотрены проблемы синтеза управления и исследования устойчивости движения. Значительное количество работ связано с моделированием экономических, биологических и социальных процессов. Большое количество работ посвящено проблемам теоретической и прикладной механики. Рассмотрены логико-математические методы моделирования.
Подготовлено Кухаренко А.В.

Рекомендовано к печати Ученым Советом факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко
Научный редактор: доктор физ.-мат. наук
Хусаинов Д.Я.
Рецензент: доктор физ.-мат. наук
Бойчук А.А.

В тезах доповідей конференції представлено різні аспекти теоретичних та прикладних досліджень. Розглянуто питання створення математичних моделей, що адекватно описують об'єкти.
Окремо розглянуто проблему синтезу керування та дослідження стійкості руху. Значна кількість праць пов'язана із моделюванням економічних, біологічних та соціальних процесів. Велика кількість праць присвячена проблемам теоретичної та прикладної механіки. Розглянуті логіко-математичні методи моделювання.
Підготовлено Кухаренко О.В.

Рекомендовано до друку Вченою Радою факультету кібернетики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
Вчений редактор: доктор фіз.-мат. наук
Хусаінов Д.Я.
Рецензент: доктор фіз.-мат. наук
Бойчук А.А.

Адреса редакційної колегії:
03125, Київ, проспект акад. Глушкова 4д, корп. 6, КНУ ім. Тараса Шевченка, факультет кібернетики, тел. (044) 258-89-84
ISBN 966-76-52-00-9

During the period May 25 – 27, 2011 the traditional international conference "Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation" was held. The members of committees were

SCIENTIFIC COMMITTEE
Babaev A.E. (Kyiv, Ukraine),
Bastinec J. (Brno, Czech Republic),
Bohner M. (Rolla, USA),
Chikrii A.A. (Kyiv, Ukraine),
Diblik J. (Brno, Czech Republic),
Dmitriev M.G. (Moscow, Russia),
Domoshnitsky A. (Ariel, Israel)
Gyori I. (Vesprem, Hungary),
Ivanov A.F. (Penn State, U.S.A.),
Karandzhulov L.I. (Sofia, Bulgaria),
Martinyuk A.A. (Kyiv, Ukraine),
Medved M. (Bratislava, Slovak Republic),
Redko V.N. (Kyiv, Ukraine),
Ruzickova M. (Zilina, Slovak Republic),
Vasiliev S.N. (Moscow, Russia),
Werbowski J. (Poznan, Poland),
Wu J. (Toronto, Canada).

ORGANIZING COMMITTEE
Belov Yu.A. (Kyiv, Ukraine),
Buy D.B. (Kyiv, Ukraine),
Grygorenko A.J. (Kyiv, Ukraine),
Dzhalladova I.A. (Kyiv, Ukraine)
Khusainov D.Ya. (Kyiv, Ukraine, Chairman),
Kozoriz V.V. (Kyiv, Ukraine),
Kukharenko O.V. (Kyiv, Ukraine),
Kuzmych O.I. (Lutsk, Ukraine),
Mazko A.P. (Kyiv, Ukraine),
Nikitchenko N.S. (Kyiv, Ukraine),
Oliynyk V.P. (Kyiv, Ukraine),
Onischenko S.M. (Kyiv, Ukraine),
Podchasov N.P. (Kyiv, Ukraine),
Shatyrko A.V (Kyiv, Ukraine),
Shatyrko O.A (Kyiv, Ukraine),
Shkilniak S.S. (Kyiv, Ukraine),
Yasinsky V.K.(Chernivtsi, Ukraine).

The Conference covers the following topics:

1.Mathematical methods of system investigation.

- Investigation of differential, functional-differential and difference systems.
- Investigation of system stability, controllability and optimization.
- Bifurcations and chaos in dynamical systems.
- Lyapunov's methods in system investigation.

2.Mathematical modeling of processes.

- Mathematical modeling and investigation of physical, technical, chemical and biological processes.
- Mathematical modeling in superconducting systems.
- Modeling and investigation of technological processes.
- Mathematical models related to economics and finance.

3.Modeling and investigation of processes in mechanics.

- Mathematical modeling in composite materials of mechanics.
- Modeling and investigation of dynamical processes in elastic and hydroelastic systems.
- Mathematical modeling in connected fields of mechanics.

4.Mathematical methods of control and optimization.

- Methods of control.
- Methods of optimization.
- Methods of differential games.

5.Logic-mathematical methods of modeling.

- Methods and tools of subject domains specifications.
- Methods and tools of software systems description.
- Modal and temporal formalisms of systems modeling.

First conferences “*Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation*” were embarrassed by narrow frames of stability theory and dynamical processes under superconductivity conditions. But taking into account the growing interest to the conference, organizers have extended the subject, which consists of five topics: “System Investigation”, “System Modeling”, “Mechanical Systems”, “Control and Optimization”, “Programming and Logic-mathematical Methods”.

The **“Mathematical methods of system investigation”**, the first topic, is connected to mathematical studies of dynamical system investigation, described by different types of equations (differential, functional), and mathematical modeling instrument development problems.

The **“Mathematical modeling of processes”** topic considers the wide spectrum of mathematical modeling in physical, technological and biological processes. The reports about stability in superconducting systems, technological processes investigation, financial and economical models are presented.

The **“Modeling and investigation of mechanical systems”** topic presents modern researches on aerohydroelastic problems, composite materials mechanics, elasticity theory, plasticity, destruction, bounded fields theory and theoretical mechanics.

The **"Mathematical methods of control and optimization"** topic presents mathematical problems of controlling technical and physical systems. The significant attention is devoted to control problems in mechanical systems.

The **“Programming and logic-mathematical methods of modeling”** topic aims to present new results in subject domain specification, programming system development, logic of dynamic system modeling.

Content

2. MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES...148

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION

MODELLING

&

STABILITY

Section 1

MATHEMATICAL METHODS OF SYSTEMS INVESTIGATION

Alishir Alifov, DSc,
Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy Sciences, Moscow, Russia,
e-mail: alishir@mail.ru

METHODS OF CALCULATION OF THE NONLINEAR SYSTEMS, BASED ON A STRAIGHT LINEARIZATION OF NONLINEAR FUNCTIONS

Alifov A.A.

Studying of the nonlinear equations of oscillatory systems is spent usually on the basis of the task of the form (law) of required movement that is characteristic to the overwhelming majority of known methods of research of nonlinear systems. Along with these methods there are also the methods [1-4] which are not using the form of required movement and which are effective enough from practical point of view owing to rather considerable (on usages) reduction of labor and time expenses.

The method of a straight linearization of nonlinear force of elasticity is described in work [1], and the method of a straight linearization of nonlinear forces of resistance is offered in work [2]. In these methods nonlinear force of elasticity $f(x)$ is replaced by linear $\bar{f}(x) = \omega^2 x$ and nonlinear force of resistance $F(\dot{x})$ is replaced by linear $\bar{F}(\dot{x}) = k\,\dot{x}$ where $\dot{x}$ − speed of movement. Two simple and effective methods of calculation of nonlinear systems are proposed in works [3-4] on the basis of mentioned methods of a straight linearization.

Application of these methods is shown on an example of a nonlinear system with one degree of freedom described by the equation of a general view

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + f(x) = H(t,x) \tag{1}$$

where function $H(t,x)$ can describe as types of excitations (external, parametrical) and as classes of mixed excitations [5]; the function $F(\dot{x})$ to possesses properties of positive (dissipative) and negative (causing self-oscillation) resistance.

At replacement of nonlinear function $F(\dot{x})$ by linear function $k\,\dot{x}$, and at replacement of nonlinear function $f(x)$ by linear function $\omega^2 x$, the linearized equation takes place

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = H(t,x) \tag{2}$$

where $k = k(\upsilon)$, $\omega = \omega(a)$, a and υ − the maximum values $|x|$ and $|\dot{x}|$ correspondingly.

The stated methods as shows the analysis, can be used for calculation of nonlinear systems with several degrees of freedom, with shock influences, etc. Comparison of the final parities received by these and known methods (averagings, harmonious balance, etc.), shows their full coincidence or small enough quantitative difference (some percent).

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука,1971. – 239 с.
2. Алифов А.А. Действие вибраций на системы с нелинейным трением. // «Техника», Баку, 2001, №4, с.47-51.
3. Alifov A.A. About some methods of calculation nonlinear oscillations in machines // International Symposium of Mechanism and Machine Science, October 5-8, 2010, Izmir, Turkey: proceedings. - 2010. - P. 378-381.
4. Алифов А.А. О некоторых методах расчета нелинейных колебаний // "В мире научных открытий", сер. «Математика. Механика. Информатика», 2011, № 1, с.155-159.
5. A.A.Alifov, K.V. Frolov. Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. – Hemisphere Publishing Corporation; New York, Washington, Philadelphia, London. 1990.

Alena BAŠTINCOVÁ, Zdeněk ŠMARDA, *Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering and Communication, University of Technology in Brno*, Technická 8, 61600 BRNO, CZECH REPUBLIC
e-mail:xbasti00@stud.feec.vutbr.cz, smarda@feec.vutbr.cz

ASYMPTOTIC ESTIMATES OF SOLUTIONS OF CERTAIN INITIAL SINGULAR VALUE PROBLEM

Baštincová A., Šmarda Z.

Consider the following problem

$$g(t)y'(t) = ay(t)\left(1 + f(t, y(t), \int_{0^+}^{t} K(t,s,y(s))ds)\right), \qquad (1)$$
$$y(0^+) = 0, *5mm$$

where $f \in C^0(J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), K \in C^0(J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), J = (0, t_0], t_0 > 0, g = (g_1, \dots, g_n)^T$.
Denote

$f(t) = o(h(t))$ as $t \to 0^+$ if there is valid $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{h(t)} = 0.$

$f(t) \sim h(t)$ as $t \to 0^+$ if there is valid $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{h(t)} = 1.$

The functions g, f, K will be assumed to satisfy:

(i) $g_i(t) \in C^1(J), g_i(t) > 0, g_i(0^+) = 0, g_{i'}(t) \sim \psi_i(t) g^{\lambda}(t)$ *as* $t \to 0^+, \lambda > 0, \psi_i(t) g_i^{\tau}(t) = o(1)$ *as* $t \to 0^+$*, for each* $\tau > 0, g_{i+1}(t) = o(g_i(t))$ *as* $t \to 0^+, i = 1, \dots, n, a > 0$ *is a constant.*

(ii) $\| f(t,u,v) \| \le \| u \| + \| v \|, \| \int_{0^+}^{t} K(t,s,y(t),y(s))ds \| \le r(t) \| y \|, 0 < r(t) \in C(J), r(t) = \phi_i(t,C)o(1)$ *as* $t \to 0^+$*, where*

$$\phi_i(t, C_i) = C_i \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{a}{g_i(s)} ds\right)$$

is the general solution of the equation $g_i(t)y'(t) = ay(t), i = 1, \dots, n$.

Theorem 1 *Let assumptions (i),(ii) hold, then for each* $C_i \neq 0$ *there exists one solution* $y(t) = (y_1(t, C_1), \dots, y_n(t, C_n))$ *of initial problem* (1) *such that*

$$| y_i^{(j)}(t,C) - \phi_i^{(j)}(t,C) | \le \delta \left(\phi_i^2(t, C_i)\right)^{(j)}, \ j = 0,1, \ i = 1, \dots, n, \qquad (3)$$

for $t \in J, \delta > 1$ is a constant.

This research has been supported by the Czech Ministry of Education in the frames of MSM002160503 Research Intention MIKROSYN New Trends in Microelectronic Systems and Nanotechnologies and by the project FEKT-S-11-2(921).

1. J.Diblík and C.Nowak, *A nonuniqueness criterion for a singular system of two ordinary differential equations,* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol.64, no.4 (2006) 657-656.
2. J.Diblík and M. Rщžicková, *Existence of positive solutions of a singular initial problem for a nonlinear system of differential equations,* Rocky Mount. J.Math. 34 (2004) 923-944.
3. Z.Šmarda, *On uniqueness of solutions of the singular problem for certain class of integro-differential equations,* Demonstratio Mathematica, vol.25, no.4 (1992) 835-841.
4. Z.Šmarda, *On a singular initial value problem for a system of integro-differential equations depending on a parameter,* Fasciculi Mathematici, no.24 (1995) 123-126.
5. Z.Šmarda, *On an initial value problem for singular integro-differential equations,* Demonstratio Mathematica, vol.35, no.4 (2002) 803-811.

Bohner Martin, Dr.,
Missouri University of Science and Technology, Rolla, USA
e-mail: bohner@mst.edu

DYNAMIC VERSIONS OF RISK-AVERSE UTILITY FUNCTIONS

Bohner M.

This talk discusses utility functions for money, where allowable money values are from an arbitrary nonempty closed subset of the real numbers. Thus the classical case, where this subset is the set of all real numbers, is included in the study. The discrete case, where this subset is the set of all integer numbers, is also included. In a sense this discrete case (which has not been addressed in the literature thus far) is more suitable for real-world applications than the continuous case. The concepts of risk aversion and risk premium are defined, an analogue of Pratt's fundamental theorem is proved, and temperance, prudence, and risk vulnerability is examined.

Jan Chvalina *Brno University of Technology,*
Technická 8, 616 00 Brno, Czech Republic
e-mail: chvalina@feec.vutbr.cz

COUNTABLE EXTENSION OF SEMICASCADES WITH BITOPOLOGICAL PHASE SPACES DETERMINED BY LINEAR HOMOGENEOUS SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Jan Chvalina

Topological and geometrical approaches to global investigation of ordinary differential equations and their transformations are characteristic for the school founded by Otakar Bor23 uvka and his collaborators. An interesting and fruitful direction of the general topology is the theory of bitopological spaces. The concept of a bitopological space (X, τ_1, τ_2), i.e. of a set X endowed with two arbitrary topologies τ_1, τ_2 was firstly formulated by J.C. Kelly in 1963. Used terms can be found in [4].

We consider discrete dynamical systems called semicascedes formed by the action of the additive monoid of non-negative integers $(\mathbb{N}_0, +)$ on the phase set formed by solution spaces of linear second-order differential equations of the form

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

where $p, q \in C(J)$, and $J \subseteq R$ is an open interval (see [3, 8, 9]). The differential operator standing on the left-hand side of (1) will be denoted by $L(p,q)$, hence the equation (1) can be rewritten into the form $L(p,q)y = 0$. Multistructures of such operators and their actions are investigated in papers [2,5, 6].

By a semicascade is usually considered an action of the monoid $(\mathbb{N}_0, +)$ (called a phase semigroup) on a set X (called a phase set or a phase space) of this discrete dynamical system i. e. it is a triad $(X, (\mathbb{N}_0, +), \delta)$, where $\delta : X \times \mathbb{N}_0 \to X$ is a transition function satisfying the usual conditions:

1. $\delta(x, 0) = x$,
2. $\delta(\delta(x, m), n) = \delta(x, m + n)$,

for all $x \in X$ and $m, n \in \mathbb{N}_0$. If $f : X \to X$ is an arbitrary transformation then the triad $(X, (\mathbb{N}_0, +), \delta_f)$, where $\delta_f(x, m) = f^m(x)$ is called the cascade determined by the unar (X, f).
Choose an arbitrary pair $[p,q] \in \mathbb{C}(J) \times \mathbb{C}(J)$ and denote $V_0(p,q)$ the two-dimensional space of functions which are linear combinations $\alpha p(x) + \beta q(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Denote by $\mathbb{V}_1^{(p,q)}\mathbb{A}_2$ the system of all two-dimensional solution spaces $V(\varphi, \psi)$ of equations $L(\varphi, \psi)y = 0$, where $\varphi, \psi \in V_0(p,q)$, i.e.

$$\mathbb{V}_1^{(p,q)}\mathbb{A}_2 = \{V^{(1)}(\varphi, \psi); [\varphi, \psi] \in V_0(p,q) \times V_0(p,q)\}.$$

Further, let $\mathbb{V}_n^{(p,q)}\mathbb{A}_2$ be defined. Then define

$$\mathbb{V}_{n+1}^{(p,q)}\mathbb{A}_2 = \{V(\xi, \eta); [\xi, \eta] \in V^{(n)}(u,v) \times V^{(n)}(u,v), V^{(n)}(u,v) \in \mathbb{V}_n^{(p,q)}\mathbb{A}_2\}.$$

Put $\mathbb{T}^{(p,q)}\mathbb{A}_2 = \{V_0(p,q)\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_n^{(p,q)}\mathbb{A}_2$ and consider a sequence of two-dimensional vector spaces of continuous functions

$$V_0(p,q) = V_0^{(p,q)}(J), V_1^{(p,q)}(J_1), \ldots, V_n^{(p,q)}(J_n), \ldots,$$

where $\{J_k\ k \in \mathbb{N}_0\}$ is a sequence of open intervals $J_0 = J, J_{k+1} \subsetneqq J_k$ such that $\bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} J_k$ is an open interval, and the space $V_{n+1}^{(p,q)}(J_{n+1})$ is formed by all continuous functions $f : J_{n+1} \to \mathbb{R}$ which are restrictions of functions $g \in V_n^{(p,q)}(J_n)$. Denote

$$E\mathbb{T}^{(p,q)}\mathbb{A}_2 = \mathbb{T}^{(p,q)}\mathbb{A}_2 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} V_n^{(p,q)}(J_n)$$

Defining $F_{(p,q)} : E\mathbb{T}^{(p,q)}\mathbb{A}_2 \to E\mathbb{T}^{(p,q)}\mathbb{A}_2 by F_{(p,q)}(U) = V forall U \in \mathbb{T}^{(p,q)}\mathbb{A}_2$, $V \neq V_0(p,q)$, where $V \in \mathbb{V}_n^{(p,q)}\mathbb{A}_2$ is such a space that for some pair of functions $[u,v] \in \mathbb{V}_n^{(p,q)}\mathbb{A}_2 \times \mathbb{V}_n^{(p,q)}\mathbb{A}_2$ the space V is the solution space of the differential equation $L(u,v)y = 0$. Further $F_{(p,q)}(V_0(p,q)) = F_{(p,q)}(V_0^{(p,q)}(J)) = V_1^{(p,q)}(J_1) and F_{(p,q)}(V_n^{(p,q)}(J_n)) = V_{n+1}^{(p,q)}(J_n)$, then we obtain a mono-unary algebra (i.e. unar) $(E\mathbb{T}^{(p,q)}\mathbb{A}_2, F_{(p,q)})$ with the below described "realization" property.

Denote by $\mathrm{End}(E\mathbb{T}^{(p,q)}\mathbb{A}_2, (\mathbb{N}_0,+), \delta_{F(p,q)})$ the endomorphism monoid of the constructed semicascade. Then using Theorem 3.1 [5], p.31 and Theorem 1.9 [5], chapter III, p.101 we obtain

Theorem. *Suppose* $[p,q] \in C(J) \times C(J)$ *and denote* $S^{(p,q)} = E\mathbb{T}^{(p,q)}\mathbb{A}_2$. *There exist at least two bitopological spaces* $(S^{(p,q)}, \tau_1, \tau_2)$, $(S^{(p,q)}, \sigma_1, \sigma_2)$ *such that the space* $(S^{(p,q)}, \tau_1, \tau_2)$ *is* $MN - p - T_1$ *and* $S - p - T_1$ *and topology* σ_2 *is near to the topology* σ_1 *and there holds*

$$End(S^{(p,q)}, (\mathbb{N}_0,+), \delta_{F(p,q)}) = U(Ccl(S^{(p,q)}, S^{(p,q)})) = U_d(Ccl(S^{(p,q)})).$$

This paper was supported by the Council of Czech Government MSM 0021630529.

1. *BOR23 UVKA, O.*: Algebraic spaces and their realizations by differential equations I, II. Seminar on Differential Equations, Brno Fac. of Sciences 1988, 35 pp. (In Czech)

2. *BERÁNEK, J., CHVALINA, J.:* On a noncommutative transposition hypergroup of linear spaces of smooth functions of a dimension two. Acta Mathematica **11**, Faculty of Nat. Sci. Konstatine the Philosopher University, Nitra 2008, pp. 11-16.

3. *DIBLÍK, J., R23 UŽIČ KOVÁ, M.:*Ordinary Differential Equations. Žilinská Univerzita v Žiline / EDIS-vydavatelsvo ŽU, 2008. (In Slovak)

4. *DVALISHVILI, B.P.:* Bitopological Spaces: Theory Relations with Generalized Algebraic Structures and Applications. North Holland Math. Studies 199. Amsterdam, London, New York, Paris, 2005.

5. *CHVALINA, J.:* Functional Graphs, Quasiordered Sets and Commutative Hypergroups. Vydavatelstv Masarykovy Univerzity Brno, 1995. (In Czech)

6. *CHVALINA, J., CHVALINOVÁ, L.:* Join spaces of linear ordinary differential operators of the second order. Colloquium on Differential and Difference Equations, CDDE 2002. Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunensis, Mathematica **13** MU Brno, 2003, 77- 86.

7. *CHVALINA, J., NOVÁK, M.:* On a certain topologization of ohase sets of semicascades created by second-order linear differential operators. Proc. XXIX International Colloquium Brno, May 2011, 9 pp., in print.

8. *NEUMAN, F.:* Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations. Mathematics and its Applications, East European Series 52, Kluwer Academic Publishers (with Academia Prague) Dordrecht- Boston-London 1991.

Josef Diblk, Jaromr Baštinec and Zdeněk Šmarda
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic
e-mail: diblik.j@fce.vutbr.cz, diblik@feec.vutbr.cz, bastinec@feec.vutbr.cz, smarda@feec.vutbr.cz

OSCILLATION AND NONOSCILLATION OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

Josef Diblk, Jaromr Baštinec and Zdeněk Šmarda

An equation with a variable delay

$$\dot{x}(t)+a(t)x(t-\tau(t))=0 \tag{1}$$

is considered, where $a:[t_0,\infty)\to(0,\infty)$, $t_0\in\mathbb{R}$ and $\tau:[t_0,\infty)\to(0,\infty)$, $t_0\in\mathbb{R}$ are continuous functions.

For every integer $k\ge 0$, $\delta>0$ and $t\to\infty$ we define

$$A_k(t):=\frac{1}{e\delta\tau(t)}+\frac{\delta}{8e\tau(t)s^2}+\frac{\delta}{8e\tau(t)(s\ln s)^2}+\ldots+\frac{\delta}{8e\tau(t)(s\ln s\ln_2 s\ldots\ln_k s)^2}$$

where

$$s=p(t):=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\tau(\xi)}d\xi.$$

Theorem 1. *Let for t_0 sufficiently large and $t\ge t_0$: $\tau(t)>0$ a.e., $1/\tau(t)$ be a locally integrable function,*

$$\lim_{t\to\infty}(t-\tau(t))=\infty,\ \int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{\tau(\xi)}d\xi=\infty$$

and let there exist $t_1>t_0$ such that $t-\tau(t)\ge t_0$, $t\ge t_1$.

a) *If there exists a $\delta\in(0,\infty)$ such that*

$$\int_{t-\tau(t)}^{t}\frac{1}{\tau(\xi)}d\xi\le\delta,\ t\ge t_1$$

and, for a fixed integer $k\ge 0$,

$$a(t)\le A_k(t),\ t\ge t_1,$$

then there exists an eventually positive solution of (1).

b) *If there exists a $\delta\in(0,\infty)$ such that*

$$\int_{t-\tau(t)}^{t}\frac{1}{\tau(\xi)}d\xi\ge\delta,\ t\ge t_1$$

and, for a fixed integer $k\ge 2$ and $\theta>1$, $\theta\in\mathbb{R}$, $a(t)>A_{k-2}(t)+\dfrac{\theta\delta}{8e\tau(t)(s\ln s\ln_2 s\ldots\ln_{k-1}s)^2}$,

if $t\ge t_1$, then all solutions of (1) *oscillate.*

Research was supported by the Grant P201/11/0768 of Czech Grant Agency (Prague) by the project FEKT-S-11-2(921) and by the Council of Czech Government MSM 00216 30503 and MSM 00216 30519.

1. *R.P. Agarwal, M. Bohner, Wan-Tong Li*, Nonoscillation and Oscillation, // Theory for for Functional Differential Equations, // Marcel Dekker, Inc. -- 2004.
2. *J. Baštinec, J. Diblk, Z. Šmarda*, Oscillation of solutions of a linear second-order discrete-delayed equation, Advances in Difference Equations, // -- 2010, Article ID 693867, 12 pages, doi: 2010. doi:10.1155/2010/693867.
3. *J. Baštinec, L. Berezansky, J. Diblk, Z. Šmarda*, On the critical case in oscillation for differential equations with a single delay and with several delays, // Abstract and Applied Analysis -- 2010 -vol. 2010, Article ID 417869, 20 pages. doi:10.1155/2010/417869.
4. *J. Diblk, Z. Svoboda, Z. Šmarda*, Explicit criteria for the existence of positive solutions for a scalar differential equation with variable delay in the critical case, // Comput. Math. Appl. -- 2008 -- 56, 556--564.
5. *V.E. Sljusarchuk*, The necessary and sufficient conditions for oscillation of solutions of nonlinear differential equations with pulse influence in the Banach space, //Ukrain. Mat. Zh. -- 1999 -- 51, 98--109.

Josef Diblk, Hana Halfarová
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic
diblik.j@fce.vutbr.cz, diblik@feec.vutbr.cz, xhalfa06@stud.feec.vutbr.cz, halfarova.h@fce.vutbr.cz

LINER SYSTEMS OF DISCRETE EQUATIONS WITH A WEAK DELAY

Josef Diblk, Hana Halfarová

For integers s, q, $s \le q$, we define a set $\mathbb{Z}_s^q := \{s, s+1, \dots, q-1, q\}$. Similarly, we define sets $\mathbb{Z}_{-\infty}^q := \{\dots, q-1, q\}$ and $\mathbb{Z}_s^\infty := \{s, s+1, \dots\}$. We deal with discrete systems

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) \tag{1}$$

where $m \ge 0$ is a fixed integer, $k \in \mathbb{Z}_0^\infty$, $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ are constant $n \times n$ matrices, and $x : \mathbb{Z}_{-m}^\infty \to \mathbb{R}^n$.

Definition 1. The system (1) is called a system with weak delay if the characteristic equations for the system (1) and for the system without delay

$$x(k+1) = Ax(k)$$

have the same roots, that is, if for every $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\det\left(A + \lambda^{-m}B - \lambda I\right) = \det\left(A - \lambda I\right).$$

Theorem 1. *Let* $n = 3$ *in* (1). *Then* (1) *is a system with a weak delay if and only if:*

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Consider a system of the type (1)

$$x(k+1) = A^* x(k) + B^* x(k-m) \tag{2}$$

where $n=3$, $A^* = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ if $i \neq j$ and $i, j = 1,2,3$.

Theorem 2. *System* (2) *is a system with a weak delay if and only if:*

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & 0 & b_{23}^* \\ b_{31}^* & b_{32}^* & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{aligned} b_{12}^* b_{23}^* b_{31}^* + b_{13}^* b_{21}^* b_{32}^* &= 0, \\ b_{12}^* b_{21}^* + b_{13}^* b_{31}^* + b_{23}^* b_{32}^* &= 0, \\ \lambda_3 b_{12}^* b_{21}^* + \lambda_2 b_{13}^* b_{31}^* + \lambda_1 b_{23}^* \quad b_{32}^* &= 0. \end{aligned}$$

Research was supported by the Grant P201/10/1032 of Czech Grant Agency (Prague) by the project FEKT-S-11-2(921) and by the Council of Czech Government MSM 00216 30503 and MSM 00216 30519.

1. *D. Ya. Khusainov, D. B. Benditkis, J. Diblk*, Weak delay in systems with an aftereffect, // Functional Differential Equations -- 2002. -- 9, 385--404.

2. *J. Diblk, D. Ya. Khusainov, Z. Šmarda*, Construction of the general solution of planar linear discrete systems with constant coefficients and weak delay // Adv. Difference Equ. -- 2009. -- Art. ID 784935, 18 pp.

3. *R.D. Driver*, Ordinary and Delay Differential Equations, // Springer-Verlag New York Inc. -- 1977.

Josef Diblk, Blanka Morávková,
Brno University of Technology, Brno, Czech Republic
diblik.j@fce.vutbr.cz, diblik@feec.vutbr.cz, xmorav17@stud.feec.vutbr.cz, moravkova.b@fce.vutbr.cz

SOLUTION OF LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS, A SINGLE DELAY AND WITH IMPULSES

Josef Diblk and Blanka Morávková

We develop a method for the construction of solutions of linear discrete systems with constant coefficients, with a single delay and with impulses. Cases of only one impulse focused in a given interval and impulses acting at all points of a given interval are considered. Solutions are expressed by means of a special function called a discrete matrix delayed exponential.

For integers s, q, $s \le q$, we define a set $\mathbb{Z}_s^q := \{s, s+1, \dots, q-1, q\}$. Similarly, we define sets $\mathbb{Z}_{-\infty}^q := \{\dots, q-1, q\}$ and $\mathbb{Z}_s^\infty := \{s, s+1, \dots\}$. In [1,2] problems of representation of solutions of discrete linear systems with a single delay are studied.

Consider the discrete system

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + f(k) \tag{1}$$

where $m \ge 1$ is a fixed integer, $k \in \mathbb{Z}_0^\infty$, $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ are regular constant $n \times n$ matrices admitting commutative property

$$AB = BA,$$

$f : \mathbb{Z}_0^\infty \to \mathbb{R}^n$ and $x : \mathbb{Z}_{-m}^\infty \to \mathbb{R}^n$.

Following the terminology (used e.g. in [3]) we refer (1) as delayed discrete system if $m \ge 1$ and as non-delayed discrete system if $m = 0$. Together with equation (1) we consider initial (Cauchy) problem

$$x(k) = \varphi(k) \tag{2}$$

with given $\varphi : \mathbb{Z}_{-m}^0 \to \mathbb{R}^n$.

We will solve the problem (1), (2) together with the condition

$$x(k+1) = Cx(k+1-0) + I_{k+1} \tag{3}$$

here $k \in \mathbb{Z}_0^\infty$, $C = (c_{ij})$ is a regular constant $n \times n$ matrix and $I_j \in \mathbb{R}^n$ are impulses. We assume that for matrices A, B and C equality

$$ACB = BCA$$

holds.

The crucial notion used in [1,2] is so-called discrete matrix delayed exponential defined as

$$e_m^{Bk} := I + \sum_{j=1}^{\ell} B^j \cdot \binom{k-(j-1)m}{j}$$

for $k = (\ell-1)(m+1)+1, \dots, \ell(m+1)$ and $\ell = 0, 1, \dots$. This special matrix function is used in the proof of following result.

Theorem 1. *Solution* $x = x(k)$ *of the initial Cauchy problem* (1), (2)*, satisfying impulse conditions* (3)*, can be on* $\mathbb{Z}_{-m}^\infty$ *expressed in the form*

$$\begin{aligned} x(k) &= X_0(k)(CA)^{-m}\varphi(-m) + (CA)^m \sum_{j=-m+1}^{0} X_0(k-m-j)\left[\varphi(j) - (CA)\varphi(j-1)\right] \\ &\quad + (CA)^m \sum_{j=1}^{k} X_0(k-m-j)\left[Cf(j-1) + I_j\right] \end{aligned}$$

where $X_0(k) = (CA)^k \mathrm{e}_m^{B_1 k}$, $B_1 = (CA)^{-1} CB (CA)^{-m}$.

This research was supported by grant P201/10/1032 of the Czech Grant Agency (Prague), by the Council of Czech Government MSM 00216 30503, and by the project FEKT-S-11-2(921).

1. *J. Diblk, D. Khusainov,* Representation of solutions of linear discrete systems with constant coefficients and pure delay, // Advances in Difference Equations -- 2006. -- Art. ID 80825, DOI 10.1155/ADE/2006/80825, 1--13. (ISSN: 1687-1839, e-ISSN: 1687-1847, doi:10.1155/ADE.

2. *J. Diblk, D. Khusainov,* Representation of solutions of discrete delayed system $x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + f(k)$ with commutative matrices, // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 318 -- 2006. -- No 1, 63--76. (ISSN 0022-247X)

3. *J. Baštinec, J. Diblk,* Subdominant positive solutions of the discrete equation $\Delta u(k+n) = -p(k)u(k)$, // Abstract and Applied Analysis, 2004:6 -- 2004. -- 461--470. (ISSN: 1085--3375, e-ISSN: 1687--0409)

4. *J. Diblk, D. Khusainov, M. R23 užičková,* Controllability of linear discrete systems with constant coefficients and pure delay, // SIAM Journal on Control and Optimization, 47, No 3 -- 2008. -- 1140--1149. DOI: 10.1137/070689085, url = http://link.aip.org/link/?SJC/47/ 1140/1. (ISSN Electronic: 1095-7138, Print: 0363-0129)

5. *J. Diblk, D. Khusainov, J. Lukáčová, M. R23 užičková,* Representation of solutions of Cauchy problem for oscillating system with pure delay, // Nelinijni Kolyvannya, 11, No 2 -- 2008. -- 261--270 (in Russian). English translation in: *J. Diblk, D. Khusainov, J. Lukáčová, M. R23 užičková*: Representation of a solution of the Cauchy problem for an oscillating system with pure delay, // Nonlinear Oscillations, 11, No 2 -- 2008. -- 276--285.

Dziubenko Karen Georgievich, Ph.D., Senior Research Scientist,
Cybernetics Institute, Kiev, Ukraine,
e-mail: dept165@insyg.kiev.ua

CONTINUOUSNESS OF LINEAR FUNCTIONALS AND OPERATOR EQUATIONS

Dziubenko K.G.

Systems investigation is fundamentally based on concepts of operator equation solution and continuousness. First I present my results on continuousness of linear functionals and then criteria for adjoint operator existence and for solvability of operator equations.

Let L, L_1 be linear normed spaces. For $A: L \to L_1$ $Ker\, A = \{x \in L : Ax = \vec{0}\}$ – *kernel of* A, $Im\, A = \{Ax : x \in L\}$ – *image of* A. $\dim L$ – dimension of space L.

Theorem 1. Linear functional $\varphi : L \to C$ is continuous $\Leftrightarrow$ $Ker\,\varphi$ is closed.

Theorem 2. Non-identical to zero linear functional $\varphi : L \to C$ is continuous $\Leftrightarrow$ $\overline{Ker\,\varphi} \neq E$.

Let's introduce three notions. Linear space E is *canonical* if $(\cdot,\cdot) : E \times E \to C$ is defined in accordance with axioms of scalar product. Let E be canonical space, $\hat{E}$ – completion of E, and $(\cdot,\cdot)$ is extended to $\hat{E} \times \hat{E} \to C$ as scalar product due to parallelogram rule. $A : E \to \hat{E}$ is *weakly continuous operator* if functional $(A\cdot, y)$ is continuous for every $y \in \hat{E}$. $A^* : \hat{E} \to \hat{E}$ is *adjoint operator* for linear $A : E \to \hat{E}$ if $(Ax, y) = (x, A^* y)$, $x \in E$, $y \in \hat{E}$.

Theorem 3. Let $A : E \to \hat{E}$ be linear. Then existence of A^* is equivalent to each of the statements.
1. A is weakly continuous.
2. $Ker\,(A\cdot, y)$ is closed for every $y \in \hat{E}$.

Previously existence of adjoint operator was proved for linear continuous operator in complete space.

Theorem 4. Let $A : E \to \hat{E}$ be weakly continuous, $Im\, A$ closed. Then the statements are true.
1. Equation $Ax = f$ with $f \in \hat{E}$ has solution in E $\Leftrightarrow$ $f \perp KerA^*$.
2. Solution of $Ax = f$ is unique for every $f \in \hat{E}$ $\Leftrightarrow$ $KerA = KerA^* = \{\vec{0}\}$.
3. $\dim Im\, A = \dim Im\, A^*$.
4. If $Im\, A^*$ is closed also then $\dim KerA = \dim KerA^*$.

Statements of Theorem 4 were partly proved before for operator $A - \lambda I$ in complete space, where A was completely continuous and $\lambda \neq 0$. These requirements are simplified with introduction of weakly continuous operator notion ([1]).

1. Дзюбенко К.Г. Ортогональные разложения пространств и их применения // Теория оптимальных решений. – 2010. – № 9. – С. 25 – 32.

Valery A. Gaiko
Max Plank Institute for Mathematics (Bonn)
National Academy of Sciences of Belarus (Minsk)
Leonid Beda Str. 6-4, Minsk 220040, Belarus
valery.gaiko@yahoo.com

ON NEURAL DYNAMICAL SYSTEM MODELING

Gaiko V.A.

We consider two planar cubic dynamical systems which are used for neural modeling.

First, we study the classical FitzHugh-Nagumo dynamical system which models the spike dynamics in biological neurons [1]. This system can be written in a canonical form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\gamma\delta - 1)\,y + (\gamma - a)x + bx^2 - cx^3, \\ \dot{y} &= x - \delta\, y. \end{aligned} \tag{2}$$

Such a cubic model was studied earlier, e. g., in [2]. However, the qualitative analysis carried out in [2] was incomplete, since the global bifurcations of multiple limit cycles could not be studied properly by means of the methods and techniques which were used earlier in the qualitative theory of dynamical systems. Applying the Wintner-Perko termination principle for multiple limit cycles and new geometric methods of the global bifurcation theory developed in [3], we prove the following theorem solving the multi-stability problem for system (1).

Theorem 1. FitzHugh-Nagumo neuronal model (1) can have at most two limit cycles.

Then, we carry out the global qualitative analysis of polynomial dynamical systems as learning models of neural networks [4]. Learning models are algorithms, implementable as neural networks, that aim to mimic an adaptive procedure. A neural network is a device consisting on interconnected processing units, designated neurons. An input presented to the network is translated as a numerical assignment to each neuron. This will create a sequence of internal adjustments leading to a learning process. For two input neurons, e. g., the model can be written as a planar cubic dynamical system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x + \beta y - x(ax^2 + 2bxy + cy^2), \\ \dot{y} &= \gamma x + \delta y - y(ax^2 + 2bxy + cy^2). \end{aligned} \tag{3}$$

Applying again the Wintner-Perko termination principle and our geometric methods [3], we prove, in particular, the following theorem.

Theorem 2. Planar neural network model (2) has at most one limit cycle.

1. *Izhikevich E. M.* Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. -- The MIP Press, Cambridge, MA, 2007.

2. *Ringkvist M., Zhou Y.* On the dynamical behaviour of FitzHugh-Nagumo systems: Revisited // Nonlinear Anal. -- 2009. -- **71**. -- P. 2667-2687.

3. *Gaiko V. A.* Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem. -- Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

4. *Botelho F., Gaiko V. A.* Global analysis of planar neural networks // Nonlinear Anal. -- 2006. -- **64**. -- P. 1002-1011.

Alina Gleska, Dr. of the Science,
Poznan University of Technology, Poznan, Polska,
e-mail: alina.gleska@put.poznan.pl;
Werbowski Jaroslaw, Dr. of the Science,
Poznan University of Technology, Poznan, Polska,
e-mail: jaroslaw.werbowski@put.poznan.pl;

OSCILLATIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS GENERATED BY DEVIATING ARGUMENTS

Gleska A., Werbowski J.

We consider the oscillatory behaviour of solutions of the nonlinear differential equation with deviating arguments of the form

$$(-1)^z x^{(n)}(t) = f(t, x(g_1(t)), \ldots, x(g_m(t))), \tag{1}$$

where $n \geq 2$, $z = 1,2$, $f : R_+ \times R^m \to R$ and $g_k : R_+ \to R$ with $\lim_{t\to\infty} g_k(t) = \infty$ $(k = 1, \ldots, m)$, $R_+ = [0, \infty)$ are continuous functions.

The purpose of the paper is to study nonlinear oscillations generated by general deviating arguments g_k. These results are not valid for the corresponding ordinary differential equations.

1. G.S. Ladde, V. Lakshmikantham, B.G. Zhang. Oscillation theory of differential equations with deviating arguments, Marcel Dekker, Inc., New York,1987.

2. R.P. Agarwal, S.R. Grace, D. O'Regan Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston, London,2000.

3. R.P. Agarwal, M. Bohner, S.R. Grace, D. O'Regan Discrete oscillation theory, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2005.

Grzegorz Grzegorczyk, Dr. of the Science
Poznan University of Technology Institute of Mathematics, Poznan, Polska,
e-mail: ggrzegor@icpnet.pl; grzegorz.grzegorczyk@put.poznan.pl;

OSCILLATORY BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS WITH DEVIATING ARGUMENTS

Grzegorz Grzegorczyk

We study the oscillatory solutions of the nonlinear difference equation

$$(-1)^{\nu}\Delta^{m}x(n) = f(n, x(g_1(n)), x(g_2(n))\ldots, x(g_w(n))), \tag{1}$$

where $n, m, w, \nu \in N = \{1, 2, \ldots\}$, $f : N \times R^{w} \to R_{+} \cup \{0\}$, $g_i : N \to N$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_i(n) = \infty$ $(i = 1, \ldots, w)$.

The purpose of this paper is to give sufficient conditions for the oscillation of solutions of considered equation. Obtained main results are new and are independent of the analogous ones known in literature.

1. *R.P. Agarwal, M. Bohner, S.R. Grace, D. O'Regan,* Discrete Oscillation Theory, Hindawi Publishing Corporation, 2005.

Hentosh Oksana Yevgenivna, Candidate (Phys.-Math.), Senior Sci. Reseacher
Inst. for Applied Problems of Mech. and Math., NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine
e-mail: ohen@ua.fm

THE LIE-ALGEBRAIC STRUCTURE OF LAX INTEGRABLE MATRIX (2+1)-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEMS

Hentosh O.Ye.

On the dual space $\mathcal{G}^*$ to the Lie algebra of shift operators [1]

$$A := \mathcal{E}^q + \sum_{j<q,\, j\in\mathbb{Z}} a_j(n)\mathcal{E}^j,$$

where $a_j \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}; gl(m;\mathbb{C}))$ for all $j\in\mathbb{Z}$, $j<q$ and $q\in\mathbb{N}$, $\mathcal{S}(\mathbb{Z}; gl(m;\mathbb{C})$ is a space of $m\times m$ complex nondegenerated matrices with the elements belonging to the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ of quickly decreasing sequences, and the shift operator $\mathcal{E}$ obeys the following rule

$$\mathcal{E}^j a = (\mathcal{E}^j a)\mathcal{E}^j, \quad a\in \mathcal{S}(\mathbb{Z}; gl(m;\mathbb{C})),$$

with respect to the scalar product

$$(A,B) := Tr(AB),\ A,B\in\mathcal{G}, \quad Tr\, A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Sp\, a_0(n),$$

where Sp is a matrix trace, the hierarchy of dynamical systems, formed by the Lax type flows [1]

$$l_{t_p} = [(l^p)_+, l], \quad l\in\mathcal{G}^*, \quad p\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

where the subscript "$+$" denotes a projection of the corresponding operator on the Lie subalgebra of $\mathcal{G}$, which consists of all elements $\mathcal{E}^q + \sum_{0\le j<q,\, j\in\mathbb{Z}} a_j(n)\mathcal{E}^j$, and the evolutions

$$f_{k,t_p} = (l_+^p f_k), \quad f^*_{k,t_p} = -((l_+^p)^* f_k^*), \tag{2}$$

of eigenfunctions $f_k \in W := L_2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^m)$ and adjoint eigenfunctions $f_k^*\in W$, related to the eigenvalues $\lambda_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,N}$, of an associated spectral problem, is considered.

By use of the found Bäcklund transformation [2] on $\mathcal{G}^*\times W^{2N}$

$$(l_{>0}, f_k, f_k^*)^{\mathrm{T}} \mapsto (l = l_{>0} + \sum_{k=1}^{N} f_k \mathcal{E}(\mathcal{E}-1)^{-1}\otimes f_k^*, f_k, f_k^*)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

where $l_{>0} := \mathcal{E}^r + \sum_{0<j<r,\, j\in\mathbb{Z}} u_j(n)\mathcal{E}^j$ if $l := \mathcal{E}^r + \sum_{j<r,\, j\in\mathbb{Z}} u_j(n)\mathcal{E}^j$, $u_j\in\mathcal{S}(\mathbb{Z}; gl(m;\mathbb{C}))$, $r\in\mathbb{N}$, and the symbol "$\otimes$" denotes a vector tensor product, the Hamiltonian representation for the coupled hierarchy (1)-(2) is obtained as well as for the corresponding hierarchies of squared eigenfunction symmetries. It is proven that the latter hierarchies are generated by the Poisson structure on $\mathcal{G}^*\times W^{2N}$ which arises from the tensor product of the $\mathcal{R}$-deformed Lie-Poisson bracket on $\mathcal{G}^*$ with the standard Poisson bracket on W^{2N} under the Bäcklund transformation (3) and the natural powers of eigenvalues $\lambda_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,N}$, as Hamiltonian functions.

The relation of mentioned above hierarchies to some $(2+1)$-dimensional differential-difference dynamical systems with triple Lax-type linearizations is analysed.

1. Blaszak M., Marciniak K. R-matrix approach to latticeintegrable systems // J. Math. Phys. -- 1994. -- 35, ¹ 9. --P. 4661-4682.2. Hentosh O.Ye. The Lax integrable differential-differencedynamical systems on extended phase spaces// Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications.-- 2010. -- 6, 034. -- 14 p.

Andriy Hulianytskyi, Student,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: andriyhul@gmail.com;
Semenov Volodymyr , Dr. of the Science,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: semenov.volodya@gmail.com

A PRIORI ESTIMATES FOR SOBOLEV-TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS

Hulianytskyi A., Semenov V.

This report is about the issue of existense and uniqness of generalized solutions of boundary value problems for pseudoparabolic and pseudohyperbolic integro-differential operators, which are often called Sobolev-type operators. Similar differential equations were studied in [4].

Let $Q=(0,T)\times\Omega$ be a spacetime cylinder, where $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ is a bounded domain with the regular bound $\partial\Omega$. Denote $\Gamma=(0,T)\times\partial\Omega$.

Consider the following problems

$$\begin{cases} Pu = f\, in Q, \\ u\big|_{\Gamma} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0\, in \Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} Hu = f\, in Q, \\ u\big|_{\Gamma} = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0\, in \Omega. \end{cases}$$

Here the operators P and H have the form

$$Pu = Au_t + Bu + \int_0^t C(\tau)u d\tau, Hu = u_{tt} + Au_t + Bu + \int_0^t C(\tau)u d\tau,$$

where A, B e $C(\tau)$ are second-order linear differential operators. Under certain conditions, the following a priori estimates are proved using the integral abc-method

$$c_0\|u\|_{F_0} \le \|Pu\|_{E_1^*} \le c_1\|u\|_{E_0}, c_0\|v\|_{F_1} \le \|P^*v\|_{E_0^*} \le c_1\|v\|_{E_1},$$

$$c_0\|u\|_{F_0} \le \|Hu\|_{F_1^*} \le c_1\|u\|_{E_0}, c_0\|v\|_{F_1} \le \|H^*v\|_{F_0^*} \le c_1\|v\|_{E_1},$$

where E_i, F_i and their conjugate spaces make up the chains

$$E_0 \subseteq F_0 \subseteq L_2(Q) \subseteq F_0^* \subseteq E_0^*,$$
$$E_1 \subseteq F_1 \subseteq L_2(Q) \subseteq F_1^* \subseteq E_1^*.$$

These estimates involve the theorems of unique generalized solvability for the boundary value problems with the right-hand sides from certain finite-order distribution spaces. In this paper, the technique developed in [1, 4, 5] is used.

1. Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами. - Киев: Наук. думка, 1998. - 471 с.

2. Ляшко С.И., Семенов В.В., Сергиенко Т.И. Управляемость и оптимизация систем псевдогиперболического типа // Кибернетика и ситемный анализ, 2002. - №4. - С. 124-137.

3. Семенов В.В Імпульсна керованість деяких розподілених систем типу С.Л.Соболєва // Доповіді НАН України, 2001. - №12. - С. 77-82.

4. Анікушин А.В. Оптимальне керування інтегро-диференціальними системами параболічного типу // Журнал обчисл. та прикл. матем., 2010. - С. 3-16.

5. Ляшко С.І., Номіровський Д.А., Семенов В.В. Дослідження лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням // Журнал обчисл. та прикл. матем., №2(91). - 2004. - С. 31-45.

Ignat'ev Aleksandr Olegovich, Dr., Prof.
IAMM NAS of Ukraine, Donetsk, Ukraine,
e-mail: aoignat@mail.ru;

STABILITY OF INVARIANT SETS OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

Ignat'ev A.O.

A system of functional differential equations with delay

$$dz / dt = Z(t, z_t), \tag{1}$$

where $z = (x, y), x \in R^n$, $y \in R^m$, and Z is the vector-valued functional, is considered. It is supposed that this system has a positive invariant set

$$x = 0. \tag{2}$$

Definitions of its stability, asymptotic stability, and uniform asymptotic stability are given. Theorems on the uniform asymptotic stability are formulated and proved.

Side by side with system (1), the system of functional differential equations with delay

$$dz(t) / dt = Z(t, z_t) + R(t, z_t) \tag{3}$$

is also considered where R is the vector-valued functional. It is supposed that system (3) also has a positive invariant set (2). The conditions are given when the uniform asymptotic stability of of the invariant set of system (1) implies the uniform asymptotic stability of the invariant set of system (3). The asymptotic stability of this invariant set of the first system is studied separatly when the right-hand side of the system is an almost periodic in t.

Karandzhulov Lyudmil Ivanov, Dr. Sci., Prof.,
Technical University-Sofia,
e-mail: **likar@tu-sofia.bg**

LINEAR AND NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON TIME SCALES

Karandzhulov L.I.

We consider linear and nonlinear (of F. Noether type) boundary value problems (BVP) for a systems of ordinary differential equations on different time scales. By using the Leray-Schauder theorem, we establishe conditions for the existence of solutions of the BVP.

Iryna Musatenko Ph.D.,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Faculty of Cybernetics, Department of Calculus Kyiv, Ukraine
ivmusatenko@gmail.com, grytsay@mail.univ.kiev.ua

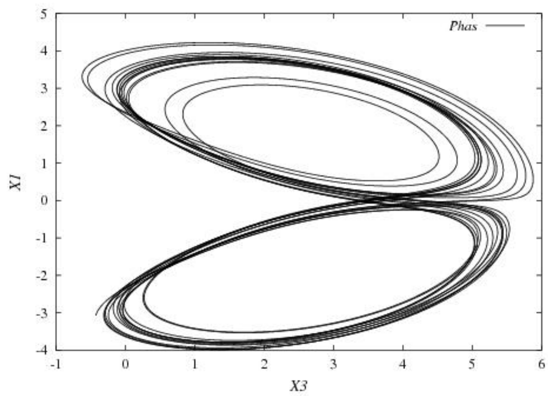
CHAOTIC DYNAMIC OF SYSTEM WITH QUADRATIC NONLINEARITY

Musatenko I.V.

Navier–Stokes equation is considered. This equation was decomposed using a Fourier series and the following differential system was obtained:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2x_1 + 4x_2x_3 + 4x_4x_5 \\
\dot{x}_2 &= -9x_2 + 3x_1x_3 \\
\dot{x}_3 &= -5x_3 - 7x_1x_2 + r \\
\dot{x}_4 &= -5x_4 - x_1x_5 \\
\dot{x}_5 &= -x_5 - 3x_1x_4
\end{aligned} \tag{1}$$

where r is unknown parameter. The solutions of the system (1) depend on the parameter. Equilibrium points of the system (1) and conditions of their existence depending on the parameter value were obtained.



Pic. 1. Strange attractor, $r = 31$.

The dynamical system (1) was investigated, using analytical and numerical analysis. Lyapunov exponents, the system dimension and an attractor domain were obtained. Dissipativity and chaotic conditions of the system (1) were found. Transition to chaos regimes were investigated. A bifurcation diagram and phase-plane portraits, which show chaotic behavior of the system (1), were constructed.

1. Kuznetsov, S.P. (2001). Dynamical chaos, Fizmatlit, Moscow (in Russian).
2. Moon, F. (1987). Chaotic Vibrations, John Wiley, New York.

Anna Najmanova Graduate
University of Zilina, Faculty of Humanities, Department of Mathematics, Å½ilina, Slovensko,
email: anna.najmanova@fpv.uniza.sk;
Olach Rudolf , Candidate,
University of Zilina, Faculty of Humanities, Department of Mathematics, Å½ilina, Slovensko,
email: rudolf.olach@fpv.uniza.sk

NONOSCILLATORY SOLUTIONS OF NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Najmanova A., Olach R.

The aim of this paper is to present some sufficient conditions which guarantee the existence of positive solutions which are bounded by positive functions. We deal with the nonlinear neutral differential delay equations. Some examples illustrate the main result.

Nowakowska Wiesława Dr.
Poznań University of Technology, Poznań, Poland
e-mail: wieslawa.nowakowska@ put.poznan.pl,

CONNECTIONS BETWEEN OSCILLATORY BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF FUNCTIONAL, DIFFERENCE AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

Nowakowska W.

We study the oscillatory solutions of iterative functional equations.

From obtained results we get new oscillation criteria for difference and differential equations.

1. Agarwal R.P., Grace S.R., O'Regan D., Oscillation theory for difference and functional differential equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.

2. Domoshnitsky A., Drakhlin M., Stavroulakis I. P., Distribution of zeros of solutions to functional equations, Math. Comput. Modelling 42(2005), no. 1-2, 193-205.

3. Myshkis A.D., Linear homogeneous differential equations of first order with deviating arguments, Uspekhi Mat. Nauky, 5(1950), 160-162. (in Russian)

4. W.Nowakowska, J.Werbowski, On connections between oscillatory solutions of functional, difference and differential equations, Fasc. Math. 44(2010), 95-106.

Perkin Aleksey Aleksandrovich, graduate,
St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg, Russia,
e-mail: ofercinn@gmail.com ;
Smirnova Vera Borisovna, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof.,
St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg, Russia,
e-mail: root@al2189.spb.edu ;
Shepelyavyi Aleksandr Ivanovich, Candidate (Phys.–Math.), Associate Prof.,
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia,
e-mail: as@as1020.spb.edu

ON ASYMPTOTICS OF MANY-DIMENSIONAL AND INFINITE-DIMENSIONAL PHASE CONTROL SYSTEMS

Perkin A. A., Smirnova V.B., Shepelyavyi A.I.

The paper is devoted to asymptotic behaviour of control systems with vector periodic nonlinearities. The control systems described by systems of ordinary differential equations and by systems of difference equations with singular linear parts as well as the control systems described by integro-differential Volterra equations are considered. Such systems are often called phase systems. The systems under consideration have denumerable sets of equilibria which may be both Lyapunov stable and Lyapunov unstable.

In the paper several many-parameter frequency-domain criteria for gradient-like behaviour of a system are demonstrated. They guarantee that every solution of the system tends to a certain equilibrium. For gradient-like systems the frequency-domain inequalities are also used in order to generate the estimates of the number of slipped cycles and thus to evaluate the deviation of the solution from its initial value by means of the period of the nonlinearity. It is also shown that the frequency-domain inequalities give the opportunity to guarantee that the system can not have certain periodic regimes of the second kind.

All the theorems in the paper are proved by means of second Lyapunov method for lumped phase systems [1] and by means of a priori integral estimates method for distributed phase systems [2]. New types of periodic Lyapunov functions and sequences as well as Popov functionals are offered. The sufficient conditions for the existence of Lyapunov periodic functions are established by Yakubovich-Kalman frequency theorem [3].

1. Gelig A.Kh. Stability of Nonlinear Systems with Nonunique Equilibria / A.Kh. Gelig, G.A.Leonov, V.A.Yakubovich. – Moscow: Nauka, 1978. – 400 p.
2. Leonov G.A. Frequency-Domain Metods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications / G.A. Leonov, D.V. Ponomarenko, V.B. Smirnova.- Syngapore--New Jersey--London--Hong Kong: World Scientific, 1996. -- 498 p.
3. Yakubovich, V.A. A Frequency-Domain Theorem in the Control Theory / V.A.Yakubovich // Sibirsk. Mat. Zh., - 1973. -Vol.14. - No 2. - P. 265-289.

Andrej Viktorovich Plotnikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine,
e-mail: a-plotnikov@ukr.net;
Tatyana Aleksandrovna Komleva, Ph. D. (Phys.-Math.), As. Prof.
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine,
e-mail: t-komleva@ukr.net;
Lilia Ivanovna Plotnikova, Ph. D. (Phys.-Math.), As. Prof.
Odessa National Polytechnic University, Odessa, Ukraine.

ON THE AVERAGING OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH FUZZY RIGHT-HAND SIDE WHEN THE AVERAGE OF THE RIGHT-HAND SIDE IS ABSENT

Plotnikov A.V., Komleva T.A., Plotnikova L.I.

We consider the Cauchy problem with small parameter

$$x' \in \varepsilon F(t,x), \quad x(0)=x_0, \tag{1}$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $F: R_+ \times R^n \to E^n$ is a fuzzy mapping, $x_0 \in E^n$.

We interpret the inclusion (1) as a family of differential inclusions

$$x'_\alpha \in \varepsilon [F(t,x_\alpha)]^\alpha, \quad x_\alpha(0) \in [x_0]^\alpha, \tag{2}$$

where the subscript α indicates that the α-level set of a fuzzy set is involved (the system (2) can only have any significance as a replacement for (1) if the solutions generate fuzzy sets (fuzzy R-solution).

In the articles [1,2] associate with the inclusion (1) the following averaged differential inclusion

$$y' \in \varepsilon \overline{F}(y), \quad y(0)=x_0, \tag{3}$$

where $$\lim_{T\to\infty} D\left(\frac{1}{T}\int_0^T F(t,x)dt, \overline{F}(x)\right) = 0. \tag{4}$$

In this report we consider the case when the limit (4) does not exist but there exist fuzzy mappings $F^-(x)$, $F^+(x)$ such that

$$\lim_{T\to\infty} \beta\left(\frac{1}{T}\int_0^T F(t,x)dt, F^+(x)\right) = 0, \quad \lim_{T\to\infty} \beta\left(F^-(x), \frac{1}{T}\int_0^T F(t,x)dt\right) = 0, \tag{5}$$

where $\beta(\cdot,\cdot)$ is the semideviation of the elements in the sense of fuzzy metric.

Along with the differential inclusion (1) we will consider the following differential inclusions:

$$y' \in \varepsilon F^-(y), \quad y(0)=x_0, \qquad z' \in \varepsilon F^+(z), \quad z(0)=x_0. \tag{6}$$

In the report we reduce conditions, when for any $\eta > 0$ and $L > 0$ there exists $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ and $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$: $\quad Y(t) \subset X(t) + \hat{S}_\eta(\hat{0}), \qquad X(t) \subset Z(t) + \hat{S}_\eta(\hat{0})$.

1. Plotnikov A.V. The Partial Averaging Of Differential Inclusions With Fuzzy Right-Hand Side / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva, L.I. Plotnikova // J. Adv. Res. Dynamical & Control Systems. - 2010. - Vol. 2, №2. - P. 26-34.
2. Комлева Т.А. Усреднение дифференциальных включений с нечеткой правой частью на конечном промежутке / Т.А. Комлева, А.В. Плотников, Л.И. Плотникова // Труды Одесского политехн. ун-та. - 2010. - Вып. 1(33)-2(34). - С. 192-196.

Shatyrko Andriy, Ph.D. in Math.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
e-mail: a_shatyrko@mail.ru

LYAPUNOV'S FUNCTION IN QUALITATIVE ANALYSIS OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS OF NEUTRAL TYPE UNDER UNCERTAINTY

Shatyrko Andriy

Generally, the parameters of a system aren't known exactly. But they can take the values from some predefined set intervals, and more adequate model of a control system is the system of the functional-differential equations with inexact specified parameters of the form

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)-Dx(t-\tau)\right]=(A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)x(t-\tau)+bf(\sigma(t)),\ \ \sigma(t)=c^T x(t),\ t\geq 0, \qquad (1)$$

where $x(t)\in R^n$, A, B, D - square matrices with constant coefficients $b,c\in R^n$, $\tau>0$ - constant delay, $\Delta A=\{\Delta a_{ij}\}$, $\Delta B=\{\Delta b_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,n}$ matrices with the coefficients taking the values from some fixed intervals. $f(\sigma)-$ the continuous unknown nonlinear function belong to linear sector $[k\sigma-f(\sigma)]\sigma>0$, $k>0$, satisfying the Lipschitz condition and $f(0)=0$.

For the qualitative analysis of similar systems using of a direct method of Lyapunov with functionals of Lyapunov-Krasovsky [1-3] is natural. However, despite sufficient theoretical completeness of similar results, their application from the point of view of applied mathematics can be complicated, as research process should be conducted in a Banach space.

It is possible obtain more constructive, in sense of computability, results in finite Euclidean space, applying the additional B.S.Razumikhin conditions [4] imposed on a trajectory of system. For this purpose for analysis of absolute interval stability we will use finite Lyapunov's function of Lurie-Postnikov type with exponential multiplier

$$V(x,t)=e^{\gamma t}\left\{x^T Hx+\beta\int_0^{\sigma(x)}f(\sigma)d\sigma\right\}$$

and with positive definite matrix H.

Sufficient conditions of absolute interval stability of nonlinear control systems of neutral type (1), both uniform and non-uniform on delay are received. Are constructed exponential estimates of solutions damping. Results are presented in the form of constructive algebraic matrix inequalities.

1. Shatyrko A.V., Khusainov D.Ya. Absolute interval stability of indirect regulating systems of neutral type // Journal of automation and information science. – 2010. Vol.42, Iss.6, P.43-54.
2. Шатирко А.В., Хусаінов Д.Я Абсолютна інтервальна стійкість диференціальних систем регулювання нейтрального типу. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. – 2009.-Т.6,№3. С.232-247.
3. Shatyrko A.V., Khusainov D.Ya., Diblik J, Bastinec J, Rivolova A. Estimates of perturbation of nonlinear indirect interval control system of neutral type // Journal of automation and information science. – 2011. Vol.43, Iss.1, P.13-28.
4. Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. – М., Наука, 1988. – 112 С.

Jaroslava Skorikova Student
Department of Mathematics, Faculty of Humanities, University of Zilina, Zilina, Slovensko,
email: jaroslava.skorikova@fpv.uniza.sk;
Boichuk Alexander, *Ukraine,*

APPLICATION OF THE THEORY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS TO CONTROL THEORY.

Skorikova J., Boichuk A.

The aim of this contribution is, using the the-ory of impulsive differential equations [1, 2], using the well-known results on the Fred-holm property of the problem of bounded solutions [3] and the theory of pseudoinversematrices[4, 5] to investigate, in a relevant space, the existence of solutions bounded onthe entire real axis of linear differential systems with impulsive action and applicationthis results to the control theory.

[1] A. D. Myshkis and A. M. Samoilenko, Systems with shocks at given moments oftime, Mat. Sb., 74 (1967), # 2, 202-208, [in Russian].
[2] A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. Impulsive Differential Equations, VyshchaShkola, Kiev, 1987 [in Russian].
[3] K. J. Palmer, Exponential dichotomies and transversal homoclinic points, J. Dif-ferent. Equat., 104 (1984), 149-159.
[4] A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. Generalized Inverse Operators and FredholmBoundary-Value Problems, Koninklijke Brill NV, Utrecht, Boston, 2004.
[5] A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, An. A. Boichuk, Solutions of weakly perturbedlinear systems bounded on the entire axis, Ukr. Mat. Zh., 54 (2002), 1517-1530.

Skripnik Natalia Victorovna
Odessa National University named after I.I. Mechnikova, Odessa, Ukraine,
email: talie@ukr.net;
Kichmarenko Olga Dmitrievna, candidate of sience,
Odessa, Ukraine,
email: olga.kichmarenko@gmail.com

AVERAGING OF FUZZY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MAXIMA

Skripnik N. V, Kichmarenko O. D.

Let E^n be a family of mappings $x:\mathrm{R}^n \to [0,1]$ satisfying the following conditions: 1) x is normal; 2) x is fuzzy convex; 3) x is upper semicontinuous; 4) a closure of the set $y \in \mathbb{R}^n, :, x(y) > 0,$ is compact. Define the metric $D(x,y) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} h([x]^\alpha,[y]^\alpha),$ where $h(X,Y)$ is the Hausdorff metric.

Consider the fuzzy differential equation with maxima

$$x'(t) = \varepsilon f\left(t, x(t), \max_{\tau\in[\gamma(t),g(t)]} |x(\tau)|\right), \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$

where $t \ge 0$ is time; $x \in S \subset \mathrm{E}^n$ is a phase variable; $\varepsilon > 0$ is a small parameter; the initial condition $x_0 \in S;$ a fuzzy mapping $f:\mathbb{R}_+ \times S \times \mathbb{R}_+ \to \mathrm{E}^n;$ the functions $0 \le \gamma(t) \le g(t) \le t.$

If for any $t, z \ge 0, x \in S$ there exists a limit

$$\overline{f}(x,z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(s,x,z)ds, \tag{5}$$

then in the correspondence to equation (1) we will set the following averaged equation

$$y'(t) = \varepsilon \overline{f}\left(y(t), \max_{\tau\in[\gamma(t),g(t)]} |y(\tau)|\right), \quad y(0) = x_0. \tag{6}$$

Theorem. Let in the domain $Q = t, z \ge 0, x \in S$ the following hold:

1) the fuzzy mapping $f(t,x,z)$ is uniformly bounded by M, weakly continuous in t and satisfies the Lipschitz condition in x, z with constant λ;

2) limit (2) exists uniformly with respect to $t, z \ge 0$ and $x \in S$;

3) functions $\gamma(t), g(t)$ are uniformly continuous and $0 \le \gamma(t) \le g(t) \le t;$

4) the solution $y(t)$ of equation (3), $y(0) = x_0 \in S' \subset S$ belongs to the domain S together with a $\rho-$ neighborhood for all $t \ge 0$.

Then for any $\eta \in (0,\rho]$ and $L > 0$ there exists $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ and $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ the following estimate holds $D\big(x(t), y(t)\big) \le \eta,$ where $x(t), y(t)$ are solutions of equations (1) and (3) such that $x(0) = y(0) = x_0.$

Kichmarenko O.D., Skripnik N.V. One scheme of averaging of fuzzy differential equations with maxima // Journal of Advanced Research in Applied Mathematics. – 2011. - Vol.3, ¹1. – P.94-103.

Stryzhak Tamara Grigorevna, the Doctor of physics-mathematical sciences, the Professor of *NTUU "KPI"*
e-mail: stri@aer.ntu-kpi.kiev.ua

MINIMAX CRITERIA OF STABILITY

Stryzhak T.G.

"Minimax criteria of stability" [2] was received on the basis of classical Lagrange theorem about determining the motion stability of a system in a potential field by the minimum of potential energy. It is a sufficient feature for determining the motion stability of a dynamical system under the influence of high-frequency oscillations.

The advantage of the characteristic is that analysis of motion stability does not involve the use of motion equations; it uses only the Lagrange function:

$$L(\dot{q},q,t) = T(\dot{q},q,t) - \Pi(q,t)$$

The theorem: if the function $< \min_{\dot{q}} L(\dot{q},q,t) >$ has a maximum at the point $q_j = q_{j0}$ $(j = 1,...,n)$, then the maximum corresponds to the asymptotically stable position of the system.

(Here $< L(\dot{q},q,t) >= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t L(\dot{q},q,t)dt$)

The variety of different models was studied with the help of "Minimax criteria of stability" and it was, in particular, proved that with the help of oscillations of the suspension center of the pendulum, any pendulum position, even a horizontal position of the pendulum in vertical plane could be made stable. Namely, the following result was received: to make the horizontal position of the pendulum stable the vibration frequency must be two times as much as the vibration frequency for the stability of the vertical position of the pendulum.

In order to prove the theoretical conclusions an experimental installation was designed and built, on which these results were verified. Namely, such a phenomenon was discovered: the suspension center of the pendulum supports rotary motions of the pendulum around the vibrating axis of a bracket.

Other methods of the research were published in works [2, 3, and 4].

It should be noted that the first results of the research of the stability of the top position of the pendulum balance under the influence of the suspension center vibration were published in 1930 in work [1]. These results were developed by many other authors [5].

P.S. The nature in all its variable displays of existence chooses vibration movements. Thus, it can be supposed that there is some feature of optimality which is hidden behind it, i.e. vibration, and the nature is economical rather than wasteful. It is the idea of the vibration movement optimality (min, max), which served as an impulse for the creation of the "Minimax criteria of stability". .

1. Hirsch Paul. Das Pendel mit oszillierendem Ausfhangepunkt - Zeitschrift f?r angewandte Mathematik und Mechanik // Band 10, Heft 1, Februar 1930
2. Stryzhak T. G. Minimax criterion of stability.-Stuttgart ibidem, 2008.-84
3. Stryzhak T. G. Frequency criteria of stability.-Stuttgart ibidem, 2009.-121
4. Stryzhak T. G. Numerical methods of stability reseach.-Stuttgart ibidem, 2010.-148
5. Blechman I.I. Vibrational mechanics – Moscow, Fizmatlit Publishing Compuny,1994 - 398

Yasinskyy Yevgen Volodymyrovych, Programmer Analyst
Atabaska university, Edmonton, Canada
e-mail: yevgeny@athabascau.ca

ASYMPTOTIC OF THE SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR LINEAR STOCHASTIC PARTIAL DIFFERENTIAL DIFFERENCE EQUATION (LSPDDE) WITH RANDOM PERTURBATIONS IN RIGHT PART

Yasinskiy E.V.

Consider on $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t,t\ge 0\},\mathbb{P}\right)$ Cauchy problem for LSPDDE [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\right]+Q\left(B,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)=$$

$$=\varphi(\xi(\omega))Q\left(C,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\frac{dw(t,\omega)}{dt},\ \forall(t,x)\in\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^1 \quad (1)$$

with initial condition

$$Q\left(A,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\bigg|_{t=0}=[Qu]_0, \quad (2)$$

where $Q(A,q,p)\equiv\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{kj}q^k p^j$, $A\equiv\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $B\equiv\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $C\equiv\{c_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$ - are real $n\times n$ - dimensioned matrixes; $\xi(\omega):\Omega\to\mathbb{R}^1$ is a random variable with density function $p_\xi(x)$ [2]; $\varphi(\bullet)$ - function with range of values in $\mathbb{R}^1$; $w(t,\omega)$: $[0,\infty)\times\Omega\ \to\mathbb{R}^1$ - is a scalar standard Wiener process [2]. The strong solution $u(t,x,\omega):[0,\infty)\times\mathbb{R}^1\ \times\Omega\to\mathbb{R}^1$ of Cauchy problem (1), (2) exists and belongs to space $\mathfrak{M}_T$, where the norm is

$$\|u(t,x)\|^2\equiv\int_0^T\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|u(t,x)|^2\,dx\right]^2 dt. \quad (3)$$

It is proved that for $v(t,x)\in\mathbb{R}^1$ as for the Fourier transform by x and for solution $u(t,x,\omega)$ of problem (1), (2) exists a connection of norms: $\|v\|_{\mathfrak{M}_T}=\left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\|u\|_{\mathfrak{M}_T}$.

If roots of polynomial $P(\lambda,i\sigma)=\lambda Q(A,\lambda,i\sigma)+Q(B,\lambda,i\sigma)$ satisfy the condition $\operatorname{Re}\lambda\le\psi(\sigma)<0;\psi(0)=0;$ relevant Cauchy problem (1), (2) of determinate equation with $C\equiv 0$ has the solution; random variables $\xi(\omega)$ doesn't depend from $w(t,\omega)$, then solution of the initial Cauchy problem (1), (2) with $C\ne 0$ exists in $\mathfrak{M}_T$, and the trivial solution $u(t,x)\equiv 0$ is an asymptotically stable in *l.i.m.*

1. Korolyuk V.S., Tsarkov E.F., Yasinskyy Y.V. Probability statistics and random processes.
2. Theory and computer workshop. -Chernivtsi: Zoloti lytavry, 2009. – 798 p.
3. Tsarkov E.F. Random perturbation of functional-differential equations. - Riga: Zinatne, 1982. – 421 p.

Yatsenko Vitaliy, PhD,
Space Research Institute of NASU-NSAU, Kyiv, Ukraine,
E-mail: vyatsenko@gmail.com;
Nalivaichuk Nikolay, M.S.,
National Technical University of Ukraine (KPI), Kyiv, Ukraine,
E-mail: nnv@scs.ntu-kpi.kiev.ua

MATHEMATICAL MODELING AND OPTIMIZATION OF CONTROLLED SUPERCONDUCTING SENSORS WITH MAGNETIC LEVITATION

Yatsenko V.A., Nalivaichuk N.V.

The superconductivity phenomenon was a significant step to improve magnetic suspensions. Most, but not all, conductors of electrical current, when cooled sufficiently in the direction of absolute zero, become superconductors. The superconducting state itself is one in which there is zero electrical resistance and perfect diamagnetism. Free suspension of a probe of a superconducting gravimeter is realized by the Braunbeck-Meisner phenomenon. Here we concentrate on a new high sensitive cryogenic-optical sensor and a method of estimation of the gravitational perturbation acting on the levitated probe.

In this report we describe basic properties of a magnetic levitation, theoretical background, and control algorithms of a probe stability [1-4]. Bilinear control schemes of the static and dynamic types are proposed for the control of a magnetic levitation system. The proposed controllers guarantee the asymptotic regulation of the system states to their desired values. We also describe a simple superconducting gravity meter, its mathematical model, and design of nonlinear controllers that stabilize it at an equilibrium state. Furthermore, an accurate mathematical model of asymptotically stable estimation of a weak noisy signal using the stochastic measurement model is proposed. The phenomenon, in which a macroscopic superconducting ring chaotically and magnetically levitates, is considered. We found that if a non-linear feedback is used then the probe chaotically moves near an equilibrium state. An optimization approach for selection of optimum parameters is discussed.

We also describe an integrated magnetic nanosensor based on a niobium dc SQUID (superconducting quantum interference device) for nanoscale gravimeters is presented. The sensor, having a washer shape with a hole and two Josephson–Dayem nanobridges consists of a Nb/Al bilayer patterned by electron beam lithography (EBL) and shaped by lift-off and reactive ion etch (RIE) processes. The presence of the niobium coils, integrated on-chip and tightly coupled to the SQUID, allows us to easily excite the sensor in order to get the voltage–flux characteristics and to flux bias the SQUID at its optimal point.

1. Samoilenko Yu. I ., Yatsenko V. A. Adaptive estimate the signal acting on macroscopic body in a controlled potential well // Report of National Academy of Science of Ukraine, No 3.-1991.-P. 81-86.
2. V. Yatsenko. Functional structure of the cryogenic optical sensor and mathematical modeling of signal. Cryogenic Optical Systems and Instruments // Proc. of SPIE. Vol. 5172.-2003.-P. 97-107.
3. V. Yatsenko. Estimating the signal acting on macroscopic body in a controlled potential well // Kibernetika, 2.-1989.-P. 81–85.
4. P. Pardalos, P. Knopov, S. Urysev, V. Yatsenko. Optimal estimation of signal parameters using bilinear observation / Rubinov, A. and Gloveredited, B. // Optimization and Related Topics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London.-2001.-P.103-116.

Yatsenko Vitaliy, PhD,
Space Research Institute of NASU-NSAU, Kiyv, Ukraine,
E-mail: vyatsenko@gmail.com;
Trylis Maria, M.S.,
National University of "Kyiv-Mohyla Academy", Kiyv, Ukraine,
E-mail: maria.trylis@gmail.com
Pavlovets Oleg, B.S.,
National Technical University of Ukraine (KPI), Kyiv, Ukraine,
E-mail: deez@i.ua

THE NONLINEAR DYNAMICS OF SPACE WEATHER: OPERATIONAL MODELS, LYAPUNOV EXPONENTS AND PREDICTION

Yatsenko V.A., Trylis M.V., Pavlovets O.V.

Nonlinear dynamics in space physics has grown steadily in scope and depth. While earlier research focuses on classification, empirical prediction, and first-principles modeling of geomagnetic time series, recently three more directions have been developed: closed-form time series models which are data-derived, prediction of space-related disturbances, and modeling from multiple measurement probes in the same region, or in several regions. We discuss this growth in terms of six directions whose results have useful implications for theoretical and applied physics, in particular space physics processes. Six such directions are identified: (a) empirical time series prediction with nonlinear autoregressive moving-average models; (b) measurement of physical properties of the currents from the coefficients of the NARMAX models, such as characteristic time scales and coupling strengths. Using a Dst index model we measure the ring current decay time as a function of storm phase and activity, and identify new oscillation time scales correlating with the substorm injection activity; (c) estimation of Lyapunov exponents of time series; (d) dynamic probabilistic risk analysis; (e) spatiotemporal nonlinear modeling the amplitude and location of the disturbance as a function of space, as well as its time evolution; (f) nonlinear dynamical models can be coupled to other physical or empirical approaches to build comprehensive space weather models. BBNM, an ionospheric-magnetospheric space weather model, is discussed as an example. Other applications of bilinear dynamics are also briefly discussed. This report presents a comparative analysis of different connectionist and dynamical models for forecasting the space weather [1]. In developing space weather models, it is essential to verify the predictive capability by using out-of-sample (cross-validation) testing, and comparison between the candidate model and reference models or competing models to extract the prediction skill, i.e. the prediction capability relative to other models. These are standard topics for nonlinear model development (e.g. the reference model is the bilinear model). Similarly the error analysis in nonlinear dynamics can also be used as a guide to develop metrics necessary for progress evaluation in space weather

1. V. Yatsenko, V. Kuntzevich, O. Cheremnikh. Geomagnetic activity model identification and space weather forecasting // Problems of Control and Informatics, No 2.-2009.

О РЕДУКЦИИ НЕАВТОНОМНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЕ

Агафонов С.А., Костюшко И.А.

Рассматривается система

$$\ddot{x} + \varepsilon(G_0 + \ddot{\psi}G_1)\dot{x} + \varepsilon(K_0 + \varepsilon\ddot{\psi}K_1)x = 0, \tag{1}$$

$x \in R^n$, $\varepsilon << 1$, матрицы G_0, G_1, K_0, K_1 - постоянные и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \psi(\tau)d\tau = 0.$$

Система (1) записывается в виде

$$\dot{u} = \left(\varepsilon^{1/2}D + \varepsilon D_0 + \varepsilon^{3/2}D_1\right)u, u \in R^{2n}, \tag{2}$$

где

$$D = \begin{pmatrix} O_n & E_n \\ -K_0 & O_n \end{pmatrix}, D_0 = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ O_n & -G_0 - \ddot{\psi}G_1 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ -\ddot{\psi}K_1 & O_n \end{pmatrix}.$$

В системе (2) сделаем замену $u \to v$

$$u = \left(E_{2n} + \varepsilon^{1/2}X_1 + \varepsilon X_2 + \varepsilon^{3/2}X_3 + \varepsilon^2 X_4 + \varepsilon^{5/2}X_5 + \varepsilon^3 X_6\right)v + O\left(\varepsilon^{7/2}\right), \tag{3}$$

чтобы преобразовать систему (2) к виду

$$\dot{v} = \left(\varepsilon^{1/2}M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^{3/2}M_3 + \varepsilon^2 M_4 + \varepsilon^{5/2}M_5 + \varepsilon^3 M_6\right)v + O\left(\varepsilon^{7/2}\right). \tag{4}$$

В (3) $X_i(t)$ подлежат определению, а в (4) M_i - постоянные матрицы, которые находятся из условия отсутствия секулярных членов в X_i. Матрицы M_i, имеют вид

$$M_1 = D, M_2 = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ O_n & -G_0 \end{pmatrix}, M_3 = O_{2n}, M_4 = O_{2n}, M_5 = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ -g_0 G_1^2 K_0 & O_n \end{pmatrix},$$

$$g_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \dot{\psi}^2(\tau)d\tau, M_6 = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ O_n & [G_1 G_0 G_1 + G_1(K_1 - G_1 G_0) - K_1 G_1]g_0 \end{pmatrix}$$

Введя обозначение $v = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и исключив η получим с точностью до членов ε^3 включительно систему с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\xi} + (\varepsilon G_0 - \varepsilon^3[G_1 G_0 G_1 + G_1(K_1 - G_1 G_0) - K_1 G_1]g_0)\dot{\xi} +$$
$$+(\varepsilon K_0 + \varepsilon^3 g_0 G_1^2 K_0)\xi = 0.$$

Адамчук Юлия Александровна, студентка 6 курса, факультета математики,
Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова, Одесса, Украина,
e-mail: julia_adamchyk@mail.ru

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНЫМИ И СИНГУЛЯРНЫМИ ПУЧКАМИ МАТРИЦ

Адамчук Ю.А.

Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} x + B\dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t) \to 0, t \to 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $A, B \in \Re^{m\times n}$, функция f: D$\to \Re^m$ непрерывна в
$D = \{(t,x): t \in \Re, 0 < |t| \le a, x \in \Re^n, \|x\| \le b\}, 0 < a, b = consts.$

Система изучается в случаях, когда пучок матриц $A + B\dfrac{d}{dt}$ — является регулярным или сингулярным. Согласно теоремам о приведении регулярного и сингулярного пучков матриц к строго эквивалентному каноническому квазидиагональному виду, существуют невырожденные линейные преобразования, приводящие пучок к указанному виду:

$$diag\left\{h\{\overbrace{0}^{g}, L_{\varepsilon_{g+1}},...,L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}},...,L'_{\eta_g}; N^{(u_1)},...,N^{(u_s)}; J + E\frac{d}{dt}\right\}, \tag{2}$$

где первые блоки $L_{\varepsilon_{g+1}},...,L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}},...,L'_{\eta_g}$ матрицы (2) отвечают минимальным индексам пучка (и отсутствуют в регулярном пучке), блоки $N^{(u_1)},...,N^{(u_s)}$ отвечают бесконечным элементарным делителям пучка и блок $J + E\dfrac{d}{dt}$ - конечным элементарным делителям пучка.

В соответствии со структурой канонического квазидиагонального пучка (2) задача (1) приводится к эквивалентной задаче

$$\begin{cases} \psi(t, z_1, z_2) = 0, z_1(t) \to 0, t \to 0 \\ \dfrac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, z_1, z_2), z_2(t) \to 0, t \to 0 \end{cases} \tag{3}$$

где $z_1 : (0; t_0] \to \Re^p, z_2 : (0; t_0] \to \Re^l, p + l = n, \psi \in \Re^k, \varphi \in \Re^l, k + l = m.$

Найдены достаточные условия существования решений задачи (3) (а значит, и задачи (1)). При различных дополнительных условиях получено, что множество решений задачи (1) может содержать один элемент, семейство решений, зависящих от произвольных вещественных постоянных или семейство решений, зависящих от произвольных функций из некоторого класса непрерывно дифференцируемых функций. Предложено два метода исследования. Один предполагает сначала исследовать функциональный блок системы (3), а второй - начать с исследования дифференциального блока системы (3).

1. Лаппо – Данилевский И.А. Теория функций от матриц и систем линейных дифференциальных уравнений.- М.;Л.; ОНТИ,1934.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. [изд. 4-ое, доп.]. Москва: Наука, 1988.
3. Шарай Н.В, Самкова Г.Є. Асимптотика розв’язків деяких напів’явних систем диференціальних рівнянь. Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314-315. Математика. 2006. с.181-188.

Алексеев Федор Федорович, кандидат техн. наук, доцент,
КГТУ им. А.Н.Туполева, Казань, Россия,
email: faleksееv@mail.ru

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА. АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Алексеев Ф.Ф.

1. Рассматриваются T-S-системы управления (СУ) с запаздыванием с нелинейным идентифицирующим устройством. В задаче идентификации для нечетких матриц-функций используются обобщенные прямые и обратные нечеткие преобразования И.Перфильевой.

2. Для T-S-СУ на нечетких временных шкалах получены условия экспоненциальной устойчивости. На основе выпукло-сходящихся алгоритмов, обобщающих алгоритмы скоростного градиента, и циклического ступенчатого по времени (несинхронизированного) управления получены алгоритмы управления. Нечеткость во временной шкале вводит в СУ запаздывание управления и упреждение. Вводится система правил по упреждению-запаздыванию: по запаздыванию, по упреждению, смешанные правила. Интервалы по запаздыванию и упреждению делятся на участки, скажем, равномерно. Вводятся индексы распознавания запаздывания и упреждения. Функции принадлежности вводятся как определяющие какую-то цель управления.

3. Разработаны адаптивные алгоритмы идентификации систем с дискретным временем с приложением к идентификации параметров вертолета. Настраиваемую модель объекта выберем в виде $x_{s+1}{}^{id} = \Sigma_{i=1}^{r} \Sigma_{j=1}^{r} h_i(z(s))h_j(z(s)) \, [(A_{1i}{}^{id} - B_{2i}{}^{id}F_j)x_s{}^{i} + A_{2i}{}^{id}x^{id}(s - \tau_i(s)) + B_i{}^{1id}(s)\varphi_i{}^{1}(s,\sigma_s) + B_i{}^{2id}(s)\varphi_i{}^{2}(s-\tau_i(s), \sigma(s-\tau_i(s))) + B_{1i}{}^{id}u_{1i}(\sigma') + B_{2i}{}^{id}F_j e_s + B_3{}^{id}u_3(\sigma(s-\tau(s))]$, $\sigma_s = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(s))[C_{1i}{}^{id}(s)x_s + C_{2i}{}^{id}(s)x(s-\tau_i(s))]$, $\sigma_{1s} = C_{1i}{}^{id}(s)x_s$.

Вводятся фазовые и параметрические рассогласования: $e_s{}^{id} = x_s{}^{id} - x_s$; $A_{1ies} = A_{1is}{}^{id} - A_{1i}$; $A_{2ies} = A_{2is}{}^{id} - A_{2i}$; $B_{ies} = B_{is}{}^{1id} - B_i^1$; $B_{ies}{}^2 = B_i^{2id} - B_i^2$; $B_{1ies} = B_{1is}{}^{id} - B_{1i}$; $B_{2ies} = B_{2is}{}^{id} - B_{2i}$; $C_{1ies} = C_{1is}{}^{id} - C_{1i}$; $C_{2ies} = C_{2is}{}^{id} - C_{2i}$.

Уравнения для фазовых рассогласований имеет такой же вид с заменой матриц системы на $A_{1is}{}^{id}$, $A_{2is}{}^{id}, B_{is}{}^{1id}, B_i^{2id}, B_{1is}{}^{id}, B_{2is}{}^{id}, C_{1is}{}^{id}, C_{2is}{}^{id}$ соответственно. Составляется система уравнений $A_{1is+1}{}^{id} = A_{1is}{}^{id} - F_{1s}$, $A_{2is+1}{}^{id} = A_{2is}{}^{id} - F_{2s}$, $B_{is+1}{}^{1id} = B_{is}{}^{1id} - F_{3s}$, $B_{is+1}{}^{2id} = B_{is}{}^{2id} - F_{4s}$, $B_{1is+1}{}^{id} = B_{1is}{}^{id} - F_{5s}, B_{2is+1}{}^{id} = B_{2is}{}^{id} - F_{6s}$, $C_{1ies+1} = C_{1is}{}^{id} - F_{7s}$, $C_{2ies+1} = C_{2is}{}^{id} - F_{8s}$. $F_{1s} - F_{8s}$ подлежат определению с учетом обратных нечетких преобразований для обеспечения сходимости процесса настройки. Выбираем функцию Ляпунова вида $V = sp(\Theta_t{}^T\Theta_t)$, Θ - блочная матрица вида $\Theta = [A_{1is}{}^{id}A_{2is}{}^{id}B_{is}{}^{1id}B_{is}{}^{2id}B_{1is}{}^{id}B_{2is}{}^{id}C_{1is}{}^{id}C_{2is}{}^{id}]$;
$\Delta V_s = V_{s+1} - V_s = sp[(\Theta_s{}^T - F_s{}^T)(\Theta_s - F_s) - \Theta_t{}^T\Theta_t] = sp(-2\Theta_s{}^T F_s + F_s{}^T F_s)$. F_s^T - блочная матрица вида $F_s^T = (F_{1s}{}^T F_{2sT} F_{3s}{}^T F_{4s}{}^t F_{5s}{}^T F_{6s}{}^T F_{7s}{}^T F_{8s}{}^T)$. F_s разыскиваем в виде $F_s = \varepsilon_s P^{id} e_s y_{s-1}{}^T, P^{id} = P^{idT}$, $y_s{}^T = (x_s{}^T u_1{}^T u_2{}^T u_3{}^T)$, ε_s - скалярная функция.

Теорема. Если существуют $\varepsilon(s)$, P^{id} такие, что ΔV_s отрицательно определенная, то $\lim e_s{}^{id} = 0$, $\lim A_{1ies} = 0$, $\lim A_{2ies} = 0$, $\lim B_{ies}{}^1 = 0$, $\lim B_{ies}{}^2 = 0$, $\lim B_{1ies} = 0$, $\lim B_{2ies} = 0$, $\lim C_{1ies} = 0$, $\lim C_{2ies} = 0$ при $t \to \infty$.

Алексеев Федор Федорович, кандидат техн. наук, доцент,
КГТУ им. А.Н.Туполева, Казань, Россия,
email: faleksеev@mail.ru;
Али Сухил, магистрант, факультет автоматики и электронного приборостроении,
КГТУ им. А.Н.Туполева, Казань, Россия,
email: Suhail Ali suhilali1981@gmail.com;
Спиридонов Игорь Олегович, магистрант, факультет автоматики и электронного приборостроения,
КГТУ им. А.Н.Туполева, Казань, Россия,
email: igor_gen_1@mail.ru

СИНТЕЗ НЕЧЕТКИХ РЕГУЛЯТОРОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИДЕНТИФИЦИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ВЕРТОЛЕТА

Алексеев Ф.Ф., Али С., Спиридонов И.О.

1. Рассматриваются T-S-системы управления (СУ) с нелинейным идентифицирующим устройством. В задаче идентификации используются обобщенные прямые и обратные нечеткие преобразования И.Перфильевой. Выбираются базисные функции $A_1(x),...,A_n(x)$, формирующие нечеткое разбиение интервала $[a,b]$, и определяются формулы для прямого F-преобразования и обратного F-преобразования. Метод нечетких преобразований обобщается на нечеткие матрицы-функции. На нечеткую матрицу-функцию $M\Phi$ накладываются некоторые требования: ограничиваемся использованием обобщенных F-преобразований только для нечетких матриц-функций, обладающих в некотором смысле свойствами непрерывности и выпуклости. Применяя принцип расширения Заде, получаем формулы для компонент обобщенных нечетких преобразований.

2. Рассмотрим СУ с идентифицирующим устройством: $u_1(\sigma)$ - четкое управление, $u_2(\sigma)$ - управление, определяемое НЛР, $u_3(\sigma)(s-\tau(s))$ - управление с циклическим ступенчатым (несинхронизированным) запаздыванием, σ' - выход наблюдателя, $e_s = x_s - x_s'$ - невязка (относительно вектора состояния наблюдателя). СУ с идентифицирующим устройством описывается уравнениями $x_{s+1} = \Sigma_{i=1}^r \Sigma_{j=1}^r h_i(z(s))h_j(z(s))\,[(A_{1i} - B_{2i}F_j)x_s + A_{2i}x(s-\tau_i(s)) + B_i^1(s)\varphi_i^1(s,\sigma_s) + B_i^2(s)\varphi_i^2(s-\tau_i(s),\, \sigma(s-\tau_i(s))) + B_{1i}u_{1i}(\sigma') + B_{2i}F_je_s + B_3u_3(\sigma(s-\tau(s)))]$,

$\sigma_s = \sum_{i=1}^r h_i(z(s))[C_{1i}(s)x_s + C_{2i}(s)x(s-\tau_i(s))]$, $\sigma_{1s} = C_{1i}(s)x_s$.

При аналогичной форме уравнений для идентифицирующего устройства уравнение невязки $e_s = x_s - x_s'$ будет иметь вид $e_{s+1} = \Sigma_{i=1}^r \Sigma_{j=1}^r h_i(z(s))h_j(z(s))\,[(A_{1i} - B_i^2(s)\varphi_i^2(s-\tau_i(s),\, L_iC_{1j})e_s + A_{2i}e(s-\tau_i(s)) + B_i^1\varphi_i^1(s,\sigma_s) - B_i^1\varphi_i^1(s,\sigma_s') + B_i^2(s)\varphi_i^2(s-\tau_i(s),\sigma(s-\tau_i(s))) - B_i^2(s)\varphi_i^2(s-\tau_i(s),\, \sigma'(s-\tau_i(s))) - L_iC_{2j}e(s-\tau_j(s))]$.

3. Разработаны адаптивные алгоритмы идентификации систем с дискретным временем с приложением к идентификации параметров вертолета. Настраиваемая модель объекта выбирается в виде $x_{s+1}^{id} = \Sigma_{i=1}^r \Sigma_{j=1}^r h_i(z(s))h_j(z(s))\,[(A_{1i}^{id} - B_{2i}^{id}F_j)x_s^i + A_{2i}^{id}x^{id}(s-\tau_i(s)) + B_i^{1id}(s)\varphi_i^1(s,\sigma_s) + B_i^{2id}(s)\varphi_i^2(s-\tau_i(s),\, \sigma(s-\tau_i(s))) + B_{1i}^{id}u_{1i}(\sigma') + B_{2i}^{id}F_je_s + B_3^{id}u_3(\sigma(s-\tau(s)))]$, $\sigma_s = \sum_{i=1}^r h_i(z(s))[C_{1i}^{id}(s)x_s + C_{2i}^{id}(s)x(s-\tau_i(s))]$, $\sigma_{1s} = C_{1i}^{id}(s)x_s$.

Алілуйко Андрій Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач,
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна,
e-mail: aliluyko@imath.kiev.ua;
Єрьоменко Валерій Олександрович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна

ІНВАРІАНТНІ КОНУСИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Алілуйко А.М., Єрьоменко В.О.

Вивчаються властивості позитивності лінійних диференціальних та різницевих систем відносно деяких класів конусів в напівупорядкованому просторі. Дифференциальная система

$$\dot{X} = F(X,t), \quad X \in D, \quad K \subset E, \quad t \ge t_0 \ge 0$$

має інваріантний конус (називається позитивною відносно конуса K), якщо з $X_0 \in K$ випливає $X(t) \in K$ при $t \ge t_0$.

При вивченні багатозв'язних систем використовуються конуси типу кругового та його різні узагальнення. Зокрема, вивчаються властивості інваріантності еліпсоїдального конуса [1]:

$$K(Q) = \left\{ z \in R^{n+1} : z^T Q z \ge 0, z^T h \ge 0 \right\}, \tag{1}$$

де h – нормований власний вектор симетричної матриці $Q = Q^T$ з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$, що відповідає її єдиному додатному власному значенню γ.

До класу еліпсоїдальних конусів типу (1) належить так званий світловий конус

$$K_a = \left\{ z \in R^{n+1} : \|z\| \le (a,z) \right\}, \tag{2}$$

де $(a,z) = a^T z$ – скалярний добуток, a – заданий вектор з нормою $\|a\| > 1$. При цьому в (1) враховано, що $Q = aa^T - I$, $h = \|a\|^{-!} a$. Тоді $\gamma = a^T a - 1$.

Встановлено, що лінійна диференціальна система

$$\dot{z} = Mz, \quad z \in R^{n+1}, \ t \ge 0 \tag{3}$$

має інваріантний конус (2), якщо виконуються нерівності

$$\frac{2d}{\gamma+1} > \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_1}, \ \lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3 \ge 0,$$

де

$$\lambda_1 = \gamma(\gamma+1), \quad \lambda_2 = 2\gamma d + \gamma(\gamma+1)\lambda_{\min}(A^T + A), \quad \lambda_3 = \lambda_{\max}(2\gamma d(A^T + A) + (\gamma c - b)(\gamma c - b)^T),$$

$$A = R^T M R, \quad b = R^T M a, \quad c = R^T M^T a, \quad d = a^T M a,$$

R – ортогональне доповнення вектора a, тобто $a^T R = 0, \ R^T R = I$.

Схожі умови інваріантності конуса (2) формулюються для різницевої системи $z_{k+1} = M z_k$, ($z_k \in R^{n+1}$, $k = 0, 1, \dots$). Для системи (3) знайдено умови експоненціальної стійкості і позитивності відносно конуса (2).

1. Алілуйко А.М. Інваріантні конуси та стійкість лінійних динамічних систем / Андрій Алілуйко, Олексій Мазко // Укр. мат. журн. – 2006. – Т.58, № 11. – С. 1446–1461.

Амбарцумян Самвел Размикович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Государственный аграрный университет Армении, Ереван, Республика Армения,
e-mail: samvelham@yahoo.com;

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПРИ *k* НУЛЕВЫХ И *q* ПАР ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Амбарцумян С.Р.

Задача об устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений в критических случаях, когда на систему на конечном промежутке времени действуют интегрально-малые возмущающие силы (устойчивость по действующей силе) [1,2], имеют теоретическое и прикладное значение в разных областях современной науки и техники.

В работе рассматривается устойчивость по действующей силе системы нелинейных дифференциальных уравнений ***n***-го порядка в критическом случае, когда характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения системы имеет ***k*** нулевых и ***q*** пар чисто мнимых корней и ***(n- k-2q)*** корней с отрицательными вещественными частями, причем нелинейные члены – аналитические функции в R^n, разложения которых по степеням переменных начинается с членов не ниже второго порядка [3].

Известно [4], что в этом случае только с помощью линейного приближения системы невозможно решить задачу устойчивости рассматриваемой системы, то есть имеем критический случай. С математической точки зрения критические случаи можно рассматривать как исключение. Однако с механической точки зрения эти случаи имеют важное значение.

При помощи построения функции Ляпунова для системы нелинейных дифференциальных уравнений в критическом случае получены достаточные условия, накладываемые на нелинейные члены, обеспечивающие асимптотическую устойчивость по действующей силе тривиального решения рассматриваемой системы.

В работе приведен также конкретный пример, удовлетворяющий приведенным в работе ограничениям и являющийся устойчивым по действующей силе.

1. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. О неустойчивости систем дифференциальных уравнений при интегрально-малых возмущениях // Ученые записки ЕГУ. – 1989. – вып. 1. – с. 27-32.
2. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости // Ученые записки ЕГУ. – 1986. – вып. 2. – с. 39-46.
3. Каменков Г.В. Избранные труды // Наука.– М. – том1. – 1971. – 259 с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения // Наука.– М.– 1966. – 530 с.

Анашкин Олег Васильевич, д.ф.м.н.
Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского, Симферополь, Україна,
e-mail: anashkin@crimea.edu; oanashkin@yandex.ru;

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Анашкин О.В.

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным возмущением в фиксированные моменты времени

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(t,y) = f(t,y) + R(t,y), \; t \neq \tau_k, \\ \Delta y\big|_{t=\tau_k} &= H_k(y) = h_k(y) + r_k(y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta > 0$, $|R(t,y)| = o(|y|)$, $|r_k(y)| = o(|y|)$ при $|y| \to 0$, $k = 1,2,\dots$, $f(t,0) = h_k(0) = 0$. Предполагается, что функции $f(t,x)$ и $h_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица по x в некоторой окрестности нуля $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ и $k = 1,2,\dots$.

Системы с импульсным возмущением или, короче, импульсные системы призваны быть инструментом моделирования динамических процессов, подвергающихся кратковременным воздействиям (ограниченных) возмущений в отдельные моменты времени. Длительность воздействий настолько мала, что ей можно пренебречь и считать, что параметры, описывающие состояние системы (фазовые переменные), изменяются мгновенно. Решения импульсных систем имеют разрывы первого рода и традиционно считаются непрерывными слева. Понятие устойчивости решений импульсной системы по Ляпунову с фиксированными моментами импульсного воздействия вводится естественным образом, также как и при отсутствии импульсных воздействий. Прямой метод Ляпунова, как и в теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений, является основным в исследовании устойчивости нелинейных импульсных систем. Классические теоремы Ляпунова сетественным образом переносятся на импульсные системы, но специфика импульсных систем приводит также и к совершенно специфическим формулировкам. Подчеркнем, что прямой метод Ляпунова для импульсных систем имеет еще одну важную специфику. Всякий, кто попробует практически применить метод функций Ляпунова для импульсных систем, быстро обнаружит, что эти функции также удобно предполагать разрывными по времени в моменты импульсного воздействия.

В настоящем докладе разрывные функции Ляпунова применяются для исследования критического случая теории устойчивости импульсных систем. А именно, предполагается, что *невозмущенная* импульсная система

$$\dot{x} = f(t,x), \; t \neq \tau_k, \; \Delta x\big|_{t=\tau_k} = h_k(x),$$

критическая, т.е. нулевое решение этой системы устойчиво, но сколь угодно малые нелинейные возмущения правых частей R, r_k могут нарушить устойчивость.

Критический случай для импульсных систем, как и в случае обыкновенных уравнений, характеризуется свойствами матрицанта системы линейного приближения. В некритическом случае экспоненциальное убывание матрицанта гарантирует асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1). Для импульсных систем характерно большее разнообразие критических случаев, чем при отсутствии импульсного воздействия.

Андреев Юрий Михайлович, доктор техн. наук, доцент кафедры системы и процессы управления,
НТУ «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина,
e-mail: andreew@kharkov.ukrtel.net
Беломытцев Андрей Сергеевич, кандидат техн. наук, доцент кафедры теоретической механики,
НТУ «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина,
e-mail: andr_belomytcev@mail.ru
Дружинин Евгений Иванович, кандидат техн. наук, доцент кафедры теоретической механики,
НТУ «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина,
e-mail: druzhinin_e_i@ukr.net

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Андреев Ю.М., Беломытцев А.С., Дружинин Е.И.

Во многих силовых установках вынужденные нелинейные колебания являются причиной усталостных разрушений элементов передач и требуют специального расчетного исследования. Особенно актуальна задача расчета таких колебаний и оценка их устойчивости в установках, содержащих мощный источник возбуждения, например, ДВС, что характерно для колесных и гусенечных транспортных машин, сельскохозяйственной техники, судовых и тепловозных установок.

С появлением численных итерационных алгоритмов анализа, удобных для реализации на ЭВМ, стали доступны новые эффективные приемы оценки устойчивости различных режимов функционирования сложных нелинейных систем.

В докладе рассмотрены способы оценки устойчивости, опирающиеся на исследование устойчивости по первому приближению, и связанные с итерационными процессами определения периодических решений. Эти способы требуют незначительного по сравнению с самим определением периодического решения объема вычислений и сводятся к определению собственных значений некоторых матриц, вычисляемых в ходе итерационных процессов. Исследование установившихся движений нелинейных механических систем проводится с помощью стробоскопического варианта метода точечных отображений, использующего отображение сдвига по траекториям. Определение периодического решения неавтономного векторного дифференциального уравнения, описывающего поведение нелинейной системы, эквивалентно нахождению неподвижной точки точечного отображения и может быть сведено к решению некоторого неявно заданного уравнения, для решения которого используется итерационный процесс метода Ньютона. Для оценки устойчивости и анализа бифуркаций периодических решений вычисляются мультипликаторы уравнения в вариациях. Наибольший интерес представляют точки бифуркации, в которых периодические решения теряют устойчивость. Периодические решения неавтономного векторного дифференциального уравнения являются асимптотически устойчивыми, если спектральный радиус уравнения в вариациях меньше единицы, поэтому потеря устойчивости связана с выходом одного или пары мультипликаторов из круга единичного радиуса. Приведенный выше алгоритм иллюстрирует методику исследования установившихся колебаний в системах рассматриваемого класса. На первом этапе проводится расчет основных периодических колебаний, который позволяет определить области существования непериодических установившихся движений и периодических движений увеличенного периода. Безусловно, нельзя быть уверенным, что обнаружены все возможные установившиеся движения, например, остается открытым вопрос поиска периодических решений, образующих замкнутые ветви. Приведенный алгоритм был использован для расчета вынужденных колебаний привода распределительного вала топливных насосов дизеля с антивибратором.

Бабенко Сергій Віталійович, аспірант
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: sofuslee@rambler.ru;

О СВЯЗНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ КРУПНОМАСШТАБНОЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ ПО ВРЕМЕНИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Бабенко С.В.

Рассматривается крупномасштабная система динамических уравнений на временной шкале [1], описывающая динамику некоторой крупномасштабной непрерывно-дискретной по времени механической системы S

$$x^{\Delta}(t) = F(t,x), \quad F(t,0) = 0(S)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (то есть, F является rd-непрерывной и регрессивной функцией [1]). Предполагается, что система S допускает декомпозицию на m подсистем, динамика каждой из которых описывается уравнением

$$x_i^{\Delta}(t) = A_i x_i + f_i(t,x_i) + h_i(t,x), (S_i)$$

где вектор $x_i(t)$ является положением системы S_i и представляет i-ую компоненту вектора $x(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t), ..., x_m^T(t))^T$ крупномасштабной системы. В (S_i) функция $A_i x_i + f_i(t,x_i)$ описывает динамику подсистемы S_i, независимой от влияния других подсистем системы S, а функция h_i описывает действие крупномасштабной системы S на подсистему S_i. Предполагается, что функции $h_i(t,x)$ представляются в виде

$$h_i(t,x) \equiv h_i(t, e_{i1}x_1, e_{i2}x_2, ..., e_{im}x_m), \quad i = 1,2,...m, (1)$$

где элементы e_{ij} матриц взаимосвязи $E = [e_{ij}]_{i,j=1}^m$ определяются так:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } S_j \text{ действует на } S_i \\ 0, & \text{если } S_j \text{ не действует на } S_i. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается также, что выполняются оценки

$$\sup_{t \geq t_0, t \in \mathbb{T}} \| e_{A_i}(t,t_0) \| \leq c_1(t_0), \quad \sup_{t \geq t_0, t \in \mathbb{T}} \| e_{A_i}^{-1}(t,t_0) \| \leq c_2(t_0), \quad i = 1,2,...,m. (3)$$

где $e_{A_i}(t,t_0)$ обозначает матричную экспоненциальную функцию [1] системы $x_i^{\Delta}(t) = A_i x_i$, $i = 1,2,...,m$. Условия (3) гарантируют нейтральную устойчивость нулевого решения линейного приближения системы (S).

При указанных предположениях относительно системы (S) ставится задача о связной устойчивости [2] ее нулевого решения. Для решения этой задачи используется предложенный в работе [3] метод вспомогательных разрывных функций типа Ляпунова, на основании которого получены достаточные условия связной устойчивости нулевого решения системы (S).

[1.] *Bohner,M., Peterson, A.* Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications. Birkhaser, Boston - Basel - Berlin, 2001.--- 358 p.

[2.] Siljak D.D. Asymptotic stability and Instability of Large-Scale Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. --- 1973. --- Vol. AC-18, No. 6 --- pp. 636-645.

[3.] Бабенко С.В, Слынько В.И. Устойчивость решений одного класса нелинейных динамических уравнений // Нелинейные колебания. --- 2010. --- Том 14, N 4. --- С. 439 --- 460.

Барабанов Иван Николаевич, к.ф.м.н.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия,
e-mail: ivbar@ipu.ru;

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ В ОБЫКНОВЕННОЙ ТОЧКЕ КВАЗИАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

Барабанов И. Н

Исследуется существование и устойчивость одночастотных колебаний периодической системы, близкой к автономной системе. В [1] показано, что период на семействе нелинейных колебаний автономной системы зависит, как правило, только от одного параметра. При этом точки семейства делятся на обыкновенные (производная от периода по параметру отлична от нуля) и критические (указанная производная обращается в нуль). Для системы произвольного порядка исследуется рождение колебаний при наличии малых возмущений соответствующей частоты и их устойчивость. Для системы второго порядка эти вопросы рассматривались в [2,3].

Рассматривается квазиавтономная система с малым периодическим возмущением, предполагается, что порождающая автономная система допускает однопараметрическое семейство периодических решений. Предполагается, что исследуемая точка семейства обыкновенная, что означает наличие двух нулевых характеристичесих показателей в жордановой клетке. Предполагается также, что других нулевых характеристических показателей не имеется.

Приводятся необходимые и достаточные условия существования периодического решения возмущенной системы. С помощью этих условий строится периодическое решение возмущенной системы в виде ряда по степеням малого параметра. Приводятся условия асимптотической устойчивости в малом полученного периодического решения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-01-00468 и Программы 15 ОЭММПУ РАН (проект 2.3).

1. Тхай В.Н. Период на семействе нелинейных колебаний и периодические движения возмущенной системы в критической точке семейства // Прикл. матем. и механика. -- 2010. -- 74, вып. 5. -- С. 812-823.

2. Тхай В.Н. Колебания и устойчивость в квазиавтомной системе. I. Обыкновенная точка однопараметрического периодических движений // Автоматика и телемеханика. -- 2006. -- № 9. -- С. 90-98.

3. Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Стабилизация колебаний из однопараметрического семейства автономной системы // Автоматика и телемеханика. -- 2009. -- № 2. -- С. 34-41.

Баркин Александр Иванович, доктор технических наук, профессор,
ИСА РАН, Москва, Россия,
e-mail: barkin@isa.ru

ДОСТАТОЧНЫЕ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Баркин А.И.

Рассматриваются нелинейные системы автоматического управления с одной нестационарной нелинейностью секторного типа. Для получения достаточных условий абсолютной устойчивости таких систем применялись функции Ляпунова и частотные методы. Широко известен круговой критерий, для проверки которого нужна лишь частотная характеристика линейной части и величина сектора, в котором расположена нелинейная характеристика [1]. Однако этот критерий дает в большинстве случаев заниженную оценку области устойчивости. В данной работе обсуждается достаточный частотный критерий, основанный на специальном нелинейном преобразовании вектора состояния исследуемой системы, что эквивалентно использованию функций Ляпунова в виде форм четных степеней. Этот подход позволяет значительно улучшить оценку области устойчивости в пространстве параметров по сравнению с круговым критерием [2]. Однако необходимая граница абсолютной устойчивости все же не достигается даже при оптимизации по свободным параметрам.

Другой обсуждаемый подход состоит в поиске необходимой границы устойчивости на базе уравнений Е.С. Пятницкого [3]. Эти уравнения описывают предельную систему, устойчивость которой необходима и достаточна для абсолютной устойчивости исходной системы с нестационарной нелинейностью. Как показано в докладе, эффективным методом изучения предельной системы является метод гармонического баланса по заданному числу гармоник. Разработана программа, позволяющая с любой точностью для систем любого порядка вычислять границу устойчивости по величине сектора нелинейности [4]. Известно, что для систем второго и третьего порядка найденные необходимые условия устойчивости совпадают с достаточными [5].

Во многих случаях приемлемую границу устойчивости можно получить по первому приближению, допускающему простое и наглядное геометрическое решение задачи. Для вычисления оценки области устойчивости нужна только частотная характеристика линейного блока, которая может быть задана в виде массива экспериментальных данных.

Предложен также способ получения оценки параметрической области абсолютной устойчивости импульсной системы, базирующийся на применении метода гармонического баланса к исследованию простых нелинейных колебаний.

1. Либерзон М.Р. Очерки о теории абсолютной устойчивости// Автоматика и телемеханика. 2006.№10.С.86.3

2. Баркин А.И., Рокин Д.Н. Модернизация одного критерия абсолютной устойчивости //Автоматика и телемеханика. 2008. №5.С.15-24.

3. Пятницкий Е.С. Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем // Автоматика и телемеханика . 1970. №1.С.5-15.

4. Алиев А.С., Баркин А.И. Алгоритм вычисления максимальной величины области абсолютной устойчивости//Информационные технологии и вычислительные системы 3/2009, С. 3-11.

5. Рапопорт Л.Б. Антипериодические движения и алгебраический критерий абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем в трехмерном случае. // Автоматика и телемеханика .1993. №7. С. 38-54.

Башняков Александр Николаевич, кандидат физ.-мат. наук,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: bash@unicyb.kiev.ua

СВОЙСТВА МАКСИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧАХ ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Башняков А.Н.

В работе обосновываются свойства множеств достижимости дискретной системы, на основе которых доказываются компактность максимального множества начальных условий, свойства его границы и внутренних точек. Обозначим: R^n – евклидово n-мерное пространство, $\operatorname{int} A$, ∂A – внутренность и граница множества $A \subset R^n$ соответственно, $[0,N] = \{0,1,...,N\}$ – множество индексов. Рассмотрим дискретную систему [1]

$$x(k+1) = f_k(x(k)),\ k \in [0, N-1], \tag{1}$$

где $f_k : D \to D \subset R^n$ – n-мерная функция, в области D удовлетворяющая локальному условию Липшица. Обозначим $x(k) = x(k, x_0)$ – решение системы (1) при условии $x(0) = x_0$, $k \in [1, N]$, $x(0) = x(0, x_0) = x_0$. Пусть $G_0 \subset D$ – некоторое множество, $\Phi(k) \subset D$ – множество фазовых ограничений, $0 \in \operatorname{int}\Phi(k)$, $k \in [0, N]$ та $f_k(0) = 0$, $k \in [0, N-1]$.

Определение. Нулевое решение системы (1) называется $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$-устойчивым (или, более полно, внутренне $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$-практически устойчивым), если $x(k, x_0) \in \Phi(k)$ для всех $x_0 \in G_0$, $k \in [0, N]$.

Максимальное по включению множество всех начальных условий, для которых выполняется определение, обозначим G_* [1,2]. Будем считать дальше, что множества фазовых ограничений $\Phi(k)$, $k \in [0, N]$ являются компактами. Рассмотрим свойства множества G_*.

Теорема 1. G_* является компактом.

Теорема 2. Если $x_0 \in \partial G_*$, то существуют такое $\bar{k} \in [0, N]$, для которого $x(\bar{k}, x_0) \in \partial\Phi(\bar{k})$, при этом $x(k, x_0) \in \Phi(k)$, $k \in [0, N]$.

Теорема 3. Если отображение f_k является открытым, $k \in [0, N-1]$, выполняются включения $x(k, x_0) \in \Phi(k)$, $k \in [0, N]$ и существует такое $\bar{k} \in [0, N]$ для которого $x(\bar{k}, x_0) \in \partial\Phi(\bar{k})$, то $x_0 \in \partial G_*$.

Следствие. Из условия открытости отображения f_k, $k \in [0, N-1]$, точка $x_0 \in \operatorname{int} G_*$ тогда и только тогда, когда $x(k, x_0) \in \operatorname{int}\Phi(k)$, $k \in [0, N]$.

1. Башняков А.Н., Пичкур В.В., Хитько И.В. О максимальном множестве начальных условий в задачах практической устойчивости дискретной системы// Проблемы управления и информатики. – 2011. – №2. – С.5-11.
2. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.

Бицань Євген Миколайович, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.,
Інститут геофізики ім.С.І.Субботіна НАН України, Київ, Україна,
e-mail: byzan@ukr.net

ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У КВАЗІВ'ЯЗКИХ П'ЯТИЕЛЕМЕНТНИХ РЕОЛОГІЧНИХ ТІЛАХ

Бицань Є.М.

Коливальні процеси в фізичних середовищах є затухаючими внаслідок непружності останніх. Непружність враховується за допомогою різних математичних моделей, які включають в розрахункову модель поряд з пружними елементами в'язкі і пластичні [1]. В механіці найчастіше використовують реологічні тіла (РТ), які складаються з двох, трьох, або чотирьох елементів.

У повідомленні розглядатимуться п'ятиелементні РТ, які складаються з двох пружних і трьох в'язких, які будемо називати квазів'язкими (КВРТ).

РР (реологічне рівняння) довільного п'ятиелементного КВРТ записується в узагальненому вигляді (в стандартній формі) таким чином:

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = \eta_N\left(\dot{\varepsilon} + b_1\ddot{\varepsilon} + b_2\dddot{\varepsilon}\right). \tag{1}$$

де коефіцієнти a_i і b_i – додатні константи, що виражаються через механічні параметри РТ; σ – напруження, ε – деформація; η_N – в'язкий релаксуючий модуль; крапкою позначено диференціювання за часом.

Рівняння руху в переміщеннях динамічної задачі теорії пружності для п'ятиелементного КВРТ запишеться таким чином:

$$\dot{u} + a_1\ddot{u} + a_2\dddot{u} = \eta_N\left(u'' + b_1\dot{u}'' + b_2\ddot{u}''\right)/\rho, \tag{2}$$

де ρ – питома щільність.

Частковий розв'язок рівняння (2) беремо у вигляді

$$u = u_o e^{i(kx-\omega t)}, \tag{3}$$

де u_o - стала інтегрування; ω - кругова частота; $i = \sqrt{-1}$; $k = \frac{\omega}{c} + i\alpha$ - хвильове число, c – фазова швидкість, α – коефіцієнт затухання плоскої подовжньої сейсмічної хвилі, що біжить.

Підставляємо u в формі (3) в рівняння руху в переміщеннях (2), і одержимо такий вираз для хвильового числа k:

$$k_N^2 = \frac{\omega\rho}{\eta_N}\frac{-1 + a_2\omega^2 - i\omega a_1}{\omega b_1 + i\left(1 - b_2\omega^2\right)} = \frac{\omega^2}{c_{0N}^2}, \tag{4}$$

де $c_{0H}^2 = E_0^H \ /\rho$, $E_0^H = \hat{E}^H(1 - i\beta)$ – комплексний, а $\hat{E}^H$ – динамічний модуль, β - фазова характеристика комплексного модуля, яка для геологічних середовищ набагато менша за одиницю. Її називають внутрішнім тертям, або кутом втрат.

Далі проаналізуємо процес повзучості. Під дією постійного напруження $\sigma = \sigma_0 = const$ деформація ε буде визначатися за допомогою такого співвідношення:

$$\varepsilon = \frac{\nu_1^2\left(\ddot{\varepsilon}_0\nu_2 - \hat{\dot{\varepsilon}}_0 + \dot{\varepsilon}_0\right)}{\nu_2 - \nu_1}\left(1 + e^{-t/\nu_1}\right) - \frac{\nu_2^2\left(\ddot{\varepsilon}_0\nu_1 - \hat{\dot{\varepsilon}}_0 + \dot{\varepsilon}_0\right)}{\nu_2 - \nu_1}\left(1 + e^{-t/\nu_2}\right) + \hat{\dot{\varepsilon}}_0 t,$$

де $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}(0), \ddot{\varepsilon}_0 = \ddot{\varepsilon}(0), \hat{\dot{\varepsilon}} = \sigma_0/\eta$, а часи релаксації деформації при постійному навантаженні ν_i визначаються за допомогою характеристичного рівняння: $\nu^2 - b_1\nu + b_2 = 0$, де b_i - коефіцієнти РР (2).

1. Зинер К.М. Упругость и неупругость металлов. – Москва: ИЛ, 1954. – 396 с.

Богородовская Л.В. *Одесский Национальный университет имени И.И. Мечникова,*
65026 г.Одесса, ул. Дворянская 2, ИМЕМ, e-mail: *mila_luda@bk.ru*

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Богородовская Л.В.

Рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y), (1)$$

где $\alpha_i \in \{-1,1\}$ $(i=\overline{1,m})$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(i=\overline{1,m})$ "--- непрерывные функции, $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ $(i=\overline{1,m})$ "--- непрерывные и правильно меняющиеся при $y \to Y_0$ функции порядков λ_i $(i=\overline{1,m})$, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} - односторонняя окрестность Y_0. По поводу определения правильно меняющихся функций см. [1].

Решение y уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0)$ -- решением, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$ и удовлетворяет условиям $y(t)\in\Delta_{Y_0}$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0$.

Для каждого $k \in \{1,\ldots,m\}$ введем вспомогательные функции, полагая

$$\Phi_k(y) = \int_{B_k}^{y} ds\varphi_k(s), \quad I_k(t) = \int_{A_k}^{t} p_k(t)d\tau,$$

где $B_k = \begin{cases} b, & \text{если } \int_b^{Y_0} ds\varphi_k(s) = \pm\infty, \\ Y_0, & \text{если } \left|\int_b^{Y_0} ds\varphi_k(s)\right| < \infty \end{cases}$ $(b\in\Delta_{Y_0})$, $\qquad A_k = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^{\omega} p_k(t)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^{\omega} p_k(t)d\tau < \infty. \end{cases}$

Теорема. *Пусть* $k\in\{1,\ldots,m\}$ *и* $\lambda_k \neq 1$. *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (1) $P_\omega(Y_0)$*-решений, для которых*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_k(t)\varphi_k(y(t))} = 0 \qquad \text{при} \quad i\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{k\},$$

необходимо и достаточно, чтобы интегралы $\int\limits_b^{Y_0}\frac{dy}{\varphi_k(y)}$, $\int\limits_a^{\omega} p_k(t)dt$ сходились, или расходились одновременно, и соблюдались следующие условия

$$\mu\alpha_k(1-\lambda_k)I_k(t) > 0 \quad \text{при} \quad t\in]a,\omega[$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\left(\Phi_k^{-1}\left(\alpha_k(1-\lambda_k)I_k(t)\right)\right)}{p_k(t)\varphi_k\left(\Phi_k^{-1}\left(\alpha_k(1-\lambda_k)I_k(t)\right)\right)} = 0 \text{ при } i\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{k\},$$

где Φ_k^{-1} - функция, обратная для Φ_k. Более того, для каждого такого решения имеет место асимптотическое представление

$$\frac{y(t)}{\varphi_k(y(t))} = \alpha_k(1-\lambda_k)I_k(t)[1+o(1)] \quad t\uparrow\omega.$$

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. -- М.: Наука, 1985. -- 141с.

Буряк Дмитрий Владимирович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина,
e-mail: dvburyak2008@rambler.ru
Грабовская Рада Георгиевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова, Одесса, Украина;
Тингаев Александр Аркадиевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Одесский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли, Одесса, Украина,
e-mail: al_tingaev@ukr.net

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФУНКЦИЯМИ ЛЯПУНОВА И ИХ ПРОДОЛЖЕНИЕ НА МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНЫЙ ПРОМЕЖУТОК

Буряк Д.В., Грабовская Р.Г., Тингаев А.А.

Рассматривается система сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно производных, вида

$$\begin{cases} g(x)q(V)y_k' = f_k(x, y_1, ..., y_n, V), \\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{1}$$

где: а) $g(x) \in C(0; l-\delta]$, $g(x) > 0$ для всех $x \in (0; l-\delta], 0 < \delta \approx 0, \delta \in R$, l- расстояние (конечное или бесконечное) от точки $x = 0$ либо до ближайшего к ней нуля функции $g(x)$, либо до точки, в которой функция $g(x)$ не определена;

б) $q(V) \in C^1(R^+ \cup \{ 0 \})$, имеет конечное или счетное не пустое множество A нулей;

в) $f_k(x, y_1, ..., y_n, V) \in C^{0,1,...1,1}_{x,y_1,...,y_n,V}\left(\{ x \in (0, l-\delta] \} \times \{ y \in R^n \} \times \{ V \in R^+ \setminus A \} \right)$, $k = \overline{1,n}$.

Доказана теорема: пусть для системы (1) выполнены следующие условия:

– $V = V(y_1, ..., y_n)$ – функция Ляпунова такая, что $V \ge V_0 \ge 0$, $V_0 = const$;

– $q(V) > 0$, $g(+0) = 0$;

– на $(0; l-\delta]$ существует функция $\varphi(x)$ такая, что $\varphi'(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ и $\varphi(+0) = 0$;

– $f_k(x, y_1, ..., y_n, V(y_1, ..., y_n)) \in C^{0,1,...1,1}_{x,y_1,...,y_n,V}\left(\{ x \in (0, l-\delta] \} \times \{ y \in R^n \} \times \{ V \in R^+ \setminus A \} \right)$, $k = \overline{1,n}$;

– $\displaystyle \lim_{c_j^{\pm} \to a_j \pm 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k} f_k(x, y_1, ..., y_n, V)}{c_j^{\pm} q(V)} = 0$ равномерно относительно x и y.

Тогда, в каждой области $G(x, a_j, c_j^{\pm}, \lambda) = \left\{ 0 < x \le l-\delta;\ c_j^{\pm}(1-\lambda\varphi(x)) < V < c_j^{\pm}(1+\lambda\varphi(x)) \right\}$, система (1) имеет n-параметрическое семейство решений $\{y_k = z_k(x)\}_{k=1}^{n}$, продолжаемых на промежуток $(0; l-\delta]$ и удовлетворяющих на нем оценкам:

$$c_j^{\pm}(1-\lambda\varphi(x)) < V(z_1(x), ..., z_2(x)) < c_j^{\pm}(1+\lambda\varphi(x)).$$

Значения параметров $c_j^{\pm} \in R$ выбираются близкими к $a_j \in A$, $j = 1,2,...$, причем $c_j^{+} > a_j \ge 0$ и $0 \le c_j^{-} < a_j$. При доказательстве теоремы используется качественный метод кривых и поверхностей без контакта. Характерно, что существование решений системы исследуется не вблизи изолированной особой точки, а вблизи особой поверхности на промежутке наперед заданной длины.

Бутенина Наталия Николаевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: n.n.butenina@mail.ru

К ПРОБЛЕМЕ КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бутенина Н.Н.

Рассматривается неавтономная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_0(x,y) + f(t)P_1(x,y) = P(x,y,t) \\ \dot{y} &= Q_0(x,y) + f(t)Q_1(x,y) = Q(x,y,t) \end{aligned}, \tag{1}$$

где $P_i(x,y), Q_i(x,y) \in C^1; f(t)$ - кусочно-непрерывная функция переменной $t, m \le f(t) \le n$.

Система (1) является конкретным представителем управляемой динамической системы, которая объединяет в одно семейство все системы (1) с различными кусочно-непрерывными функциями $f(t)$, значения которых принадлежат отрезку $[m,n]$.

Для управляемой динамической системы разработана теория, позволяющая строить области управляемости в заданную точку, области достижимости из заданной точки, исследовать перестройки указанных областей при изменении ограничений на управление [1,2].

Фазовый портрет управляемой динамической системы дает определенную информацию о неавтономной системе (1). Например, такую: 1) область управляемости $U(\Omega_0)$ в точку Ω_0 ограничена кривой, которая всеми допустимыми траекториями УДС может пересекаться только «на выход», т.е. точка Ω_0 не достижима из точек не принадлежащих $U(\Omega_0)$;
2) область достижимости из точки Ω_0 - непокидаемая область для траекторий с начальными условиями в этой области.

Тот же метод позволяет исследовать особые точки системы (1), т.е. такие точки (x_0, y_0, t_0), в которых $P(x_0, y_0, t_0) = Q(x_0, y_0, t_0) = 0$. В этих точках векторное поле не определено и, следовательно, решение уравнения (1) в этой точке также не определено. Особые точки обнаружены в математической модели укладки глубоководного трубопровода [3], в виброударных системах и в простейших линейных неавтономных системах [4].

В настоящей работе приводятся численно-качественные результаты исследования указанных выше математических моделей в окрестности особых точек.

1. Байтман М.М. Об областях управляемости на плоскости// Дифференциальные уравнения. 1978.Т.14.№4.С. 579-593.
2. Бутенина Н.Н., Сизова Н.А. Особые интервалы управляемой динамической системы второго порядка/Н.Н. Бутенина, Н.А. Сизова //Вестник ННГУ Математическое моделирование и оптимальное управление. Н.Новгород. 1997. С. 108-115.
3. БутенинаН.Н., Метрикин А.В. Об особенностях поведения фазовых траекторий в математической модели прокладки глубоководного трубопровода J-методом/ Н.Н. Бутенина, А.В. Метрикин //Сб. научн. трудов. Нижегородский филиал ИМАШ РАН. Н. Новгород. 2005.С.9-19.
4. Бутенина Н.Н., Метрикин В.С., Альтшулер А.И. Управляемые динамические системы с разрывными нелинейностями/ Н.Н Бутенина., В.С. Метрикин., А.И. Альтшулер //Труды v111 Всероссийской научн. конф. «Нелинейные колебания механических систем». Н.Новгород, 2008. С.105-109.

Валишин Наиль Талгатович, кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры спец.математики
Казанского государственного технического университета им.А.Н.Туполева, Казань, Россия.
e-mail: vnailt@yandex.ru
Валишин Фан Талгатович, директор *ФМЦ-Динамизм АН РТ, Казань, Россия*

ПРИРОДА ПЕРЕХОДА: К ПРОБЛЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Валишин Н.Т., Валишин Ф.Т.

В стратегии устойчивого развития, в частности в ньютоновской физике природа перехода сводится к природе траектории как геометрическое место точек различных состояний. При таком понимании перехода в качестве главной проблемы выступает проблема устойчивости.

Исследование проблемы устойчивости сделали достоянием науки прежде всего такие ученые как А.М.Ляпунов и Н.Г.Четаев. При этом в качестве узловых математических моментов в постановке и решении проблемы устойчивости выступают во-первых, рассмотрение локальной устойчивости; во-вторых, существование функции Ляпунова.

Локальная устойчивость есть не что иное, как устойчивость-состояние или, что тоже самое, динамическая устойчивость, в рамках которой укладываются траектории, получаемые из принципа Гамильтона – здесь оптико-механическая аналогия работает только для геометрической оптики и переход осуществляется по лучу. Что же касается природы функции Ляпунова то она оставалась загадочной и неслучайно Н.Г.Четаев до конца своей жизни продолжал свои методологические исследования.

Но квантовая физика обнаружила то обстоятельство, что природа перехода не укладывается только в траекторные измерения. К этому же выводу вели и исследования Четаева [1].

При дальнейшей эволюции квантовой физики при всех ее успехах так и не была поставлена и решена главная проблема, схватывающая природу самого перехода, но было ясно, что она не сводится уже к проблеме устойчивости.

В стратегии динамизма [2] в качестве главной проблемы выдвигается фиксация перехода как процесса-состояния. В качестве узловых математических моментов в постановке и решении этой проблемы выступают локальный вариационный принцип (ЛВП) и существование V-функции (волновой функции).

Локальный вариационный принцип – это новое формообразование вариационного принципа [3]:

Из всех возможных переходов в новое состояние осуществляется тот, при котором в каждый момент времени быстрота изменения волновой функции *V(x,t)* принимает стационарное значение

$$\delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = 0 \tag{1}$$

Проблема существования V-функции разрешается теоремой о необходимом и достаточном, где само достаточное-необходимое имеет смысл процесса-состояния:

<u>Теорема I.</u> **Для перехода в новое состояние необходимо и достаточно существование *V*-функции, удовлетворяющей условию:**

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = 0. \tag{2}$$

где $\Delta(.) = \delta(.) + \frac{d}{dt}(.)\Delta t,$ - операция полной вариации.

Віра Марина Борисівна, асистент кафедри вищої математики,
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, м. Ніжин, Україна,
e-mail: VyraMaryna@mail.ru

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ

Віра М.Б.

Доповідь присвячена побудові асимптотичних розв'язків крайової задачі для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь виду

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon),$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(T,\varepsilon) = d(\varepsilon),$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ - шуканий n-вимірний вектор, $t \in [0;T]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ - малий параметр, h - натуральне число; $A(t,\varepsilon), B(t,\varepsilon)$ - $(n \times n)$-матриці, d - l-вимірний вектор-стовпець, $f(t,\varepsilon)$ - n-вимірний вектор-стовпець; M, N - матриці зі сталими елементами розмірністю $l \times n$.

Окремо розглядаються випадки неповного виродження матриці при похідних (матриця $B(t,0)$ є виродженою, але $B(t,\varepsilon)$ залишається невиродженою при досить малих $\varepsilon > 0$) і повного ($B(t,\varepsilon) = B(t)$ і $\det B(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0;T]$) виродження матриці при похідних. Виходячи з методів асимптотичного аналізу сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями, розроблених у працях А. М. Самойленка, М. І. Шкіля, В. П. Яковця [1], а також методів аналізу нетерових крайових задач О. А. Бойчука [2], запропоновано метод побудови асимптотичних розв'язків даної крайової задачі, який грунтується на ідеї її зведення до фредгольмової або нетерової завдяки нехтуванню експоненціально малими доданками в крайових умовах. Побудовано формальні розв'язки даної крайової задачі і знайдено умови, за яких вони мають асимптотичний характер; виведено асимптотичні оцінки для побудованих розв'язків; розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів відповідних асимптотичних розвинень у явному вигляді. Детально вивчено різні випадки, пов'язані з поведінкою спектра граничної в'язки матриць. Досліджено особливості побудови розв'язків у стійкому та напівстійкому випадках.

1. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. Київ: Вища шк., 2000. - 294 с.

2. *Бойчук А.А., Журавлёв В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщённо-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. Труди Інституту математики НАНУ, том 13. - Київ: Інститут математики НАН України, 1995. - 318 с.

Вірченко Ніна Опанасівна, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри МА та ТЙ
Національного технічного університету України "КПІ".
Адреса для листування – 04201, м. Київ, вул. Полярна, 11, кв. 18,
тел. (044) 464-31-12, E-mail: nvirchenko@hothmail.com

ДО ТЕОРІЇ *r* - УЗАГАЛЬНЕНОЇ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Вірченко Н.О.

Гіпергеометричні функції відіграють особливо важливу роль і в теорії спеціальних функцій, і при розв'язанні широкого класу задач різних галузей прикладної математики, фізики, тощо. В останні десятиріччя посилився інтерес до узагальнення гіпергеометричних функцій за Райтом [1], [2]. Розглянемо узагальнення гіпергеометричної функції Гауса іншого типу.

Вивчаємо функцію вигляду

$$ {}_rF(a,b;c;z) = {}_rF(z) \equiv \frac{1}{\mathrm{B}(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} \; {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \quad (1)$$

де $\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,b > 0; r > 0; |z| < 1; \mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha > 0; \{\tau,\beta\} \subset R; \tau > 0, \tau-\beta < 1;$ B (...) – бета функція, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\alpha;c;z)$ - (τ,β) - узагальнена вироджена (конфлюентна) гіпергеометрична функція [3].

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\alpha;c;z) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \, {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c;\tau)\\(c;\beta)\end{matrix}\middle| zt^{\tau}\right]dt, \quad (2)$$

де ${}_1\Psi_1(z)$ - частинний випадок узагальненої функції Фокса-Райта [4].

Справедливі леми.

Лема 1. При умовах існування функції (1) справедлива формула про зображення функції ${}_rF(z)$ рядом:

$$ {}_rF(a,b;c;z) = \frac{1}{\mathrm{B}(b,c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \; {}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}^{\gamma}(b+n,c-b,-r)\frac{z^n}{n!}, \quad (3)$$

де ${}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}^{\gamma}$ - (τ,β) - узагальнена функція [2].

Лема 2. При умовах існування функції ${}_rF(z)$ справедливі такі функціональні співвідношення;

$$ {}_rF(a+1-c,b+1-c;2-c;z) = (1-z)^{c-a-1} \; {}_rF\left(a+1-c,1-b;2-c;\frac{z}{z-1}\right), \quad (4)$$

$$ {}_rF(c-a,c-b;c+1-a-b;1-z) = z^{a-c} \; {}_rF\left(c-a,1-a;c+1-a-b;1-z^{-1}\right), \quad (5)$$

$$ {}_rF(a+1,b;c;z) - {}_rF(a,b;c;z) = \frac{b}{c} z \; {}_rF(a+1,b+1;c+1;z), \quad (6)$$

$$ c \, {}_rF(a,b;c;z) - (c-b)\, {}_rF(a,b;c+1;z) = b \; {}_rF(a,b+1;c+1;z). \quad (7)$$

1. *Wright E. M.* On the coefficient of power series having exponential singulaties // J. London MS. – 1933. - № 8. – P. 71 – 79.
2. *Вірченко Н. О.* Узагальнені спеціальні функції та їх застосування // Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2006. - № 4. – с. 42 – 49.
3. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. "Fractional Calculus and Appl. Anal". – 2006. – **9**, № 2. – P. 101 – 108.
4. *Kilbas A. A., Saigo M.* H – Transforms. – Chapman and Hall / CRC, 2004. – 390 p.

Гаврош Елена Сергеевна, аспирантка факультета прикладной математики и информатики,
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
преподаватель кафедры логистики, *Международный институт торговых и социальных отношений,*
e-mail: esgavrosh@yandex.ru

ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Гаврош Е.С.

Пусть $\boldsymbol{N}^* = \{0,1,2,...\}$, $\Re^n$ – n-мерное евклидово пространство, $0 \in D \subset \Re^n$ – окрестность начала координат, $\Im = \Im(D \times \boldsymbol{N}^*, \Re^n)$ – класс функций $f : D \times \boldsymbol{N}^* \to \Re^n$, ограниченных на каждом множестве $K \times \boldsymbol{N}^*$, где K – компактное подмножество D и равномерно непрерывных по $x\in K$ на $K \times \boldsymbol{N}^*$.

$$x(t+1) = f(x(t),t), \quad f(0,t) = 0 \quad t \in \boldsymbol{N}^*. \tag{1}$$

Пусть $F=\{f_\tau: \ \tau\in \boldsymbol{N}^*\}$ – пространство сдвигов функции f, где $f_\tau(y, t) = f(y, t+\tau)$. Обозначим через $\overline{F}$ замыкание F в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах. Для каждого элемента $g \in \overline{F}$ уравнение

$$y(t+1) = g(y(t),t), \quad t \in \boldsymbol{N}^*, \tag{2}$$

называется предельным уравнением для (1).

Пусть U – произвольное множество в D, $\Im_U$ – класс функций V: $U\times \boldsymbol{N}^* \to\Re$, ограниченных на каждом множестве $K\times \boldsymbol{N}^*$, где K – компактное подмножество U и равномерно непрерывных по $x\in K$ на $K \times \boldsymbol{N}^*$. Для любой функции $V\in\Im_U$ и всякой последовательности чисел (t_n), $t_n\to+\infty$, можно выделить подпоследовательность $(t_{n(k)})_{k\geq 1}$, для которой $(V(x,t+t_{n(k)}))$ сходится к функции $v(x,t)$ равномерно на каждом компакте из $U\times \boldsymbol{N}^*$. Функцию $v(x,t)$ будем называть предельной для $V(x,t)$. Класс таких функций обозначим $\Phi[V]$.

Пара функций (g,v) называется предельной парой для $(f, V) \in \overline{F} \times \Im_U$, соответствующей последовательности моментов времени (t_k), $t_k\to+\infty$, если $f(x,t+t_k) \to g$ и $V(x,t+t_k) \to v$ при $k \to +\infty$.

Теорема 1. *Пусть существуют окрестность U начала координат, функции $V \in \Im_U$ и функция Хана $a \in \mathbf{K}$ такие, что выполняются следующие условия*:

1) $|V(x,t)| \leq a(\|x\|) \quad \forall (x,t) \in U \times \boldsymbol{N}^*$;

2) $\forall \alpha > 0 \ \ \exists\, p \in B(0, \alpha)$, $p \neq 0$, *такое, что* $V(p,t_0) > 0 \ \ \forall t_0 \in \boldsymbol{N}^*$;

3) $V(x(t+1),t+1) - V(x(t),t) \geq 0 \ \ \forall (x,t) \in U \times \boldsymbol{N}^*$;

4) *если для некоторой предельной пары* $(g,v) \in \overline{F} \times \Phi[V]$ *существует решение* $y(p,\tau, t)$, $p \neq 0$, *системы* (2) *такое, что* $v(y(p, \tau, t), t) = v(p, \tau)$ $\forall\ t \geq \tau$, *то* $\| y(p,\tau,t) \| \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

5) *если существует предельная пара* $(g,v) \in \overline{F} \times \Phi[V]$, *для которой решение* $y(p,\tau, t)$, $p \neq 0$, *системы* (2) *удовлетворяет условию* $v(y(x^*,t_0,t),t) = v(x^*,t_0)$ $\forall\ t \geq t_0$. *то* $\| y(p,\tau,t) \| \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Тогда точка покоя $x = 0$ *системы* (1) *неустойчива*.

Исследование устойчивости дискретных систем проводилось в работах [1], [2].

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: «Мир», 1971.
2. Булгаков Н.Г., Калитин Б.С., Покатаев А.В. К устойчивости дискретных автономных систем. Белорусский ун-т. Минск, 1979. Деп. в ВИНИТИ 26.04.79. № 1543−79.

Гладилина Раиса Ивановна, к.ф.м.н.
Донецкий национальный технический университет , Донецк, Україна,
email: rgladilina@yandex.ru ;

О ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЗМУЩЕННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Гладилина Р. И.

В прикладных задачах весьма актуальным является установление факта асимптотической устойчивости движения изучаемой системы, а также доказательство сохранения этого свойства при возмущениях правых частей уравнений. Постановка такой задачи вызвана тем, что реальная система всегда находится под воздействием малых возмущающих сил, которые невозможно учесть при ее математическом моделировании. Если для упрощенной системы удается построить функцию Ляпунова с соответствующими свойствами (или хотя бы доказать ее существование), то она сохраняет свои свойства и при некоторых, в определенном смысле, малых возмущениях системы. Данная работа посвящена исследованию частичной устойчивости импульсных систем при наличии исчезающих и интегрально малых возмущений.

Рассмотрим "возмущенную" систему
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x)+R(t,x), \qquad t\neq\tau_i(x), \\ \Delta x &= I_i(x)+R_i(x), \quad t=\tau_i(x), \ i\in N, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t\in R_+$, $x\in\Omega\subset R^n$, $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_i\to\infty$ при $i\to\infty$; $\tau_{i+1}-\tau_i\geq\theta>0\ (i\in N)$; $f:R_+\times\Omega\to R^n$, $I_i:\Omega\to R^n$. Функции $f(t,x)$, $I_i(x)$, $R(t,x)$, $R_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица по x и $f(t,0)\equiv 0$, $I_i(0)\equiv 0$, $R(t,0)=0$, $R_i(0)=0\ (i\in N)$, т.е. система (1) допускает нулевое решение. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) существует знакоположительная функция $V=V(t,x)$, удовлетворяющая условиям:*
$$a(\|y\|)\leq V(t,x)\leq b(\|y\|),\ (t,x)\in R_+\times\Omega,\ a,b\in\mathcal{K}, \tag{2}$$
$$\dot V_{(1)}(t,x)\leq -c(\|y\|)\ \ t\neq\tau_i(x),\ c\in\mathcal{K}, \tag{3}$$
$$V(\tau_i+0,x+I_i(x))-V(\tau_i,x)\leq 0\ \ (i\in N), \tag{4}$$
имеющая ограниченные частные производные
$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right\|\leq P,\ t\neq\tau_i(x). \tag{5}$$
Если при этом равномерно по $x\in\Omega$ выполняются предельные соотношения:
$$\lim_{t\to\infty}R(t,x)=0,\ \lim_{i\to\infty}R_i(x)=0, \qquad (6)\ (7)$$
и существуют такие $a_i\geq 0$, что $\|R_i(x)\|\leq a_i, x\in\Omega\ (i\in N)$, и ряд инвари $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ *сходится, то решение системы* (1) *является равномерно асимптотически устойчивым по части переменных*.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *существует знакоположительная функция $V=V(t,x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, имеющая ограниченные частные производные по t. Если при этом имеют место следующие условия: 1) функция $f(t,x)$ ограничена в области $R_+\times\Omega$; 2) $\tau_i(x)-\tau_{i-1}(x)\geq\theta>0\ (i\in N)$; 3) вместо условия (6) равномерно по $x\in\Omega$ выполняется предельное соотношение: $\lim_{t\to\infty}\int_t^{t+T}R(s,x)ds=0$, то решение системы* (1) *является равномерно асимптотически устойчивым по части переменных.*

Глазков Д.В. *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,*
150000, г. Ярославль, ул. Советская 14, e-mail: glazkov_d@mail.ru

ДИНАМИКА ЗАДАЧИ С АСИМПТОТИЧЕСКИ БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Глазков Д.В.

Рассматривается модельная задача управления поведением некоторой динамической системы в окрестности ее нулевого решения с помощью запаздывающей обратной связи. Объектом изучения является комплексное уравнение [1-3]

$$\frac{dz}{ds} = (\nu + i\omega)z - Ke^{-i\varphi}[z - z(s-h)] + F(z), \tag{1}$$

где нелинейность $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = F_2(z) + F_3(z) + \ldots = c_{20}z^2 + c_{11}|z|^2 + c_{02}\bar{z}^2 + c_{30}z^3 + c_{21}|z|^2 z + c_{12}|z|^2 \bar{z} + c_{03}\bar{z}^3 + \ldots,$$

c_{kl} -- комплексные коэффициенты, величины K и φ трактуются как управляющие параметры. В отсутствие слагаемого с запаздыванием при $K = 0$ нулевое решение задачи (1) является фокусом, устойчивость которого определяется знаком величины ν.

Теорема 1. Пусть $\nu > 0$, $\varphi \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда при $0 \le K < \nu/(1+\cos\varphi)$ нулевое решение задачи (1) неустойчиво. Пусть $\nu < 0$, $\varphi \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда при $0 \le K < K_0 = -\nu/(1-\cos\varphi)$ нулевое решение задачи (1) устойчиво.

Ставится задача исследования локальной динамики системы (1) в окрестности нулевого решения методом нормальных форм [4]. Рассматривается случай асимптотически большого запаздывания $h = 1/\varepsilon$.

В результате получаем [5] параболическое уравнение типа Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_1 \frac{\partial u}{\partial r} + d_0 u + d|u|^2 u, \tag{2}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r+1) = u(\tau, r), \tag{3}$$

где $d_2 = \dfrac{1}{2K_0^2}$, $d_1 = \dfrac{1 + i\Omega_1}{K_0^2}$, $d_0 = \dfrac{K_0 K_1 (1 - e^{-i\varphi}) + i\Omega_1 - \Omega_1^2/2}{K_0^2}$, $d = \dfrac{1}{K_0}\left[c_{21} - \dfrac{2i}{\Omega_0}(|c_{11}|^2 + \dfrac{1}{3}|c_{02}|^2)\right]$

Здесь K_0 определено в теореме 1, а величины Ω_0 и $0 \le \Omega_1 < 2\pi$ определяются из соотношений $\Omega_0 = \omega + K_0 \sin\varphi$, $\quad \Omega_0 \varepsilon^{-1} + \varphi + \Omega_1 = 0 \bmod 2\pi$.

Полученное нормализованное уравнение связано с исходной задачей следующим образом.

Теорема 2. Пусть краевая задача (2)--(3) имеет решение $u = u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (1) имеет быстро осциллирующее асимптотическое по невязке решение

$$z_*(s) = \varepsilon e^{i[\Omega_0 + \Omega_1 \varepsilon + o(\varepsilon)]s} u_*(\varepsilon s, (\varepsilon + o(\varepsilon))s) + o(\varepsilon). \tag{4}$$

1. *Schikora S.* All-Optical Noninvasive Control of Unstable Steady States in a Semiconductor Laser / S. Schikora [et al.] // Phys. Rev. Lett. --- 2006. --- Vol. 97, 213902: P. 1--4.
2. *Глазков Д.В.* Особенности динамики модели Ланга-Кобаяши в одном критическом случае / Д.В. Глазков // Моделирование и анализ информационных систем. --- 2008. --- Т. 15, 2. --- С. 36--45.
3. *Yanchuk S.* Control of unstable steady states by long delay feedback / S. Yanchuk [et al.] // Phys. Rev. E. --- 2006. --- Vol. 74, 026201: P. 1--7.
4. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / С.А. Кащенко // Дифференциальные уравнения. --- 1989. --- Т. 25, 2. --- С. 262--270.
5. *Глазков Д.В.* Локальная динамика уравнения с сильно запаздывающей обратной связью / Д.В. Глазков // Моделирование и анализ информационных систем. --- 2011. --- Т. 18, 1. --- С. 71--81.

Глызин Сергей Дмитриевич Д.ф.м.н.
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия,
e-mail: glyzin.s@gmail.com;

DYNAMIC OF COUPLED RELAXATION OSCILLATORS WITH DELAY

Глызин С.Д.

The following delay differential equation is proposed to describe the electrical activity of neural cells:

$$u' = \lambda[-1 + f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) - f_{\mathrm{N}a}(u)]u, \tag{1}$$

where $u(t)$ is a membrane potential of a neuron and functions $f_{\mathrm{N}a}(u) = \beta f_2(u)$, $f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) = \alpha f_1(u(t-1))$ define potassium and sodium currents, respectively. Let $f_j(0) = 1$ and $f_j(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{u^k}$ as $u \to +\infty$ $(j = 1,2)$. The factor $\lambda gt;0$ is defined by the speed of electrical processes in the system and is considered large.

We note that the potassium current depends on delayed membrane potential, and that the delay is normalized to one for the purpose of convenience. Given $\alpha - \beta - 1gt;1$ and λ large enough, the equation (1) possesses orbitally asymptotically stable cycle $u = u_*(t,\lambda)$ (see [1]). We consider the problem of weak electric interaction in a chain of N identical oscillators of the form (1). In the system

$$u_j' = \lambda[-1 - f_{\mathrm{N}a}(u_j) + f_{\mathrm{K}}(u_j(t-1))]u_j + D(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad j = 1,\dots,N \tag{2}$$

we put $u_0 = u_1$, $u_N = u_{N+1}$, factor $Dgt;0$ of order one defines the coupling of neurons, and $\lambda gt;gt;1$. Obviously, the system (2) possesses the synchronous cycle $u_1 \equiv \ldots \equiv u_N = u_*(t,\lambda)$.

Our ***main result*** *states that for a suitable choice of parameters* α, β *and* D *and for arbitrary* $\lambda gt;gt;1$ *this system (along with the stable synchronous cycle) possesses as well at least* $N-1$ *orbitally asymptotically stable nonuniform cycles.*

Asymptotical analysis of the system (2) shows that behavior of coordinates $y_j = \ln(u_{j+1}) - \ln(u_j)$, $j = 1,\dots,N-1$ can be defined by coarse solutions of the system with an impulse action

$$\begin{aligned} &y_{j'} = D(\exp(y_{j+1}) + \exp(-y_j) - \exp(y_j) - \exp(y_{j-1})), \, j = 1,\dots,N-1 \\ &y_j(1+0) = y_j(1-0) + \alpha y_j(0), \quad y_j(\alpha+0) = (1+\beta)y_j(\alpha-0), \\ &y_j(\alpha+1+0) = y_j(\alpha+1-0) + \alpha y_j(\alpha), \, y_j(T_0+0) = (1+\beta)y_j(T_0-0). \end{aligned} \tag{3}$$

where $y_0 = y_N = 0$, $T_0 = \alpha + 1 + (\beta+1)/(\alpha-\beta-1)$ is a first approximation of a period of a relaxation cycle $u_*(t,\lambda)$. Using the solution $y_*(t,z) = (y_1(t,z),\dots,y_{N-1}(t,z))$ of the problem (3) with initial value $y_j(0) = z_j$, $z = (z_1,\dots,z_{N-1})$ we can define the map

$$z \to \Psi(z) \equiv y_*(t,z)\,|_{t=T_0+0}, \tag{4}$$

which hyperbolic fixed points correspond to cycles of the problem (4).

Main result: We show that for a suitable choice of parameters α, β, D the map (4) possesses at least N stable fixed points.

1. *S. A. Kaschenko, V. V. Majorov // Mat. Model.* -- 1993. -- **V. 5**, В№ 12. -- P. 13--25.

Двирный А.И. Слынько В.И.
Академия пожарной безопасности им. Героев Чернобыля, г. Черкассы, Украина,
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, г. Киев, Украина

УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В ПСЕВДОЛИНЕЙНИЙ ФОРМЕ

Двирный А.И. Слынько В.И.

В рефлексивном банаховом пространстве с нормой $\|\cdot\|_X$ рассматривается дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t,x)x, \quad t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= B_k(x(t))x(t), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in X$, $t \in [a;+\infty)$, $a \in R$, $A \in C([a;+\infty) \times X; L(X,X))$, $L(X,X)$- линейное банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, $B \in Lip(X, L(X,X))$, $x(t+0)$- значение функции $x(t)$ справа, $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность моментов импульсного воздействия, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности и $\sup\limits_{k \in N}(\tau_{k+1} - \tau_k) < \infty$.

В работе получено достаточные условия глобальной устойчивости по Ляпунову и достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости по Ляпунову решения $x = 0$ системы (1).

Используя условия малого изменения операторных функций $A(t,x)$ и $B_k(x)$ [3] и методы теории операторов в полуупорядоченном банаховом пространстве, задача сведена к исследованию устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с импульсным воздействием, которая может быть исследована известными методами.

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием — К.: Вища школа. — 1987. — 288с.
2. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. — М.: Наука. — 1985. — 256 с.
3. Слюсарчук В.Ю. Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь. — Рівне: вид-во НУВГП, 2004. — 416 с.

Демиденко Геннадий Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
e-mail: demidenk@math.nsc.ru

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Демиденко Г.В.

В настоящее время имеется ряд способов аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), \qquad t > \tau, \tag{1}$$

с помощью решений специальных классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(t, x), \tag{2}$$

(см., например, [1-8]). В нашей работе предлагается еще один способ аппроксимации решений уравнений (1), основанный на технике вейвлет-анализа и свойствах решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений (2).

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (государственные контракты № 02.740.11.0429, № 16.740.11.0127), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (проект № 85, междисциплинарный проект № 107).

1. Репин Ю.М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами / Ю.М. Репин // Прикл. матем. мех. – 1965. Т. 29, вып. 2. – С. 226-235.

2. Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием / Р.Т. Янушевский. – М.: Наука, 1978.

3. Györi I. Two approximation techniques for functional-differential equations / I. Györi // Comput. Math. Appl. – 1988. V. 16, no. 3. – P. 195-214.

4. Ponosov A. The W-transform links delay and ordinary differential equations / A. Ponosov, A. Shindiapin, J.J. Miguel // Funct. Differ. Equ. – 2002. V. 9, no. 3-4. – P. 437-469.

5. Демиденко Г.В. О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом / Г.В. Демиденко, В.А. Лихошвай // Сиб. мат. журн. – 2005. Т. 46, № 3. – С. 538-552.

6. Демиденко Г.В. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом / Г.В. Демиденко, В.А. Лихошвай, Т.В. Котова, Ю.Е. Хропова // Сиб. мат. журн. – 2006. Т. 47, № 1. – С. 58-68.

7. Демиденко Г.В. Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / Г.В. Демиденко, И.А. Мельник // Сиб. мат. журн. – 2010. Т. 51, № 3. – С. 528-546.

8. Krasznai B. The modified chain method for a class of delay differential equations arising in neural networks / B. Krasznai, I. Györi, M. Pituk // Math. Comput. Modelling. – 2010. V. 51, no. 5-6. – P. 452-460.

Джураев Абубакир Мухтарович, доктор физ.-мат. наук, доцент,
КНУ имени Жусупа Баласагына, Бишкек, Кыргызстан,
e-mail: ajrv@mail.ru;
Туратов Самат Дуйшенбаевич,
ОшТУ имени М.Адышева, Ош, Кыргызстан,
e-mail: tturatova@mail.ru;

СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ В РАСШИРЕННОЙ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

Джураев А.М., Туратов С.Д.

Задачи прикладной математики, с которыми сталкиваются инженеры, физики и специалисты в области высоких технологий и теории гироскопов, содержат ряд существенных особенностей, которые не позволяют получать точные аналитические решения. Такими особенностями являются, например, нелинейности, изменяющиеся коэффициенты, границы сложной формы и граничные условия на неизвестных границах теории гироскопов. Мало того, если даже точное решение задачи явно найдено, оно может оказаться бесполезным для математической и физической интерпретаций или численных расчетов. Таким образом, для получения информации о решениях уравнений мы вынуждены прибегнуть к аппроксимациям, численным решениям или к сочетанию этих двух методов. Среди приближенных методов прежде всего следует выделить асимптотические методы, целью которого является изучение важных для математиков-прикладников аналитических методов – методов возмущения по малому параметру и практическое владение этими методами.

По теории сингулярных возмущений имеется большое количество работ, принадлежащие Тихонову А.Н., Васильевой А.Б., Бутузову В.Ф. и другим исследователям [1]-[5]. Изучая сингулярно-возмущенные начальные задачи Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. для собственных значений $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^{n}$ использовали условие $\forall t \in [0;T] \ \operatorname{Re}\lambda_i(x) < 0,\ i = \overline{1,n}$, которое названо условием устойчивости начальной задачи.

Нами изучена теория асимптотического интегрирования для линейных обыкновенных сингулярно – возмущенных дифференциальных уравнений в расширенной области устойчивости.

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. – 272с.
2. Dzhuraev A.M. A problem with a multiple pure imaginary spectrum // Ist Turkish world mathematics symposium, 29 June – 2 July, 1999, Elazig: Firat University. – 1999. – P. 124-127.
3. Dzhuraev A.M. Singular-perturbed boundary-value problems with a multiple pure imaginary spectrum // International conference on Spectral Theory and Global Analysis, August 14-18, 2006, Oldenburg: Carl von Ossietzky Universitat, Oldenburg, 2006. – P. 3-5.
4. Dzhuraev A.M. A problem with a multiple spectrum // International Congress of Mathematicians, August 19-27, 2006, Madrid, Spain: Daily News. – 2006. – P. 9.
5. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат.сб. – 1948. – Т.22 (64). – С. 193-204.

Дорошенко Ірина Вікторівна, кандидат физ.-мат. наук
ЧНУ імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: irchik7878@mail.ru

ДОСЛІДЖЕННЯ НА СТІЙКІСТЬ СТОХАСТИЧНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Дорошенко І.В.

Нехай на (Ω, F, P) стохастична динамічна система задана сукупністю ДФР

$$dx(t) = f(t, x_t, y_t)dt, \quad \forall\ t \ge 0\,, \tag{1}$$

за початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t,\omega), \ -h \le t \le 0. \tag{2}$$

Тут $x(t) \in R^n$, $x_t \equiv \{x(t+\theta), -h \le \theta \le 0\} \in D_n \equiv D_n([-h,0])$ - простору Скорохода [1] неперервних справа *n*-вимірних функцій $\varphi(t) \in R^n$, що мають лівосторонні границі, $y(t) \in R^m$ - розв'язок системи СДФР

$$dy(t) = a(t, y_t)dt + b(t, y_t)dw(t) + \int\limits_Z c(t, y_t, z)\tilde{\nu}(dz, dt) \quad , \ \forall t \ge 0, \tag{3}$$

за початковою умовою

$$y(t) = \psi(t,\omega) \ \forall\ t \in [-h, 0]. \tag{4}$$

Розглянемо лінійне рівняння як частинний випадок рівняння (1)

$$\frac{dx}{dt} = A(y(t))x_t\,, \tag{5}$$

Слабкий інфінітезимальний оператор (СІО) має вигляд ($v : D_n \times D_m \to R^1$)

$$\mathcal{L}_0 v(x,y) = (A(y)x, \nabla_x)v(x,y) + (L_y v)(x,y)\,, \tag{6}$$

де $\mathcal{L}_y = \dfrac{\partial v}{\partial t} + (\nabla_y v, a(t,y)) + \dfrac{1}{2} sp \nabla_y^2 v b^T(t,y) b(t,y) + \int\limits_Z [v(y + c(t,y,z)) - v + (\nabla_y v, c(t,y,z)))]\Pi(dz)$.

Теорема. Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі Коші (5), (2) експоненціально *p*-стійкий, тоді і тільки тоді, якщо існує функціонал Ляпунова-Красовського $v(x_t, y)$ такий, що задовольняє нерівність $\mathcal{L}_0 v(\varphi, y) \le c_3 \|\varphi\|_0^p$ для всіх $\varphi \in D^n$, $y(t) \in R^m$.

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения.- Киев:Наук. думка, 1968.- 354 с.
2. Свердан М., Царков Є., Ясинський В. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.- Снятин: Вид. Відділ “Над Прутом”, 1996.-448 с.

Елисеева Юлия Витальевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», Москва, Россия,
e-mail: elyseeva@mtu-net.ru;
Бондаренко Алексей Алексеевич, аспирант,
ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», Москва, Россия,
e-mail: boondarenko.aa@gmail.com

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФОКАЛЬНЫХ ТОЧЕК ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Елисеева Ю. В., Бондаренко А.А.

В работе предлагается алгоритм вычисления обратных фокальных точек $m^*(k,\lambda)$ главного решения симплектической системы (см. [1], [2]) соответствующей дискретной краевой задаче Штурма-Лиувилля 2n–ого порядка [3]:

$$\begin{gathered}\sum_{\mu=0}^{n}(-\Delta)^{\mu}\left\{r_k^{(\mu)}\Delta^{\mu}y_{k+1-\mu}\right\}=\lambda y_{k+1},\, r_k^{(n)}\neq 0,\\ y_{1-n}=\ldots=y_0=y_{N+2-n}=\ldots=y_{N+1}=0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\lambda\in\mathbb{R}$, $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$, $0\le k\le N-n,\ N,\ n\in\mathbb{N}$ и $1\le n\le N$.

Главным результатом работы является теорема о равенстве $m^*(k,\lambda)$ и числа отрицательных собственных значений дополнения Шура некоторой симметричной матрицы размера $(n+1)\times(n+1)$. При доказательстве данного результата используются аппарат сравнительного индекса для сопряженных базисов симплектических систем [2], свойства главного решения [3, 4] симплектической системы, соответствующей задаче (1).

В работе [5] доказана следующая осцилляционная теорема:

$$\#\{\lambda_i\in\sigma\,|\,\lambda_i<\lambda\}=\sum_{k=n}^{N}m^*(k,\lambda), \tag{4}$$

где $\#\{\lambda_i\in\sigma\,|\,\lambda_i<\lambda\}$- число собственных значений задачи (1), которые меньше λ, $\sum_{k=n}^{N}m^*(k,\lambda)$ - сумма обратных фокальных точек главного решения системы (2) для данного λ. Данная теорема является модификацией осцилляционной теоремы 2 приведенной в работе [1].

Используя предлагаемый алгоритм вычисления $m^*(k,\lambda)$, формулу (4) и метод бисекции проведены расчеты собственных значений тестовых задач (1).

1. O. Dosly, W. Kratz Oscillation theorems for symplectic difference systems. Journal of Difference Equations and Applications, - 2007, - №13, - P. 585–605.
2. Елисеева Ю.В. Сравнительный индекс для решений симплектических систем разностных уравнений, Дифференциальные уравнения, 2009, **45**, №3, 431-444
3. Kratz W. Banded matrices and difference equations. Linear Algebra Appl. 2001, **337**, P. 1-20.
4. M. Bohner, On disconjugacy for Sturm-Liouville difference equation, J. Difference Equ. Appl., 1996, **2**, - P. 227-237.
5. J. Elyseeva, A. Bondarenko The Schur complement in an algorithm for calculation of focal points of conjoined bases of symplectic difference systems, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2011, **67**, № 4, - P. 455-474.

В.Ф. Журавлев *Житомирский национальный агроэкологический университет,*
Украина, 10008, г. Житомир, бульвар Старый, 7, кафедра ВМ и ОТД, e-mail: vfz2008@ukr.net

СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Журавлев В.Ф.

Исследование разрешимости и построение решений слабонелинейных краевых задач представляет собой задачу, решение которой существенным образом зависит от возможности построения решений соответствующей линейной краевой задачи. Метод исследования слабонелинейных краевых задач с нетеровой линейной частью для обыкновенных дифференциальных уравнений был успешно применен для дифференциальных систем с импульсным воздействием, дифференциальных систем с запаздывающим аргументом [1].

В данной работе рассматриваются краевые задачи, у которых исходное линейное операторное уравнение является нетеровым, т.е. не всюду разрешимым.

Рассмотрена слабонелинейная краевая задача

$$(Lz(\cdot,\varepsilon))(t) = \varphi(t) + \varepsilon Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{7}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{8}$$

где

(a1) $L:\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2 -$ нетеров $(dimkerL = \mu < \infty, dimkerL^* = \nu < \infty), \mu \neq \nu$ оператор, действующий из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$;

(a2) $Z:\mathbf{B}_1 \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{B}_2 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} -$ нелинейный оператор, который в окрестности порождающего решения $\| z - z_0 \| \leq q$ имеет производную Фреше по z и непрерывный по ε, $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0} = [0,\varepsilon_0]$;

(a3) $Z(0,t,0) = 0, Z_z'(0,t,0) = 0;$

(a4) $\varphi(t) \in \mathbf{B}_2$;

(a5) $\ell = col(l_1,l_2,l_3,\ldots,l_m) -$ линейный ограниченный вектор-функционал, действующий из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в евклидово пространство R^m;

(a6) $J:\mathbf{B}_1 \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to R^m -$ нелинейный по z вектор-функционал, который в окрестности порождающего решения $\| z - z_0 \| \leq q$ имеет производную Фреше по z и непрерывный по ε;

(a7) $J(0,0) = 0, J_z'(0,0) = 0;$

(a8) $\alpha \in R^m$.

Применяя методы функционального анализа и теорию обобщенного обращения линейных ограниченных операторов в банаховых пространствах [1], получены критерии разрешимости и формулы для представления решения линейной краевой задачи для нетерового операторного уравнения, а также исследованы необходимые и достаточные условия разрешимости слабонелинейной краевой задачи (1), (2) (с нетеровым оператором в линейной части исходного операторного уравнения), построены сходящиеся итерационные алгоритмы для нахождения ее решений.

1. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. -- Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. -- 320 с.

Зінченко Артем Юрійович, аспірант,
Інститут прикладного системного аналізу НТУУ "КПІ", Київ, Україна,
e-mail: arrttem@yandex.ru

ЯКІСНІ ТА КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА РЕКОНСТРУКЦІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ОДНОВИМІРНИХ РЕАЛІЗАЦІЙ

Зінченко А.Ю.

Дана робота присвячена дослідженню регулярних та хаотичних режимів динамічних систем, а також реконструкції динамічних систем за одновимірними реалізаціями (скалярними часовими рядами) шляхом ідентифікації параметрів системи. Для цих цілей розроблено інформаційну технологію, яка реалізована на мові програмування Java і складається із програмної оболонки (реалізує MDI інтерфейс користувача та взаємодію програмних компонентів), шаблону системи (визначення параметрів доступних чисельних методів та одновимірних реалізацій), пакету чисельних методів та графічного інтерпретатора (візуалізація результатів дослідження). Детальніше архітектура інформаційної технології (UML-діаграми розроблені на Enterprise Architect 7.5) разом із методологією дослідження динамічних систем описані авторами в роботі [1].

Методологія дослідження нелінійних систем базується на кількісних і якісних характеристиках атракторів систем. А саме: на побудові розв'язків системи методом Рунге-Кутти восьмого порядку із застосуванням корегуючої процедури Дорманда-Принса зі змінним кроком чисельного інтегрування [2], моделюванні фазових портретів та дослідженні стійкості системи в залежності від біфуркаційних параметрів, побудові спектру ЛХП методом Бенеттіні [1,2], перерізу Пуанкаре методом Ено [1,2], обчисленні інваріантної міри та спектральної щільності (Фур'є спектрів) [2], знаходженні областей грубості системи [2] (структурної стійкості), знаходженні матриці (оператору) монодромії для дослідження стійкості періодичних розв'язків динамічної системи. Завершує дослідження побудова карт динамічних режимів та визначення сценаріїв переходу до хаосу (знаходження параметрів, при яких виникає біфуркація та перемежовування).

Методологія дослідженні одновимірних скалярних реалізацій базується на 14 різних сучасних методах, деякі з яких були модифіковані: вперше запропоновано оцінки довжини розбиття фазових траєкторій вихідного сигналу та мінімальної відстані між 2 точками на фазовій траєкторії атрактора (необхідна для визначення оптимальної довжини розбиття фазових траєкторій), що дозволило оптимізувати обчислення кореляційних інтегралів у методах кореляційної розмірності, розмірності вкладень, розмірності Колмогорова та тесту Брока, скоротивши при цьому трудомісткі обчислення. Реалізований авторами метод обчислення відповідного значення ε для одновимірної реалізації в тесті Гілмора виявився більш оптимальним, ніж відомий, для відображення і побудови графіку "тісного повернення" при занадто малій чи великій максимальній відстані між двома спостереженнями. Крім того, використаний для ідентифікації систем метод інваріантного погруження показав, що вплив стохастичного шуму в методі не впливає на хаотичність атракторів.

1. Данилов В.Я., Зінченко А.Ю. До реалізації інструментарію дослідження хаотичної та регулярної поведінки динамічних систем і реконструкції оператора еволюції динамічних систем // Наукові праці ЧДУ ім. Петра Могили. Серія: комп'ютерні технології. – 2010. – том. 130, вип. 143. – С.30 – 38.
2. Данилов В.Я., Зінченко А.Ю. Синергетичні методи аналізу: Методичні вказівки і завдання до виконання самостійних робіт. – К.: НТУУ "КПІ", "ІПСА". – 2011р. – 222с. [електронне видання, свідоцтво про надання грифу НМУ № Е 10/11 – 225 від 24.02.2011р.]

Зуб Станіслав Сергійович, к.т.н.
Інституту високих технологій (ІВТ) Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: stah@univ.kiev.ua;

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОРБИТ В СИСТЕМЕ ДВУХ МАГНИТНЫХ ТЕЛ

Зуб С.С.

Рассмотрена устойчивость орбитального движения двух длинных цилиндрических магнитов, которые взаимодействуют исключительно магнитными силами. Для аналитического исследования использована модель магнитного взаимодействия симметричных волчков [1], которая разработана ранее в рамках квазистационарного приближения для электромагнитного поля на основе общего выражения энергии взаимодействия магнитных тел [2].

Особую роль в вопросах устойчивости орбитальных движений играют так называемые относительные равновесия [3], т.е. такие траектории динамики системы, которые одновременно являются однопараметрическими подгруппами группы инвариантности системы. Их устойчивость, в современных работах, как правило, исследуется двумя близкими методами – Energy-Momentum method и Energy-Casimir method. Для рассматриваемой системы наиболее подходит критерий устойчивости, сформулированный в теореме работы [4], удачно обобщающий оба вышеупомянутых метода и охватывающий гамильтонов формализм на основе пуассоновых структур [1]. Из этой теоремы выводим необходимые и достаточные условия устойчивости круговой орбиты.

Найденные устойчивые орбиты исследуются численно методом Монте-Карло в системе MATLAB.

1. *Zub S.* Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies [Электронный ресурс] / S. Zub // PoS(ACAT08)116. – 2009.

2. *Zub S.S.* Contact-free Static Stable Equilibrium in the Ground and Space Systems [Электронный ресурс] / S. S. Zub // International scientific conference »Int. Conference on Magnetically Levitated Systems and Linear Drivers (MAGLEV’2002)», September 3–5 2002: proceedings / Lausanne, Switzerland. — 2002. — PP02105.

3. *Marsden J.E.* Lectures on Mechanics / Marsden Jerrold E. // – London : Cambridge University Press, 1992. – 254 p.

4. *Ortega J-P.* Non-linear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry / J-P. Ortega, T.S. Ratiu // J. Geom. Phys.. – 1999. – Vol. 32. – P. 160 – 188.

Иванов Игорь Львович, *аспирант*
Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
03057, Киев-57, ул. Нестерова, 3; ihorivanov@ukr.net
Слынько Виталий Иванович, *д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник*
Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
03057, Киев-57, ул. Нестерова, 3; ihorivanov@ukr.net

ДВЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Иванов И.Л., Слынько В.И.

Рассмотрена система уравнений с запаздыванием и импульсным воздействием вида

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x_t),\, t \neq \tau_k(x), \\ &\Delta x = I_k(x),\, t = \tau_k(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t,0) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, $I_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $I_k(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \ldots < \tau_k(x) < \ldots \to +\infty$, $k \to \infty$ в предположении, что величина запаздывания x_t равна r в (1),

При некоторых предположениях относительно гладкости правой части непрерывной компоненты, а также при ограничении на величину запаздывания $r \leq m \sup\limits_k (\max\limits_{\|x\| \leq H} \tau_{k+1}(x) - \min\limits_{\|x\| \leq H} \tau_k(x))$ для некоторого $H > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, установлены достаточные условия устойчивости системы (1).

Доказательство проведено с помощью метода Ляпунова--Разумихина с использованием двух вспомогательных функций с разбиением расширенного фазового пространства на два подмножества с последующим анализом поведения решений в каждом из них.

Полученные условия устойчивости системы (1) не предусматривают устойчивость отдельно непрерывной и дискретной компонент системы. Эти условия установлены при разных вариантах условий Разумихина, что позволяет выбирать наиболее удобное из них.

Построен пример системы, для которой получены условия устойчивости. Численно продемонстрировано, что при определёных значениях параметров этой системы, принадлежащих области устойчивости, будет наблюдаться неустойчивость отдельно непрерывной и дискретной компонент.

1. *Мартынюк А.А., Слынько В.И.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика. --- 2004. --- Том 40, N 2. --- С. 134 --- 144.

Івохін Євген Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua;
Матузенко Вадим Геннадійвич, студент 4 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: iuliiapodoliak@gmail.com

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ РОЗПОДІЛОМ РЕСУРСІВ В ДВОРІВНЕВИХ ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ

Івохін Є.В., Матузенко В.Г.

Вивчення процесів керування складними системами зумовлює появу поняття ієрархічної структури взаємодії окремих складових (підсистем) системи та приводить до формулювання специфічних для такого підходу математичних та інженерних проблем.
Однією з характерних особливостей складних ієрархічних систем є наявність у кожної підсистеми власної задачі керування. У даному випадку для керування процесами на рівні підсистем послідовно розв’язуються три основні задачі: отримання даних про об’єкт, аналіз структури й визначення процесів керування, а також використання результатів дослідження для оптимізації функціонування підсистем. Однак наявність у підсистем стратегій самоуправління приводить до виникнення конфліктів в їх діях. Це, як правило, пов’язано з антагоністичністю критеріїв функціонування підсистем, що, у свою чергу, приводить до необхідності вирішення проблем узгодження їх діяльності.

Розглянемо задачу динаміки дворівневої ієрархічної системи на прикладі управління процесом розподілу ресурсів сервера баз даних по обробці запитів віддалених користувачів.
Контроль за споживанням ресурсів на рівні підсистем (користувачів) і запобігання тупиковим ситуаціям можна здійснювати за допомогою спеціальних управлінських стратегій поведінки. Тупикову ситуацію ефективніше за все обходити, використовуючи інформацію про складність сигналів від кожної підсистеми [1]. Для розв’язання цієї задачі можна використати, наприклад, алгоритм банкіра. За цим алгоритмом аналізується поточний стан системи й запити на ресурси, що надходять від підсистем.

Однак потрібно звернути увагу, що залишається можливою тупикова ситуація, яка виникає внаслідок надвисокого завантаження серверу й неможливості виділення в межах часового проміжку достатньої кількості ресурсів для обробки запитів, навіть з урахуванням диспетчеризації [2].

Використаємо ідею алгоритму банкіра й наявність граничних значень складності сигналів від підсистем для управління рівнем завантаженості. дворівневої ієрархічної системи. Забезпечення контролю за виходом кожної підсистеми здійснюється за допомогою спостереження за рівнем порогових значень складності запитів. Планування послідовності обробки сигналів підсистем на рівні сервера з метою обрахування його завантаженості можна проводити на основі вирішення динамічної задачі про рюкзак.

Сформульовано задачу оптимального завантаження ресурсів сервера баз даних в умовах наявності порогових значень складності запитів, нечіткій класифікації важливості підсистем і диспетчеризації запитів з урахуванням граничного рівня наявних вільних ресурсів сервера.

Розроблено алгоритм управління допустимими рівнями складності запитів. Проведено чисельне моделювання роботи двохрівневої ієрархічної системи управління процесом розподілу ресурсів сервера на різноманітних тестових прикладах, що підтвердило ефективність запропонованої методики.

1. Кейлингерт П. Элементы операционных систем. / Кейлингерт П.– М.: Наука, 1985.
2. Дейкстра Е. Cooperating Sequential Processes / Дейкстра Е. // Сб. "Языки программирования" под ред. Ф. Женюи. – 1972. – С. 38-49.

Івохін Євген Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua;
Подоляк Юлія Миколаївна, студент 4 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: iuliiapodoliak@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ КЛАСТЕРНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ СТРАТИГРАФІЇ

Івохін Є.В., Подоляк Ю.М.

В наш час багатокритеріальні задачі вибору займають центральне місце в теорії прийняття рішень. Врахування багатьох критеріїв наближає постановку задачі до реальної. Але при розв'язанні таких задач виникають проблеми пов'язані зі складністю математичних моделей, великим об'ємом інформації і т.д. На приклад, для однієї із задач стратиграфії – створення карт розповсюдження родовищ корисних копалин, - дані надходять з багатьох джерел, мають різну степінь точності, частково доповнюють, а інколи суперечать один одному (не завжди в явному вигляді). Для побудови тривимірної просторової моделі родовища корисних копалин потрібна велика кількість найрізноманітніших параметрів, які логічно і зручно зберігати у єдиній базі даних. В Україні розроблена БД складається з набору взаємопов'язаних блоків, серед яких є:

- блоки, що містять інформацію про геологічні пласти та гірські породи;
- блоки геометричних параметрів пластів і гірських порід;
- дані про якість корисних копалин;
- характеристика свердловин;
- дані про результати геофізичних, геохімічних, та інших спостережень.

Процес побудови просторової моделі поділяється на два під етапи:

1. Створення просторової моделі(легенди) на емпіричному рівні для попереднього аналізу зібраного матеріалу й існуючих теоретичних передумов.
2. Побудова моделей на теоретичному рівні. На цьому етапі проводиться виявлення інваріантних властивостей і відносин між моделями конкретних об'єктів.

Одним із підходів до вирішення такої проблеми є використання кластерного аналізу неточно заданої інформації, для формалізації якої використовуються сукупності складених нечітких множин.

Нехай досліджувана сукупність даних представляє собою скінченну множину елементів $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, яка описує множину об'єктів кластеризації (*корисні копалини*), $P = \{p_1, p_2, ..., p_q\}$ - нечітку множину атрибутів та ознак об'єктів, кожний з яких являє собою деяку характеристику елементів множини А з відповідною функцією належності (*координати залягання, індекс стратиграфічного підрозділу, структура і т.д.*). Довільні вектори з елементів цих множин утворюють складені нечіткі множини $\widetilde{Q} = \{A/P, \mu(P)\}$. Для заданої кількості кластерів (груп) необхідно побудувати за алгоритмами нечіткої кластеризації (C-means, пікового групування та різницевого групування) 3D карту розповсюдження корисних копалин.

Створено програмну реалізацію для вирішення поставленої задачі, проведено її тестування на різноманітних моделях. Аналіз отриманих результатів дозволяє говорити про можливість ефективного використання методики в різних галузях виробництва.

1. Осовский С. Нейронные сети для обработки информмации / Пер. с польського И.Д.Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 308-313 с.

Каменецкий Владимир Александрович, к.ф.м.н.
Институт проблем управления РАН, Москва, Россия,
e-mail: vlakam@ipu.ru;

НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ САТУРАТОРА МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Каменецкий В.А.

Рассматривается нелинейная стационарная система управления с аддитивно входящим скалярным управлением. Предполагается, что управление в виде функции обратной связи $u = u(x)$ и удовлетворяющее ограничению $|u(x)| \leq 1$, уже выбрано на основании каких-либо известных ранее методов в виде функции насыщения (сатуратора) с нелинейной функцией переключения $c(\alpha_1, x)$

$$\hat{u}(x) = sat(c(\alpha_1, x)) = \begin{cases} c(\alpha_1, x) & , \ |c(\alpha_1, x)| < 1, \\ sign(c(\alpha_1, x)) & , \ |c(\alpha_1, x)| \geq 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha_1 \in U_1 \subset R^{N_1}$ -- вектор параметров и $c(\alpha_1, x)) \in C^{(2)}(U_1 \times G \to R)$. Таким образом предметом рассмотрения является система управления

$$\dot{x} = f_1(x) + sat(c(\alpha_1, x)) f_2(x), \tag{2}$$

в которой требуется определить стабилизирующие параметры α_1. Здесь $x \in R^n$ -- вектор фазовых переменных и $f_i(x) \in C^{(2)}(G \to R^n)$, $i = 1, 2$.

В настоящей работе, помимо обеспечения асимптотической устойчивости равновесия, ограничимся тремя требованиями к выбору параметров регулятора. Первое требование: требуется, чтобы область притяжения замкнутой системы содержала в себе нужное (отвечающее интересам проектировщика) множество начальных отклонений H_0. Второе требование: решения, начинающиеся в множестве H_0 не должны покидать заданного допустимого множества A (в частности, так достигается противодействие перерегулированию). Множество A определяется фазовыми ограничениями и имеет смысл области безопасного функционирования системы. Задавая множество A, эффект перерегулирования можно ограничивать только в отдельных направлениях. Третье требование: решения, начинающиеся в множестве H_0 должны иметь определенную экспоненциальную степень затухания (по возможности большую). Так понимается обеспечение быстродействия для выбранного множества решений. Разумеется, степень успеха, которого можно добиться в выполнении перечисленных требований, зависит от свойств системы управления и от принятого между требованиями компромисса.

В рамках прямого метода Ляпунова, множества, ограниченные поверхностями уровня функций Ляпунова, служат основным инструментом для обеспечения замкнутой системе требуемых выше качеств. В работе используются функции Ляпунова $v(\alpha_2, x)$ из произвольного параметрического класса Φ гладких функций, $v(\alpha_2, 0) = 0$ и $\alpha_2 \in U_2 \subset R^{N_2}$ -- набор параметров функции Ляпунова. В соответствии с методом [1], выбор стабилизирующих параметров α_1 осуществляется путем **одновременного** изменения параметров α_2 функции Ляпунова $v(\alpha_2, x)$ и самих этих параметров α_1 вдоль решений специального дифференциального включения. Приведены примеры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-07-00617) и Комплексной программы 15 ОЭММПУ РАН. *Каменецкий В.А.* Параметрическая стабилизация нелинейных систем управления с фазовыми ограничениями // АиТ. 1996. N 10. С. 65-76.

Клевчук Іван Іванович К.ф.м.н.
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
email: klevchuk@yandex.ru;

ДОСЛІДЖЕННЯ БІФУРКАЦІЙ ТА ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ОДНОВИМІРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Клевчук І. І.

Дослідження різницевого рівняння $x_{k+1} = f(x_k)$ зводиться до вивчення ітерацій відображення $x \to f(x)$. Розглянемо раціональні відображення відрізка в себе. Серед таких функцій особливу роль відіграють комутуючі функції. Розглянемо раціональні функції $f(x)$, що задовольняють співвідношення $\varphi(nx) = f(\varphi(x))$, де $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = \cos x$ або $\varphi(x) = \mathrm{sn}^2(x,k)$, $\mathrm{sn}(x,k)$ -- еліптичний синус Якобі, $0 < k < 1$. Показано, що відображення $x \to f(x)$ еквівалентне деякому кусково-лінійному зубчатому відображенню і має зліченне число циклів. Таке відображення має інваріантну міру, абсолютно неперервну відносно міри Лебега. Аналогічні властивості мають узагальнені поліноми Чебишова від кількох змінних.

Розглянемо дробово-лінійне відображення

$$f(z) = e^{i\gamma} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

комплексної площини, де $\gamma \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a|<1$. Така функція відображає одиничне коло $|z|=1$ в себе. Підставляючи $\gamma = 0$ і розглядаючи дійсну частину функції $f(z)$ та відповідне відображення точок кола $|z|=1$ на дійсну вісь, одержимо дві функції дійсної змінної

$$f_1(x) = \frac{(1+\alpha^2-\beta^2)x - 2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{1-x^2}}{1+\alpha^2+\beta^2-2\alpha x - 2\beta\sqrt{1-x^2}},$$

$$f_2(x) = \frac{(1+\alpha^2-\beta^2)x - 2\alpha - 2\alpha\beta\sqrt{1-x^2}}{1+\alpha^2+\beta^2-2\alpha x + 2\beta\sqrt{1-x^2}}.$$

Функції f_1 та f_2 відображають відрізок $[-1;1]$ в себе. Дослідимо біфуркацію відображень f_1 та f_2 при зміні параметрів α, β. Використовуючи властивості симетрії, досить дослідити відображення f_1 при $\alpha \ge 0$, $\beta > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.

Можна явно одержати вирази для періодичних точок відображення f_1. Біфуркація циклів відбувається, якщо цикл проходить через точку $x = 1$. Цикл інтервалів виникає, якщо точка $x = 1$ за скінченне число ітерацій попадає в періодичну точку. Одержано біфуркаційні рівняння для параметрів α, β, при яких відбуваються біфуркації циклів і циклів інтервалів.

Ковальчук Виктория Валентиновна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики
Государственный экономико-технологичный университет транспорта, Киев, Украина
e-mail: kovaltchukvv@ukr. net

БИФУРКАЦИИ В ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ

Ковальчук В.В.

Актуальность исследования динамического поведения перевернутых многозвенных маятников обусловлена широким применением данной математической модели для решения ряда проблем транспортного машиностроения, для определения условий функционирования конструктивных элементов строительных сооружений и т. п.

Для исследования особенностей динамического поведения трехзвенного маятника, нагруженного на верхнем конце следящей силой, дифференциальные уравнения движения [1] в нормальной форме Коши имеют вид

$$x' = f(x), \text{ где } x, f \in R^6. \tag{1}$$

При этом для переменных состояний приняты обозначения $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \varphi_1'$, $x_3 = \varphi_2$, $x_4 = \varphi_2'$, $x_5 = \varphi_3$, $x_6 = \varphi_3'$, где φ_1, φ_2 и φ_3 – углы отклонения соответственно нижнего, среднего и верхнего звеньев маятника от вертикали. Нулевое решение $\varphi_i = 0$, $\varphi_i' = 0$ (i = 1, 2, 3) системы (1) отвечает вертикальному положению равновесия маятника. Чтобы исследовать характер устойчивости этого положения равновесия, уравнения возмущенного движения маятника можно записать в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{6} a_{ij} x_j + F_i(x_1, \dots, x_6), \qquad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

При изменении существенных параметров рассматриваемого маятника изменяется также и характер собственных значений λ_i матрицы линеаризации $A = \left\| a_{ij} \right\|_1^6$ Приняв в качестве существенных параметров модуль следящей силы и коэффициент жесткости упругого крепления верхнего конца маятника, проведено разбиение плоскости этих параметров на области с разным характером устойчивости вертикального положения равновесия. Показан механизм потери устойчивости этого положения вследствие дивергентных или флаттерных бифуркаций. При непосредственном интегрировании системы (1) построены фазовые портреты трехзвенного маятника. Показана также эволюция фазовых кривых при варьировании параметров рассматриваемой системы.

Методом продолжения по параметру [2] при разных значениях параметров следящей силы построены кривые стационарных состояний динамической системы (1) и на этих кривых определены бифуркационные точки.

1. Лобас Л.Г. Об уравнениях опрокинутого маятника с произвольным числом звеньев под воздействием асиметричной следящей силы // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 5. С. 106–114.
2. Shirohara Y.A. A geometric method for numerical solution of non-linear equations and its application to non-linear oscillations // Publ. Res. Inst. Math., Kyoto Univ. – 1972. – **8**, No. 1. – P. 13 – 42.

Ковтун І.І., кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики
Національного університету біотехнологій і природокористування України,
Адреса для листування: 04212, Київ, вул. Малиновського, 11, кв. 399,
тел . (044)418-26-16, E-mail: ira@otblesk.com

ПРО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ РІВНЯННЯ

Ковтун І.І.

Лапласіан для функцій на дійсному сепарабельному гільбертовому просторі H ввів П.Леві [1]. Питанням теорії рівнянь і операторів Лапласа-Леві присвячена монографія М.Н.Феллера [2].

Розглянемо крайову задачу в кулі $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma=\left\{x\in H:\|x\|_H^2\le R^2\right\}$ простору H для нелінійного параболічного рівняння с лапласіаном Леві

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=f(\Delta_L U(t,x)) \quad \text{в } \Omega, \quad U(t,x)\big|_\Gamma=G(t,x), \tag{1}$$

де $U(t,x)$ — функція на $[0,\infty)\times\Omega$, $f(\varsigma)$ — задана функція однієї змінної, $G(t,x)$ — задана функція. Має місце

Теорема. Нехай $f(\varsigma)$ — неперервна двічі диференційовна функція в області значень $\{\Delta_L U(t,x)\}\subset\mathbf{R}^1$ і нехай рівняння $f(\varsigma)=z$ розв'язне відносно ς, $\varsigma=\varphi(z)$. Нехай для заданої $G(\tau,x)$ існує розв'язок $V(\tau,x)$ крайової задачі для рівняння теплопровідності $\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial t}=\Delta_L V(\tau,x)$ в Ω, $V(t,x)\big|_\Gamma=G(t,x)$. Нехай також рівняння $f'\left(\varphi\left(\left.\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\right|_{\tau=X+T(x)}\right)\right)[t-X]-T(x)=0$ розв'язне відносно $X=\chi(t,x)$, причому $\chi(t,x)\big|_\Gamma=t.$ Тут $T(x)=\frac{1}{2}\left(R^2-\|x\|_H^2\right).$

Тоді розв'язок крайової задачі (1) визначається формулою

$$U(t,x)=f\left(\psi(\chi(t,x))\right)[t-\chi(t,x)]-\psi(\chi(t,x))T(x)+V\left(\chi(t,x)+T(x),x\right),$$

де $\psi(\chi(t,x))=\varphi\left(\left.\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\right|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}\right).$

1. *Levy P.* Problemes concrets d'analyse fonctionnelle. - Paris: G.-V. 1951. - 510 p.
2. *Feller M.N.* The Levy Laplacian. - Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. - 153 p.

Микита Козлов, аспірант, кафедра моделювання складних систем.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
e-mail: nikita.kozlov@gmail.com

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ МОМЕНТІВ ПСЕВДО-ЗЕРНІКЕ

Козлов М.

Моменти псевдо-Зерніке широко використовуються в задачах розпізнавання зображень [1]. Дослідники зазначають, що вказані моменти є менш чутливими до шуму, спотворень форми об'єкта на відміну від моментів Зерніке; також перевагою є те, що кількість незалежних моментів псевдо-Зерніке є в 2 рази більшою для того самого диапазону порядків [1].

Моменти псевдо-Зерніке можна представити в наступному вигляді [1]:

$$\begin{aligned} A_{nl} &= \frac{n+1}{\pi} \sum_{s=0,n-l-s\,\text{ïàðíå}}^{n-|l|} S_{nls} \sum_{j=0}^{(n-|l|-s)/2} \sum_{m=0}^{|l|} \binom{(n-|l|-s)/2}{j} \binom{|l|}{m} (-i)^m m_{n-s-2j-m,2j+m} + \\ &+ \frac{n+1}{\pi} \sum_{s=0,n-l-s\,\text{íåïàðíå}}^{n-|l|} S_{nls} \sum_{j=0}^{(n-|l|-s+1)/2} \sum_{m=0}^{|l|} \binom{(n-|l|-s+1)/2}{j} \binom{|l|}{m} (-i)^m g_{n-s+1-2j-m,2j+m}. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $S_{nls} = (-1)^s \dfrac{(2n+1-s)!}{s!(n+|l|+1-s)!(n-|l|-s)!}$, i -- уявна одиниця, m_{pq} -- геометричні моменти порядку $p+q$, g_{pq} -- радіальні геометричні моменти порядку $p+q$ [1].

$$g_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q \sqrt{x^2+y^2} f(x,y)dxdy,\ p,q = 0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

де функцією $f(x,y)$ змодельовано вхідне цифрове зображення.

Формула (1) використовується в алгоритмах швидкого обчислення інваріантів. На практиці виникають проблеми при реалізації обчислень радіальних геометричних моментів (2), що входять до другого доданку (1). Як зазначено в [1], якщо розкласти підінтегральний вираз (2) в ряд Тейлора, втрачається властивість повноти набору інваріантів A_{nl}.

Ми пропонуємо обчислювати радіальні геометричні моменти (2) вводячи нову функцію $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} f(x,y)$. Тоді радіальні геометричні моменти зображення $f(x,y)$ співпадуть з геометричними моментами зображення $h(x,y)$.

При реалізації цього підходу у вигляді програмного забезпечення слід врахувати: у випадку бітонального зображення $f(x,y)$ відповідне йому $h(x,y)$ буде зображенням в градаціях сірого, для швидкого та точного обчислення геометричних моментів можна використати підхід, розроблений автором в роботі [2]; значення m_{pq} та g_{pq}, що входять у вираз (1) мають бути обчислені в середині одиничного кола, це нескладно реалізувати для геометричних моментів, а для g_{pq} слід замість виразу $\sqrt{x^2+y^2}$ в формулі (2) підставити $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, де (x_0,y_0) -- центр описанного навколо об'єкта репрезентованного зображенням $f(x,y)$ кола.

1. *Flusser J. Suk T. ZitovГЎ B.* Moments and Moment Invariants in Pattern Recognition. -- Chippenham: John Wiley & Sons Ltd, 2009. -- 296 p.

2. *Гаращенко Ф. Г., Козлов Н. В.* Разработка и реализация эффективных алгоритмов вычисления геометрических моментов // Компьютерная Математика. --2008. --1. --С. 88--96.

Коломієць Віктор Григорович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський славістичний університет;
e-mail: skolomon@yahoo.com
Коломієць Олександр Вікторович, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України;
e-mail: skolomon@yahoo.com
Коломієць Катерина Володимирівна, мол. наук. співробітник
Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України,
e-mail: katls@igph.kiev.ua

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Коломієць В. Г., Коломієць О. В., Коломієць К. В.

В багатьох практичних задачах дослідження коливань пружних систем доводиться досить часто вивчати коливні системи з невеликими нелінійностями. Ці системи описуються нелінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних, які близькі до лінійних диференціальних рівнянь гіперболічного типу другого порядку.

Асимптотичні методи нелінійної механіки є досить ефективними методами дослідження коливних процесів в таких системах [1].

В доповіді розглядається мішана крайова задача для диференціального рівняння гіперболічного типу [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varepsilon f\left(u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{1}$$

з початковими і крайовими умовами

$$u(0,x)=\phi(x),\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\psi(x), \tag{2}$$

$$u(t,0)=0,\ \frac{\partial u(t,l)}{\partial x}=0, \tag{3}$$

де $u=u(t,x)$ – шукана функція, t – час, $0\le x\le l$, $f\left(u,\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ – нелінійна ціла раціональна функція, що задовольняє всім необхідним умовам гладкості, $\phi(x)$ і $\psi(x)$ – неперервно-диференційовні функції, що розкладаються в ряд Фур'є за власними функціями задачі (1) – (3), ε – малий параметр.

Результати цих досліджень сформульовані у вигляді твердження, яке ми довели побудовою алгоритму. Суть цього твердження в наступному.

При $\varepsilon=0$ в незбуреній коливній системі можливі незгасаючі гармонічні коливання з частотою ω_1. Тоді для мішаної крайової задачі (1) – (3) існує одночастотний режим коливань з частотою $\omega_1=\frac{\pi}{l}$. Цей розв'язок побудовано за допомогою асимптотичного одночастотного методу Боголюбова–Митропольського в першому наближенні.

1. Митропольський Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища школа, 1995, – 592 с.
2. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 443 с.

Королік Руслан Петрович , аспірант 1 курсу, факультет кібернетики,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: korolik@email.ua;
Пічкур Володимир Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: pichkur@unicyb.kiev.ua;

ПРО ПОБУДОВУ МАКСИМАЛЬНОЇ ЗА ВКЛЮЧЕННЯМ МНОЖИНИ В ЗАДАЧІ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНОЇ МНОЖИННОЇ СИСТЕМИ

Королік Р.П., Пічкур В.В.

Розглянемо систему вигляду

$$x(k+1) = f_k(x(k)), \tag{1}$$

$$B_k : R^m \to comp(R^n), \;\; k \in [0, N], \tag{2}$$

де $f_k : D \to D \subset R^m$ – неперервні вектор-функції, $D \subset R^m$, B_k є неперервними багатозначними відображеннями. Позначимо $x(k) = x(k, x_0)$ – розв'язок системи (1) за умови $x(0) = x_0$, $k \in [0, N]$. Система (1) разом з відображенням (2) називається дискретною множинною системою, при цьому співвідношення (1) називається динамічною складовою, а відображення (2) – множинною складовою.

Нехай $G_0 \subset D$ – множина допустимих початкових станів, $\Phi(k) \in comp(R^n)$, $\Phi(k) \subset D$, $k \in [0, N]$ – множина фазових обмежень, $0 \in \operatorname{int}\Phi(k)$, $B_k(0) \subset \Phi(k)$ $k \in [0, N]$, $f_k(0) = 0$, $k \in [0, N]$.

*Означення***.** Сукупність $G_* \subset \Phi(0)$ називається максимальною за включенням множиною практичної стійкості розв'язку $x(k) = 0$ системи (1) при фазових обмеженнях $\Phi(k)$ на інтервалі $[0, N]$, якщо нульовий розв'язок є $\{G_*, \Phi(k), 0, N\}$ - стійким і $G_0 \subseteq G_*$ для всіх множин $G_0 \subseteq \Phi(0)$ для яких має місце $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ - стійкість розв'язку $x(k) = 0$ системи (1). Були доведені такі твердження.

Теорема 1. G_* - компакт.

Теорема 2. Якщо $x_0 \in \partial G_*$, то існує $\bar{k} \in [0, N]$ для якого $\partial B_{\bar{k}}(x(\bar{k}, x_0)) \cap \partial\Phi(\bar{k}) \neq \varnothing$, при цьому для будь-якого $k \in [0, N]$ виконується включення $B_k(x(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$.

Теорема 3. Нехай виконується включення $B_k(x(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$, $k \in [0, N]$ та існує таке $\bar{k} \in [0, N]$ для якого $\partial B_{\bar{k}}(x(\bar{k}, x_0)) \cap \partial\Phi(\bar{k}) \neq \varnothing$. Тоді $x_0 \in \partial G_*$.

Для дискретних множинних систем з лінійною динамічною і опуклозначною множинною складовою обґрунтовано опуклість оптимальної множини початкових умов і одержано співвідношення для знаходження її функції Мінковського. На основі одержаних тверджень розроблено і апробовано числовий метод.

Пічкур В.В. Дослідження задач практичної стійкості диференціальних включень. – К.: Київський університет, 2005. – 141 с.

Крапива Наталия Владимировна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина,
e-mail: scherbinskaya@gmail.com
Грабовская Рада Георгиевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова, Одесса, Украина;
Тингаев Александр Аркадьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Одесский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли, Одесса, Украина,
e-mail: al_tingaev@ukr.net

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Крапива Н.В., Грабовская Р.Г., Тингаев А.А.

Изучается вопрос об асимптотическом поведении решений сингулярной системы дифференциальных уравнений первого порядка между двумя особыми точками:

$$\begin{cases} g_1(x)g_2(x)y_k' = f_k(x, y_1, \dots y_n), \\ k = \overline{1,n}, \end{cases}$$

где $g_{1,2}(x) \in C^1(0,l)$, $g_1(+0) = g_2(l-0) = 0$, $g_1'(+0) = g_2'(l-0) = 0$, причем $g_1'(x) > 0$ на $(0,l)$, а $g_2'(x) < 0$ на $(0,l)$; $\forall k = \overline{1,n} : f_k(x, y_1, \dots, y_n) \in C^{0,1,\dots,1}_{x,y_1,\dots,y_n}(D), \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 > 0, f_k(0,0,\dots,0) = f_k(l,0,\dots,0) = 0$ в области $D = \left[(0,l) \times R^n\right]$.

Получены достаточные условия существования решений системы, продолжаемых на $(0,l)$, таких, что $y_k(+0) = y_k(l-0) = 0$. Даны асимптотические оценки этих решений. Исследование основано на применении качественного метода кривых и поверхностей без контакта при условии существования соответствующих функций Ляпунова. В частности, предполагается существование функции Ляпунова $V(y_1, \dots, y_n)$ и функций $\varphi_{1,2}(x) \in C^1(0,l)$: $\varphi_1'(x) > 0$ на $(0,l)$, $\varphi_1(+0) = 0$; $\varphi_2'(x) < 0$ на $(0,l)$ $\varphi_2(l-0) = 0$ таких, что при достаточно больших значениях постоянных c, δ_1, δ_2 поверхности

$$V(y_1, \dots, y_n) = \delta_1^2 \varphi_1^2(x), x \in (0, \Delta_1], 0 < \Delta_1 < l,$$
$$V(y_1, \dots, y_n) = \delta_2^2 \varphi_2^2(x), x \in [l - \Delta_2, l), 0 < \Delta_2 < l,$$
$$V(y_1, \dots, y_n) = c, x \in (0, l)$$

являются поверхностями без контакта.

Данная задача, очевидно, является сингулярной краевой задачей. Кроме того, особенности системы уравнений на разных концах промежутка, вообще говоря, могут быть различными. Важно отметить, что полученные асимптотические оценки решений системы выбираются в зависимости от вида особенности на соответствующем конце промежутка, а также, если исходная система уравнений является l-периодической по переменной x системой, то полученные условия являются достаточные условия существования l-периодического решения.

В качестве иллюстрации рассмотрен пример:

$$x^2(1-x)^3 y' = ay + bx(1-x)^2,$$

где $0 < x < 1, a \neq 0, b \neq 0$. Здесь, функция Ляпунова $V = y^2$, функции $\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = (1-x)^2$.

Красинский Александр Яковлевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
МГУПБ, Москва, Россия,
e-mail: krasinsk@mail.ru;
Каюмова Динара Рифатовна, аспирант,
МГУПБ, Москва, Россия,
e-mail: dina.kayumova@gmail.com

ОБ УПРАВЛЕНИИ ОДНОЙ МОДЕЛЬЮ РОБОТА С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ КОЛЕСАМИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ

Красинский А.Я., Каюмова Д.Р.

В большинстве исследований математическое описание взаимодействия колеса с поверхностью качения сводится к условию отсутствия проскальзывания единственной точки контакта колеса с плоскостью, а сами колеса считаются абсолютно жесткими. Однако на практике большинство экипажей снабжено деформируемыми колесами, которые соприкасаются с плоскостью целой площадкой контакта. Для описания взаимодействия деформируемого колеса с плоскостью известно достаточно много различных моделей [1-3].

В данной работе рассматривается модель робота с дифференциальным приводом [4-6] с учетом деформируемости колес. В качестве модели взаимодействия колеса с плоскостью выбрана феноменологическая модель [3]. Управление роботом осуществляется моментами, создаваемыми независимыми двигателями, находящимися по одному у каждого из колес. Величина момента формируется подачей напряжения на электродвигатели.

Методом Н.Н. Красовского [7] построено управление, стабилизирующее движение робота вдоль прямой до неасимптотической устойчивости по всем фазовым переменным. Данное управление зависит от всего вектора фазовых координат, в т.ч. и от параметров деформации колес, которые сложно или даже невозможно измерить в режиме реального времени. Поэтому для рассматриваемой модели необходимо получить оценки значений параметров деформации колеса, которые используются при построении стабилизирующего управления. Параметры системы оценивания определены решением соответствующей дуальной линейно-квадратичной задачи стабилизации.

1. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили, Самолеты, Висячие мосты / И. Рокар. - М.: Издательство иностранной литературы, 1959. – 288 с.
2. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Избранные труды. Механика / М.В. Келдыш. - М: Наука, 1985. – С. 491-530.
3. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса / М.А. Левин, Н.А. Фуфаев. - М.: Наука, 1989. – 269 с.
4. Буданов В.М. О движении колесных роботов / В.М. Буданов, Е.А. Девянин // ПММ. – 2003. – Т. 67, вып. 2. – С. 244-255.
5. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колесных роботов / Ю.Г. Мартыненко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11. – С. 29-80.
6. Павловский В.Е. Динамика, моделирование, управление мобильными роботами / В.Е. Павловский, В.В. Евграфов, В.В. Павловский, Н.В. Петровская // Материалы Поспеловских чтений. [В Интернете] – 2007 г. – http://posp.raai.org/data/posp2007/SIR/vlpavl.doc.
7. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений / Н.Н. Красовский //Дополнение к книге И.Г. Малкина: Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. – С. 475-514.

Красинская Эсфира Мустафовна, кандидат физ.-мат. наук , доцент,
Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,Россия,
Красинский А.Я., доктор физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет прикладной биотехнологии, Москва, Россия
e-mail: krasinsk@mail.

ПРИМЕНЕНИЕ ИЗБЫТОЧНЫХ КООРДИНАТ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Красинская Э.М., Красинский А.Я.

Пусть на механическую систему, положение которой определяется координатами $q_1, q_2, ..., q_n$, наложены некоторые геометрические связи вида

$$f_\mu(q_1, q_2, ..., q_n) = 0, \quad \mu = \overline{1, m}$$

Исследование динамики таких систем методами голономной механики (требующими введения независимых обобщенных координат, вариации которых будут независимы), даже в достаточно простых случаях связано с чрезвычайно громоздкими и занимающими неоправданно много времени преобразованиями.

Во многих задачах для связанных систем оказывается целесообразным [1] сохранение избыточных координат, т.к. это упрощает их исследование, несмотря на формальное увеличение размерности фазового пространства. Но при рассмотрении таких механических систем часто применяются уравнения Лагранжа первого рода с множителями связей [1], т.е. в уравнениях содержатся лишние неизвестные, исключение которых тоже усложняет исследование.

Гораздо проще использовать переход от уравнений геометрических связей к связям в продифференцированной форме

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\mu\rho}(q)\dot{q}_\rho, \quad \mu = \overline{1, m}$$

где $B_{\mu\rho}$-функции координат ($q_1, q_2, ..., q_n$). Известно [2], что дифференциальные уравнения движения механических систем с избыточными координатами имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial L}{\partial q_\rho} - B_{\mu\rho}\frac{\partial L}{\partial q_\mu} = Q_\rho + B_{\mu\rho}Q_\mu$$

Уравнения М.Ф. Шульгина – это удобный аппарат для представления уравнений движения систем с избыточными координатами в векторно-матричном виде в Лагранжевой и Гамильтоновой форме, а также в переменных Рауса.

В данной работе разрабатывается применение таких уравнений в задачах устойчивости и стабилизации.

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. / А.И. Лурье. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 824 с
2. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. / М.Ф. Шульгин // Научные труды САГУ. – Ташкент. 1958 г. 183 с.

Кудін Григорій Іванович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент ,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: kudin@unicyb.kiev.ua;

ДО ПИТАННЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІСТЬ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ

Кудін Г. І.

Перспективними представляються дослідження задач оптимального синтезу систем управління, коли оптимізація здійснюється не тільки на етапі побудови оптимального управління по тому або іншому критерію оптимальності, але оптимізуються також параметри математичної моделі.

Одним из підходів до розв'язання проблеми можна вважати математичний апарат теорії псевдообернених матриць [1,2]. Постановка задачі оптимального синтезу структур для лінійних систем і можливий підхід до її розв'язання з використанням апарату псевдообернених матриць розглянуті в роботі [3].

В доповіді представляються аналітичні вирази збурень елементів псевдооберненої матриці від збурень окремих елементів початкової матриці [4], досліджується отримані залежності на предмет існування похідних.

Постановка задачі

Нехай для матриці $A \in R^{m\times n}$, складеної з елементів α_{ij}, тобто

$$A = (a(1)\vdots\ldots\vdots a(n)) \equiv (a_{(1)}\vdots\ldots\vdots a_{(m)})^T \in R^{m\times n},$$

де $\quad a(j) \in R^m,\ a_{(i)}^T = (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ij},\ldots\alpha_{in}) \in R^n, \quad i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n},$

відома її псевдообернених матриця $A^+ \in R^{n\times m}$, яку можна подати у вигляді

$$A^+ = (p(1)\vdots\ldots\vdots p(m)) = (p_{(1)}\vdots\ldots\vdots p_{(n)})^T, \quad p(i) \in R^n, \quad p_{(j)} \in R^m \quad i=\overline{1,m}\ \ j=\overline{1,n}.$$

Якщо елемент α_{ij} матриці $A \in R^{m\times n}$ змінюється на деяку величину $\delta \in R$, тобто матриця A набуває збуреного вигляду

$$\tilde{A} = A + \delta\, e_i(m)\ e_j^T(n),$$

де $\quad e_i(k) = (0\ \ \ldots\ \ \underset{i}{1}\ \ \ldots\ \ 0)^T \in R^k,$

то це викликає збурення для псевдооберненої матриці A^+**:**

$$\Delta A^+(\alpha_{ij}) = (A + \Delta A(\alpha_{ij}))^+ - A^+.$$

По відношенню до матриці A вектори $e_i(m)$ і $e_j^T(n)$ можуть бути лінійно залежними або незалежними з вектор - стовпчиками та вектор - рядками вихідної матриці A відповідно і це, як випливає з роботи [4], істотно впливає на аналітичне представлення збурених елементів псевдо-обернених та проекційних матриць.

1. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц. // Кибернетика и системный анализ. – 1997.–№2.–С.98-107.

2. Кириченко Н.Ф., Донченко В.С. Псевдообращение в задачах кластеризации // Кибернетика и системный анализ.–2007.-№4.-С. 73-91.

3. Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т. Оптимальный синтез структур для линейных систем. // Проблемы управления и информатики. –1996.-№1-2. – С.162-171.

4. Кириченко Н.Ф., Кудин Г.И. Вариации псевдо-обратных и проекционных матриц при возмущении элементов исходной матрицы. . // Проблемы управления и информатики. –2009.-№3 -2. – С.7-2

Кузьмина Людмила Константиновна,
Казанский авиационный институт-НИУ
Адамюк, 4-6, Казань-15, 420015, РОССИЯ, e-mail: Lyudmila.Kuzmina@ksu.ru

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Кузьмина Л.К.

Предмет исследования – системы дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных, моделирующих динамику объектов с многовременными масштабами.В работе рассматриваются сингулярно возмущенные системы определенного типа, в критических особенных случаях. Обсуждается возможность качественного исследования таких систем и свойств их решений по приближенным уравнениям. Для систем, содержащих различные степени малого параметра, определяются условия, при которых решение задачи об устойчивости сводится к решению этой задачи для подсистем более низкого порядка. При этом отдельно рассматриваются сингулярно возмущенные системы, находящиеся вблизи границы области устойчивости. Обсуждается задача о близости решений полной и укороченной систем дифференциальных уравнений на бесконечном интервале времени. Исследуются постановки, когда в качестве порождающей системы принимается не вырожденная, а также сингулярно-возмущенная система. С использованием асимптотического подхода для рассматриваемых здесь случаев критических спектров некоторых матриц получены условия корректности укороченных систем (в том числе, в задачах об устойчивости, о быстродействии, об оптимальных параметрах). При этом, в расширение постановок теории устойчивости (теории А.М.Ляпунова) и теории возмущений (теории А.Н.Тихонова) в рассмотрение вводится иерархическая последовательность укороченных (порождающих) систем, приводящих к асимптотическим моделям разных уровней (к s- моделям). Результаты, полученные в работе с помощью применяемого регулярного метода, основанного на синтезе методов теории устойчивости и асимптотических методов, представляют самостоятельный интерес как с точки зрения теории, так и с точки зрения приложений для сингулярно возмущенных систем.

Работа выполняется при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (11-08-00047).

Курилко Олександр Борисович, аспірант 3 курсу, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

АДВЕКЦІЯ ПАСИВНОЇ РІДКОЇ ЧАСТИНКИ В ПРЯМОКУТНІЙ ПОРОЖНИНІ

Курилко О.Б.

Classical two-dimensional biharmonic problem for a rectangular cavity is considered. Superposition method is effective for solving problems concerning creeping flow of viscous fluid under the influence of tangential velocities applied at its walls. The method is illustrated by several examples.

Двовимірна повільна Стоксова течія нестисливої в'язкої рідини може бути представлена в термінах бігармонічної задачі:

$$\Delta\Delta\psi = 0. \tag{1}$$

У прямокутних координатах Ейлерові компоненти вектора швидкості u та v визначаються як

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Граничні умови для рівняння (1) маються вигляд

$$\psi = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,\ x = \pm a,\ |y| \le b,\ \ \psi = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,\ y = b,\ |x| \le a,$$

$$\psi = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = \begin{cases} -U_0, & -a \le x \le c, \\ U_0, & c < x \le a, \end{cases} \quad y = -b,\ |x| \le a. \tag{3}$$

У двовимірному випадку рух пасивної безінерційної частинки описується системою диференціальних рівнянь, яка є гамільтоновою системою з одним ступенем вільності [1] :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{4}$$

з початковими умовами $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$.

Побудовано аналітичний розв'язок граничної задачі (1), (3) за допомогою методу суперпозиції [2].

Розглянуто випадок руху рідини в прямокутній порожнині з розмірами $a = 2.0$, $b = 1.0$, $c = 1.0$. При розгляді поведінки пасивної лагранжевої частинки у відомому полі швидкостей, встановлена наявність двох принципово різних режимів: регулярний і хаотичний. Знайдено граничне значення швидкості U_0, при якому перший режим переходить в другий. Ці режими визначаються методами стохастичної динаміки, зокрема, за допомогою відображення Пуанкаре.

Задачу (4) про адвекцію пасивної домішки розв'язували чисельним методом Рунге – Кутта – Фельберга четвертого - п'ятого порядку з адаптованим вибором кроку інтегрування.

Виявлено суттєву різницю деформації виділеного контуру в рідині при регулярному і хаотичному режимах руху після трьох періодів.

1. *Aref H.* The development of chaotic advection // Phys. Fluids. – 2002. – **14**. – P. 1315–1325.
2. *Meleshko V. V.* Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proc. R. Soc. London. – 1996. – A**452**. – P. 1999–2022.

Кухаренко Олександра Вікторівна, аспірантка,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: akukharenko@ukr.net

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ СТАЛИМ ЗАПІЗНЮВАННЯМ

Кухаренко О.В.

У запропонованій роботі розглянуті системи лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь другого порядку з сталим запізнюванням

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_{11}\dfrac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{12}\dfrac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial x^2} + b_{11}u(x,t) + b_{12}v(x,t), \\ \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a_{21}\dfrac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2} + a_{22}\dfrac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial x^2} + b_{21}u(x,t) + b_{22}v(x,t). \end{cases} \tag{1}$$

Система (1) визначена при $0 \le x \le l$, $t \ge -\tau$. Початкові і крайові умови мають наступний вигляд

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ v(x,t) = \psi(x,t),\ 0 \le x \le l,\ -\tau \le t \le 0, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t),\ v(0,t) = \theta_1(t),\ v(l,t) = \theta_2(t),\ t \ge -\tau. \tag{3}$$

Крім того, виконані «умови узгодженості»

$$\mu_1(t) = \varphi(0,t),\ \mu_2(t) = \varphi(l,t),\ \theta_1(t) = \psi(0,t),\ \theta_2(t) = \psi(l,t),\ -\tau \le t \le 0.$$

Передбачається, що матриці коефіцієнтів $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $i, j = \overline{1,2}$ задовольняють умові комутативності. Отримано розв'язок першої крайової задачі в аналітичному вигляді методом розділення змінних за використанням спеціальної функції – запізнюючогося експоненціала для випадку, коли власні числа цих матриць дійсні та різні.

Розв'язок задачі представлений у вигляді ряду Фур'є, тому наведені обмеження, що накладаються на початкові і крайові умови, при виконанні яких ряди збігаються абсолютно і рівномірно.

Куян Михайло Юрійович, студент 5 курсу Інституту Високих Технологій
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: michaelkuyan@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛЕВІТАЦІЇ НАДПРОВДІНОГО КІЛЬЦЯ

Куян М.Ю.

Досліджується проблема отримання достатніх умов стійкості рівноваги вільного тіла магнітною взаємодією нерухомого надпровідного кільця, вісь якого паралельна постійній силі тяжіння, та малого надпровідного кільця на вільному тілі, яке вважається динамічно симетричним «магнітним маятником». Вільне тіло описується шістьма степенями свободи q_i $,i = 1,...,6$ (три циліндричні координати центру мас маятника і три кути Ейлера, які визначають просторову орієнтацію вільно тіла). Основною проблемою для отримання динамічної моделі (рівнянь руху) є знаходження магнітної потенціальної енергії U як функції q_i. Вона розв'язується на основі відомих формул для вектора магнітної індукції тонкого струмонесучого кільця, представлених у вигляді лінійних функцій повних еліптичних інтегралів $E(k)$ і $K(k)$, модуль яких k залежить від q_i , та припущення малості надпровідного кільця маятника по відношенню до радіуса нерухомого надпровідного кільця. Таке припущення дозволило отримати вираз для U та отримати в явному виді рівняння руху на основі рівнянь Лагранжа для консервативних динамічних систем. Рівнянням руху задовольняє частинний розв'язок, якому відповідає рівновага маятника в положенні коаксіальності нерухомого і вільного кілець, коли центр мас маятника розміщений на їх спільній вертикальній осі. Стійкість такого руху досліджена на основі другого методу Ляпунова в постановці задачі про стійкість відносно частини змінних (теорема Румянцева). В якості параметрів, відносно яких отримуються достатні умови стійкості, вибрано радіальне зміщення центра мас маятника та кут нутації (кут між магнітними осями надпровідних кілець). Збурення інших координат вважаються довільними за величиною. У випадку швидкого обертання маятника відносно осі його кільця крім названих малими вважаються збурення швидкостей. В якості функції Ляпунова вибрано інтеграл повної енергії (у випадку рівноваги – сума магнітної та гравітаційної потенціальних енергій). Магнітні параметри надпровідних кілець (магнітні потокозчеплення, які є константами для випадку надпровідності кілець) підібрані таким чином, щоб виконувались умови прояву феномену «магнітна потенціальна яма» (в нашому випадку мінімуму U як функції вертикального зміщення центру мас маятника). З використанням системи комп'ютерної алгебри Maple отримані чисельні і графічні розв'язки трансцендентних нерівностей відносно магнітних та геометричних параметрів, яким відповідає стійка рівновага у вільному стані або рівновага з швидким обертанням навколо осі кільця вільного маятника. Як приклад, доведено, що стійкі рівноваги можливі тільки тоді, коли вертикальний зазор між кільцями не менший 0, 63 радіуса нерухомого кільця.

1. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел.- Київ, Наукова думка, 1981. - 140с.
2. Смайт В. Электростатика и электродинамика.- Москва, Издательство иностранной литературы, 1954.- 606.
3. Thesis Manuscript: Computer Technologies in Modeling of Free Magnets Dynamics / L. V. Grygor`yeva - Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv. - 2009. - 232 p.

Лебєдєва Тетяна Тарасівна, кандидат економ. наук, старший науковий співробітник,
e-mail: lebedtt@i.com.ua;
Семенова Наталія Володимирівна, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
e-mail: nvsemenova@meta.ua;
Сергієнко Тетяна Іванівна, кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна

УЗГОДЖЕНІСТЬ УМОВ СТІЙКОСТІ ЗА ВЕКТОРНИМ КРИТЕРІЄМ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.Т.

Досліджено векторну задачу дискретної оптимізації наступного вигдяду:
$Z(M(F,X)):\max\{F(x)\ |\ x\in X\}$, де $M(F,X)\in\mathfrak{M}=\{Sl(F,X),P(F,X),Sm(F,X)\}$ – деяка множина оптимальних ($P(F,X)$ – за Парето, $S\ell(F,X)$ – за Слейтером, $Sm(F,X)$ – за Смейлом) розв'язків, $F(x)=Cx$, $C\in R^{\ell\times n}$ – матриця коефіцієнтів лінійних критеріїв, $\ell\geq 2$, $X=G\bigcap Z^n$, $G=\left\{x\in R^n \middle| g_i(x)\leq 0, i\in N_m\right\}$, $g_i(x)=\langle x,Q_ix\rangle+\langle p_i,x\rangle+h_i$, $p_i\in R^n$, $h_i\in R$, $Q_i\in R^{n\times n}$ – симетрична невід'ємно визначена матриця, $i\in N_m=\{1,...,m\}$, Z^n – множина всіх цілочислових векторів в R^n. Нехай $u=(u_1,u_2)\in U=U_1\times U_2$ – набір вхідних даних задачі, де U_1 і U_2 – відповідно простори вхідних даних, що описують векторний критерій F і допустиму множину X, $u_1=C\in U_1$, $u_2=(Q,p,h)\in U_2$. Для $u=(u_1,u_2)\in U$ і $\delta>0$ визначи-мо множину $O_\delta(u)=\{u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\ |\ u_1(\delta)\in O_\delta(u_1),\ u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)\}$. Відомі [1,2] п'ять типів $T_1,\ldots,T_5$ стійкості таких задач. Тут вивчені питання, що стосуються стійкості типу T_3.

Означення. Задача $Z(M(F,X))$ стійка (стійка за обмеженнями, стійка за векторним критерієм), якщо $\exists\,\delta>0$, $\forall\, u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$: $M\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)\subset M(F,X)$, де (відповідно в формулі для $O_\delta(u)$ $u_1(\delta)=u_1$ або $u_2(\delta)=u_2$).

Твердження 1. Нехай $Sl(F,X)\neq X$. Задача $Z(Sl(F,X))$ стійка тоді і тільки тоді, коли вона стійка за обмеженнями.

Твердження 2. Нехай $P(F,X)\neq X$. Задача $Z(P(F,X))$ стійка тоді і тільки тоді, коли:
1) вона стійка за векторним критерієм, 2) задача $Z(Sl(F,X))$ стійка за обмеженнями.

Твердження 3. Нехай $Sm(F,X)\neq X$. Якщо задача $Z(Sm(F,X))$ стійка за векторним критерієм, а задача $Z(Sl(F,X))$ стійка за обмеженнями, то задача $Z(Sm(F,X))$ стійка.

Отримані результати досліджень стійкості векторних задач цілочислової оптимізації указують на існування взаємозв'язків між стійкістю задач пошуку розв'язків, оптимальних за Слейтером, за Парето та за Смейлом.

1. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и систем. анализ. – 2005. – № 4. – С. 90–100.

2. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и систем. анализ. – 2008. – № 3. – С. 142–148.

Робота виконана за фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (Проект Ф 41.1/031)

Ліндер Ярослав Миколайович, аспірант
КНУ, Київ, Україна,
email: dremora@bigmir.net;

ПРО АЛГОРИТМИ ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОЇ МНОЖИНИ СЛАБКОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Ліндер Я.М.

У роботі описуються властивості максимальної за включенням множини початкових умов, для яких хоча б один частинний розввЂ™язок лінійного диференціального включення з імпульсним впливом не покидає задані фазові обмеження. Імпульсні впливи розглядаються в задані моменти часу. Одержано критерій належності точки до границі оптимальної множини, для неї знайдено функціонал Мінковського і опорний функціонал.

Розглянемо лінійне диференціальне включення з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} \in A_i(t)x + U_i(t), t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), i \in \{1,2,...,N\}, \tau_0 = t_0, \tau_N = T, \tag{1}$$

$$x(\tau_i^+) \in B_i x(\tau_i^-) + V_i, i \in \{1,2,...,N-1\} \tag{2}$$

де $U_i : [t_0, T] \to conv(\mathbb{R}^n)$ -- неперервне відображення, V_i -- опуклий компакт, $A_i(t)$ -- неперервна матриця розмірності $n \times n, i \in \{1,2,...,N\}$, B_i -- невироджена матриця розмірності $n \times n, i \in \{1,2,...,N-1\}$. Позначимо $Q_i(t) = \int_{\tau_i}^{t} \Theta_i(t,s) U_i(s) ds$, де $\Theta_i(t,s)$ -- фундаментальна матриця системи $\frac{dx}{dt} = A_i(t)x$, нормована в точці *s,* інтеграл від багатозначного відображення розглядаємо у сенсі Аумана.

Відображення $\Phi : t \to \Phi(t)$ опуклозначне та компактозначне при $t \in [t_0, T]$, неперервне на $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i \in \{1,2,...,N\}$, графік $\Gamma(\Phi) \subset D$, $0 \in \Phi(t)$, $0 \in U_i(t), 0 \in V_i, t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), i \in \{1,2 \ldots N\}$.

Теорема 1. Максимальна за включенням множина I_* є опуклою.

Теорема 2. Опорна функція множини I_* виражається співвідношенням

$$c(I_*, \psi) = \underset{\psi}{co} \min_{i \in \{1,2,...,N\}} \min_{t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]} c\left(\Psi_i(t) + (-1) \cdot M_i(t), \left(H_i^{-1}(t)\right)^T \psi\right), \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 3. Нехай $x_0 \in I_*$ і для всіх розв'язків $x = x(\cdot, x_0, t_0) \in X(\cdot, x_0, t_0)$ диференціального включення (1), (2), для яких $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t), t \in [t_0, T]$, для деякого $i \in \{1,2,...,N\}$ існує момент $\tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, для якого $x(\tau, x_0, t_0) \in \partial \Psi_i(t)$. Тоді $x_0 \in \partial I_*$.

Функція деформації для множини слабкої практичної стійкості має вигляд

$$k_*(l) = \min_{\psi \in S} \min \left\{ \frac{c(\Psi_i(t), \psi) + c(M_i(t), -\psi)}{\psi^T H_i(t) l}, i \in \{1,2,...,N\}, t \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \right\}.$$

Тоді $I_* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = kl, k = [0, k_*(l)], l \in S \right\}$.

1. *Башняков О. М.* Практична стійкість, оцінки та оптимізація // К.: Київський університет -- 2008, -- С. 94-100.

Лінчук Ю.С.
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
вул.Коцюбинського 2, м. Чернівці, 58012
e-mail: yustlin@gmail.com

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ОПЕРАТОРІВ КОМПОЗИЦІЇ

Лінчук Ю.С.

Композиція функцій є фундаментальною операцією в математиці, а оператори композиції відіграють важливу роль в теорії динамічних систем та теорії операторів. Вони природним чином виникають при описі комутантів операторів множення на функції в різних функціональних просторах. В останні тридцять років здійснюється систематичне дослідження властивостей операторів композиції в банахових просторах Харді, Бергмана і Діріхле. В цьому повідомленні досліджено розв'язки операторного аналога мультиплікативного рівняння Коші у класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій.

Нехай G -- довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ -- множину всіх лінійних неперервних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Опишемо всі лінійні неперервні оператори T на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$(T(fg))(z) = (Tf)(z)(Tg)(z), \tag{1}$$

для довільних функцій $f(z)$ та $g(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$. Для розв'язування цієї задачі використано інтегральне зображення Кете операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ [1].

Теорема. Нехай G -- довільна область комплексної площини. Для того, щоб ненульовий оператор T належав до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняв співвідношення (1) необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді

$$(Tf)(z) = f(\psi(z)),$$

де $\psi(z)$ -- деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$, для якої $\psi(G) \subset G$.

З теореми випливає, що множина ненульових операторів T, які задовольняють співвідношення (1) збігається з множиною операторів композиції, які лінійно та неперервно діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. Комутаційні властивості операторів композиції в просторах $\mathcal{H}(G)$ досліджені в [2]-[3].

Розглянуто також деякі узагальнення рівняння (1).

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. -- 1953. -- **191**. -- P. 30 -- 49.

2. *Лінчук Ю.С.* Комутант одного класу операторів композиції в просторах аналітичних функцій // Доповіді НАН України. -- 2005. -- № 11. -- С.14--17.

3. *Linchuk Yu. S.* Representation of commutants for composition operators induced by a hyperbolic linear fractional automorphisms of the unit disk // Methods of Funct. Anal. and Top. -- 2008. -- № 11. -- С.14--17.

ЛІСНЯК Віктор Савич, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
v-lisnyak@univ.kiev.ua
ПОЛЬЩА Галина Сергіївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський технологічний інститут легкої промисловості (КТІЛП)

ІНТЕГРАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ КОНІК НА ЕЛІПТИЧНОМУ ГІПЕРБОЛОЇДІ

Лісняк В.С., Польща Г.С.

У класичній інтегральній геометрії групово-інваріантні міри нерідко будуються саме у вигляді $\mu(W) = \{W\}\int M\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^m$, де m-кратний інтеграл поширюється на (у найзагальнішому розумінні) інтегровну множину W однотипних геометриних елементів, розподілених з густиною M, а ω^s з $s = 1, 2, ..., m$ – головні лінійні диференціальні форми біжучого елементу. Тут певний інтерес становить з'ясування й унаочнення областей означення мір і густин. Проведемо його для випадку розташованих на еліптичних параболоїдах кривих другого порядку.

Рівняння виду $x^2 / p + y^2 / q = 2z$, $p > 0,\ q > 0$ є канонічним для еліптичних параболоїдів. Коніки (невироджені криві другого порядку) C на кожній квадриці Q є плоскими її перерізами площинами π, рівняння яких (з тільки істотними параметрами) без відчутної втрати загальності зараз зручно взяти саме у вигляді $z = ax + by + c$. Взяття ж рівнянь π у "тангенціальному" вигляді $ux + vy + wz = 1$ вже виключає всі прохожі через вісь симетрії параболоїду Q площини. За жодних значень a, b, c рівняння $z = ax + by + c$ не має вигляду $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, а отже й не зображує вертикальну площину. Тоді переріз $\pi \cap Q$ не "вертикальний", тобто не "паралельний" осі параболоїду, а тому вже і його проекція – це тільки коніка.

Множина χ неврахованих у $z = ax + by + c$ (вертикальних) площин нульвимірна у загальній множині π площин. Тому C утворюють ∞^3 їх множину. Їхні рівняння подавані системою виду $\{ qx^2 - 2apqx + py^2 - 2bpqy - 2pqc = 0$, $z = ax + by + c$. Її нетривіальна сумісність (існування невиродженого конічного перерізу) є наявність нетривіального (у цьому розумінні) розв'язку її першого рівняння $qx^2 - 2apqx + py^2 - 2bpqy - 2pqc = 0$.

Інваріантами перетворень групи рухів для загального рівняння $a_{ij}x^i x^j = 0$ (де індекси $i, j = 1,2,3,$ $a_{ij} = a_{ji}$, а $x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = 1$) кривої другого порядку $i = a_{11} + a_{22}$, $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta = \det(a_{rs})$ зараз є такі: $i = q + p$, $\delta = pq$. $\Delta = -p^2q^2(a^2p + 2c + b^2q)$. (1)

Утворимо області $\delta_1 = \{k, l, p\} \cap (\Delta_1 \neq 0)$ та $\delta_2 = \{k, l, p\} \setminus (\Delta_1 = 0)$. Тоді формули виду

$$\mu(h) = \{\delta_h\}\iiint dk \wedge dl \wedge dp \qquad (2)$$

визначають міри конік на параболоїдах. Зараз за міру взято об'єм належної частини параметричного простору групи перетворень. Тут геометричний зміст кожного з параметрів a, b, c відомий, а числа p, q – потенційно фіксовані.

В інтегрально-геометричних задачах на $\{C\}$ накладаються ще й певні додаткові геометричні обмеження G. Тоді й інтегрування у (2) ведеться вже з дотриманням розширеної вимоги $G \wedge (\Delta \neq 0)$.

Ряд змістовних геометричних результатів дістаємо з використанням у G формул (2) і (3), адже за умови $\Delta \neq 0$ вимога $\delta = 0$ характеризує параболи, $\delta < 0$ – гіперболи, а $\delta / i > 0$ – дійсні еліпси, зокрема при $i^2 = 4\delta$ (тобто при $a_{11} = a_{22},\ a_{12} = 0$) – вже кола.

Мамедов Мурад Мамедович, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник физика – *математического института Академии наук Туркменистана, Ашгабат*.
Халлыева Огулбагт Гылыжовна, аспирантка *Туркменского государственного университета имени Магтымгулы*.
Аннаовезова Эльвира Байрамовна, научный сотрудник физика – *математического института Академии наук Туркменистана, Ашгабат.*
e-mail: gapur.93@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ ДЛЯ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ ПОТОКАМИ

Мамедов М.М., Халлыева О.Г., Аннаовезова Э.Б.

Доклад посвящен к построению наглядной математической модели производства энтропии применительно для сложной термодинамической системы с тремя обобщенными потоками [1].

При этом обобщенные потоки будут описываться следующими феноменологическими уравнениями:

$$I_1 = \gamma_{11}X_1 + \gamma_{12}X_2 + \gamma_{13}X_3, \tag{1}$$

$$I_2 = \gamma_{21}X_1 + \gamma_{22}X_2 + \gamma_{23}X_3, \tag{2}$$

$$I_3 = \gamma_{31}X_1 + \gamma_{32}X_2 + \gamma_{33}X_3,\ \ \gamma_{11} > 0, \gamma_{22} > 0, \gamma_{33} > 0 \tag{3}$$

Тогда согласно второму началу, локальные значения производства энтропии (σ) будет выражаться так:

$$\sigma = I_1X_1 + I_2X_2 + I_3X_3 \geq 0 \tag{4}$$

С учетом (1) – (3), соотношение (4) можно представить так:

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{1}{12}\Bigg\{ &\frac{1}{\gamma_{11}}\left[2I_1 - (\gamma_{12}-\gamma_{21})X_2 - (\gamma_{13}-\gamma_{31})X_3\right]^2 + \frac{1}{\gamma_{22}}\left[2I_2 + (\gamma_{12}-\gamma_{21})X_1 - (\gamma_{23}-\gamma_{32})X_3\right]^2 + \\ &+\frac{1}{\gamma_{33}}\left[2I_3 + (\gamma_{13}-\gamma_{31})X_1 + (\gamma_{23}-\gamma_{32})X_2\right]^2 + \left[4\gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12}+\gamma_{21})^2\right]\left(\frac{X_1^2}{\gamma_{22}} + \frac{X_2^2}{\gamma_{11}}\right) + \\ &+\left[4\gamma_{11}\gamma_{33} - (\gamma_{13}+\gamma_{31})^2\right]\left(\frac{X_1^2}{\gamma_{33}} + \frac{X_3^2}{\gamma_{11}}\right) + \left[4\gamma_{22}\gamma_{33} - (\gamma_{23}+\gamma_{32})^2\right]\left(\frac{X_2^2}{\gamma_{33}} + \frac{X_3^2}{\gamma_{22}}\right) + \\ &+\left[4(\gamma_{12}+\gamma_{21}) - \frac{2(\gamma_{13}+\gamma_{31})(\gamma_{23}+\gamma_{32})}{\gamma_{33}}\right]X_1X_2 + \left[4(\gamma_{13}+\gamma_{31}) - \frac{2(\gamma_{12}+\gamma_{21})(\gamma_{23}+\gamma_{32})}{\gamma_{22}}\right]X_1X_3 + \\ &+\left[4(\gamma_{23}+\gamma_{32}) - \frac{2(\gamma_{12}+\gamma_{21})(\gamma_{13}+\gamma_{31})}{\gamma_{11}}\right]X_2X_3\Bigg\} \geq 0\end{aligned} \tag{5}$$

На основе (5) нетрудно убедится что при выполнении условий:

$$2I_1 - (\gamma_{12}-\gamma_{21})X_2 - (\gamma_{13}-\gamma_{31})X_3 = 0,\ \ 2I_2 + (\gamma_{12}-\gamma_{21})X_1 - (\gamma_{23}-\gamma_{32})X_3 = 0,$$
$$2I_3 + (\gamma_{13}-\gamma_{31})X_1 + (\gamma_{23}-\gamma_{32})X_2 = 0, \tag{6}$$

Производство энтропии обращается к нулю, т.е. $\sigma = 0$. Это позволяет сделать вывод о том, что соотношение: $\gamma_{12} + \gamma_{21} = 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}$, $\gamma_{13} + \gamma_{31} = 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}$, $\gamma_{23} + \gamma_{32} = 2\sqrt{\gamma_{22}\gamma_{33}}$ (7)

являются необходимые и достаточные условия для того, чтобы производство энтропии было неотрицательно. Более того при выполнении соотношений взаимности Онзагера из (6) следует $I_1 = 0$, $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$. Это свидетельствует о том, что термодинамика Онзагера является термодинамикой обратимых процессов, причем процессов с нулевыми обобщенными потоками. Поэтому она в традиционном смысле является абсурдной.

1. Мамедов М. М. Новая линейная неравновесная термодинамика - предполагаемое научное открытие революционного характера// Москва.- журн. “Естественные и технические науки’’. 2008.-№2.-С.18-19.

Матвеева Инесса Изотовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
e-mail: matveeva@math.nsc.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

Матвеева И.И.

Рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \qquad t > \tau, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ – матрицы с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \qquad B(t+T) \equiv B(t), \qquad T > \tau,$$

$F(t,u,v)$ – вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u, при этом

$$\|F(t,u,v)\| \le q_1 \|u\|^{1+\omega_1} + q_2 \|v\|^{1+\omega_2}, \qquad q_1, q_2, \omega_1, \omega_2 \ge 0.$$

Используя модифицированный функционал Ляпунова - Красовского, предложенный в [1], и опираясь на результаты из работ [2, 3], мы указываем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), получаем оценки экспоненциального убывания решений системы (1) при $t \to \infty$ и находим области притяжения.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (государственные контракты № 02.740.11.0429, № 16.740.11.0127), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (проект № 85, междисциплинарный проект № 107).

1. Демиденко Г.В. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2005. Т. 5, вып. 3. – С. 20-28.
2. Демиденко Г.В. Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений / Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева // Сиб. мат. журн. – 2004. Т. 45, № 6. – С. 1271-1284.
3. Демиденко Г.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах / Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева // Сиб. мат. журн. – 2007. Т. 48, № 5. – С. 1026-1041.

Матвій Олександр Васильович, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного моделювання,
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
Пернай Світлана Анатоліївна, аспірант кафедри математичного моделювання,
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
Черевко Ігор Михайлович, доктор фіз.-мат. наук, декан факультету прикладної математики,
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: i.cherevko@chnu.edu.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ СХЕМ АПРОКСИМАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М.

Розглянемо початкову задачу для системи диференціально-різницевих рівнянь із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_p)), \quad t \in [t_0, T],\ p \ge 1, \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{2}$$

де $x \in R^n$, $0 < \tau_1 < ... < \tau_p = \tau$, $f(t, u_0, ..., u_p)$ – неперервна вектор-функція, визначена для $t \in [t_0, T]$, $u_k \in R^n$, $k = \overline{0, p}$, $\varphi(t) \in C[t_0 - \tau, t_0]$.

Визначимо функції $z_j(t) \in R^n$, $j = \overline{0, m}, m \in N$ як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), ..., z_{l_p}(t)),$$

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}\left(z_{j-1}(t) - z_j(t)\right), \quad j = \overline{1, m},\ t \in [t_0, T], \tag{3}$$

$$z_j(t_0) = \varphi(t_0 - \frac{\tau j}{m}), \quad j = \overline{1, m},\ l_k = \left[\frac{\tau_k m}{\tau}\right]. \tag{4}$$

Теорема 1 [1]. *Нехай функція f задовольняє умову Ліпшица*

$$\left\| f(t, u'_0, ..., u'_p) - f(t, u''_0, ..., u''_p) \right\| \le \sum_{k=0}^{p} L_k \left\| u'_k - u''_k \right\|.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (3)-(4) апроксимує розв'язок початкової задачі (1)-(2) і справджуються співвідношення

$$\left\| x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_j(t) \right\| \to 0, \quad j = \overline{0, m},\ t \in [t_0, T] \text{ при } m \to \infty.$$

У роботі досліджена також задача про наближення розв'язків початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу [2]

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - \sum_{k=0}^{p} A_k(t) x(t - \tau_k) \right] = f(t, x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_p)), \quad t \in [t_0, T]$$

розв'язками задачі Коші апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь.

1. Матвій О.В., Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 2. – С. 208-216.
2. Матвій О.В., Черевко І.М. Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 329-335.

Молчанюк Ирина Владимировна, ,
Одеська державна академія будівництва та архітектури
e-mail: i-molchanyuk@ukr.net

S - ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

Молчанюк И.В.

Пусть поведение объекта описывается следующим дифференциальным включением вида:

$$\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + B(t)U(t) + C(t)V, \qquad x(0) = 0 \tag{1}$$

где $x(t)$ - фазовый вектор, $A(t), B(t), C(t)$ - матрицы соответствующих размерностей, $U(t) \in Conv(R^n)$; $u(t) \in U(t)$ - вектор управления, $v(t) \in R^n$, $v \in V$ - множество "помех", на котором задана характеристическая функция $\mu(\cdot): R^k \to [0,1]$.

Будем считать, что система удовлетворяет некоторым условиям на фиксированном отрезке $[0,T]$. Пусть качество функционирования системы оценивается следующим нечетким критерием:

$$J(u) = H(X(T,u)), \tag{2}$$

где $H(X(T,u)) = \{H(x), x \in X(T,u); H(\cdot): R^n \to R^k\}$ непрерывная возрастающая векторная функция.

Управление $u_*(\cdot) \in U$ назовем S_1 - нечетким оптимальным в задаче (1),(2) и обозначим u_{S_1}, если не существует управление $u(\cdot) \in U$ такое, чтоб была совместна система неравенств $i = 1...k$, из которых, по крайней мере, одно строгое, для всех $\alpha \in [0,1]$

$$\min\left\{h_i^\alpha \middle| h^\alpha \in [H(X(T,u))]^\alpha\right\} < \min\left\{h_i^\alpha \middle| h^\alpha \in [H(X(T,u_*))]^\alpha\right\}.$$

Управление $u_*(\cdot) \in U$ назовем S_2 - нечетким оптимальным в задаче (1),(2) и обозначим u_{S_2}, если не существует управление $u(\cdot) \in U$ такое, что хотя бы для одного вектора $h^* \in [H(X(T,u_*))]^\alpha$ была бы совместна система неравенств $i = 1...k$, из которых, по крайней мере, одно строгое, для всех $\alpha \in [0,1]$ $\min\left\{h_i \middle| h \in [H(X(T,u))]^\alpha\right\} \le h_i, i = 1,..,k$.

Управление $u_*(\cdot) \in U$ назовем S_3 - нечетким оптимальным в задаче (1),(2) и обозначим u_{S_3}, если не существует управление $u(\cdot) \in U$ такое, чтоб была совместна система неравенств $i = 1...k$, из которых, по крайней мере, одно строгое, для всех $\alpha \in [0,1]$

$$\min\left\{h_i \middle| h \in [H(X(T,u))]^\alpha\right\} \le \max\left\{h_i \middle| h \in [H(X(T,u_*))]^\alpha\right\}.$$

В докладе приводятся условия оптимальности S - нечетких управлений.

Мусурівський Віктор Іванович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: victor_musa@ukr.net, victor_musa@i.ua

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ІЗ СКІНЧЕННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Мусурівський В.І.

Нехай [1] на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ випадковий процес $x(t) \in \mathbb{R}^n$ динамічної системи описується диференціальним рівнянням із скінченним запізненням

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x_t, u(t))dt, \tag{1}$$

із крайовими умовами $x_{t_0} = z_0 \in \mathbb{D},\ \xi(t_0) = y_0 \in Y,\ x_{t_1} = z_1 \in \mathbb{D},\ \xi(t_1) = y_1 \in Y$ (2)

де асимтотика розв'язку $x \equiv x(t) \in \mathbb{R}^n$-СВСЗ відносно нульового розв'язку $x(t) \equiv 0,\ \forall t \geq t_0 \geq 0$; $x_t \equiv \{x(t+\theta)\},\ -\tau \leq \theta \leq 0,\ \tau > 0$; $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$- простір Скорохода; $\xi(t)$- неперервний марковський процес; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ - m-мірний вектор керування.

Нехай вимірний за сукупністю змінних функціонал $a: \mathbb{R}_+ \times Y \times \mathbb{D} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, задовольняє умову Ліпшіца для $\forall\, x^1, x^2 \in \mathbb{D}$ рівномірно за всіма іншими аргументами для $\forall t \geq t_0 \geq 0,\ \forall y \in Y$:

$$\left|a(t, y, x^1, u) - a(t, y, x^2, u)\right| \leq \Lambda(\left|x^1 - x^2\right|), \tag{4}$$

і умову рівномірної обмеженості $\sup\limits_{t \geq 0,\, y \in Y} (\left|a(t, y, x, u)\right|) = \alpha < +\infty$. (5)

Обмеження на керування: $u(t) \in U$. (6)

Випадкова внутрішня зміна структури динамічної системи може викликатися марковським процесом [1] $\xi(t)$ зі скінченним числом станів $Y = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ і відомими параметрами $\{q_{ij}\} : q_i = \sum\limits_{j \neq i} q_{ij}$, при цьому

$$\mathbb{P}\{\xi(t+\Delta t) = y_j \,|\, \xi(t) = y_i \neq y_j\} = q_{ij}(t)\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t), \quad i, j = \overline{1, k}. \tag{7}$$

Мінімізується функціонал якості $J = \int_{t_0}^{t_1} \mathsf{E}\{a_0(t, \xi(t), x(t), u(t))\}dt$. (8)

Має місце наступне **твердження** [2]:
Для того, щоби керування *u(t)* і відповідна йому траєкторія *x(t)* були оптимальними, необхідно, щоб існувала ненульова, неперервна вектор-функція $\psi(t)=\{\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \ , \psi_n(t)\}$, яка відповідає $u(t)$ і $x(t)$ за системою Гамільтона:

$$d\psi_i \big/ dt = -\partial H \big/ \partial x_i, \quad i=0,1, \quad ,n, \tag{9}$$

де $H = \sum\limits_{i=0}^{n} \psi_i a_i(t, y, x_t, u)$, і при цьому виконувалися умови:

1. функція Гамільтона $H(t, x(t), \psi(t), u(t))$ як функція аргументу u досягає максимуму в точці $u^0 = u^0(t)$ для $\forall t \in [t_0, t_1]$, тобто
2. $\hat{H}(t, x(t), \psi(t), u^0(t)) = \max\limits_{u \in U} \mathsf{E}\{H(t, x(t), \psi(t), u(t))\} = M(t, x(t), \psi(t))$, (10)

функція $\psi_0(t)$ недодатна.

1. Королюк В.С. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последействием при наличии марковских параметров. Часть I, II / Королюк В.С., Мусуривский В.И., Ясинский В.К. // Проблемы управления и информатики. - 2008. - №1. - С. 16-35, - №3. - С. 5-20.
2. Казаков И. Е. Оптимизация динамических систем случайной структуры / И.Е.Казаков, В.М.Артемьев - Москва: Наука, 1980. - 320 с.

Неймарк Юрий Исаакович, доктор технических наук, профессор,
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: neymark@pmk.unn.ru;
Котельников Игорь Вячеславович, ст. научный сотрудник,
НИИПМК ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: neymark@pmk.unn.ru;
Теклина Лариса Григорьевна, кандидат физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник,
НИИПМК ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: teklina2010@yandex.ru

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ КАК НОВЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СИНТЕЗА СИСТЕМ КВАЗИИНВАРИАНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Неймарк Ю.И., Котельников И.В., Теклина Л.Г.

В докладе представлен новый подход к исследованию и синтезу динамических систем на основе постановки задач исследования и синтеза как проблем распознавания образов и решения их методами интеллектуального анализа данных. Необходимость разработки нового подхода вызвана большой трудоемкостью, а часто и невозможностью решения этих актуальных задач при исследовании и синтезе динамических систем достаточно высокой размерности и с большим числом параметров.

На базе нового подхода создана принципиально новая методика численного исследования конкретных динамических систем, заданных системами обыкновенных дифференциальных уравнений с большим числом параметров [1]. Результат исследования – построение огрубленных фазовых и параметрического портретов, включающих в себя определение всех видов устойчивых движений в системе, их областей притяжения в фазовом пространстве, а также областей в пространстве параметров, при которых существуют исследуемые устойчивые движения. Отметим, что построение параметрического портрета – это и возможность решения задачи робастной устойчивости. С помощью новой методики исследован ряд математических моделей с большим числом параметров, причем исследование зависимости движений в системе от всех параметров моделей проведено впервые. Новая методика реализована в виде комплекса программ, которые могут стать основой для автоматизации процесса исследования.

Успешный опыт создания новой методики позволяет рассчитывать на успех в решении еще одной сложной проблемы: синтез систем управления, которые должны не устранять возникающие ошибки, а предотвращать их, т.е. сделать объект управления невосприимчивым (инвариантным) к внешним воздействиям. В работах последних лет не только доказана возможность существования квазиинвариантного управления, но и установлены условия реализации таких систем, исследованы их функциональные возможности, изучены вопросы синтеза нелинейных систем. Все полученные аналитические результаты стали основой для постановки задачи синтеза как задачи распознавания и построения необходимых решающих правил на базе экспертных оценок [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-00379).

1. Неймарк Ю.И., Котельников И.В., Теклина Л.Г. Новый подход к численному исследованию конкретных динамических систем методами распознавания образов и статистического моделирования // Изв. ВУЗов «Прикладная нелинейная динамика». 2010. Т.18. №2. С.3-15.

2. Неймарк Ю.И. Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного управления. // Автоматика и телемеханика. 2008. № 10. С. 48-56.

Нікітін Анатолій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
nik_tol@rambler.ru

СТАБІЛІЗАЦІЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ІЗ ЗОВНІШНІМИ МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

Нікітін А.В.

Нехай перехідний процес $x \equiv x(t) \in \mathbb{R}^m$ випадкової динамічної системи задано стохастичним диференціальним рівнянням Іто-Скорохода

$$dx = a(t,\xi(t),x,u)dt + b(t,\xi(t),x,u)dw(t) + \int_{\mathbb{Z}} c(t,\xi(t),x,u,z)\tilde{\nu}(dz,dt) \qquad (1)$$

із зовнішніми марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\Big|_{t=t_k} = g(t_k-,\xi\left(t_k-\right),x(t_k-),\eta_k), \qquad (2)$$

і з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \xi(t_0) = y \in \boldsymbol{Y},\ \eta_{k_0} = h \in \boldsymbol{H}, \qquad (3)$$

де $t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in \boldsymbol{N}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$.

Тут вектор $x \equiv x(t) \in \mathbb{R}^m$ – відхилення дійсних значень координат регулюючої m-вимірної величини від його незбуреного значення $x(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$, $u \equiv (t,y,x,h) \in \mathbb{R}^r$ – r-вимірна керуюча дія (керування).

Відмітимо, що випадкова зміна структури динамічної системи для спрощення дослідження викликається шляхом введення в число незалежних змінних m-вимірних коефіцієнтів $a(t,y,x,u), b(t,y,x,u)$, $c(t,y,x,u,z)$ скалярного чистого розривного марковського процесу $\xi(t) \in \boldsymbol{R}^1$, що допускає розклад

$$\boldsymbol{P}\{\xi\left(t+\Delta t\right) \in (\beta,\beta+\Delta\beta) / \xi(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t,\alpha,\beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t), \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{P}\{\xi\left(\tau\right) = \alpha, t < \tau = t + \Delta t / \xi(t) = \alpha\} = 1 - p(t,\alpha)\Delta t + o(\Delta t), \qquad (5)$$

$$\alpha,\beta \in \boldsymbol{Y} = [\eta_1,\eta_2],$$

де $\boldsymbol{P}\{A|B\}$ - умовна ймовірність події A при виконанні події B, $o(\Delta t)$ - нескінченно мала величина відносно Δt, а функції $p(t,\alpha,\beta)$ і $p(t,\alpha)$ припускаємо заданими.

Задача про стабілізацію: Для ДСДР (1) із заданими умовами стрибка фазового вектора $x \in \boldsymbol{R}^m$ і перемиканнями (2) побудуване таке керування $u(t,y,x,h)$, що задовольняє умову $u(t,y,0,h) \equiv 0$, щоб незбурений рух $x(t) \equiv 0$ системи (1)-(3) був асимптотично стійкий за ймовірністю в цілому, тобто при будь-яких початкових умовах з області (3).

1. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
2. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И.Я. Кац – Екатеринбург: УГАПС, 1998. – 222 с.

Осипенко Георгий Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор
Севастопольский институт банковского дела,
e-mail: george.osipenko@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПАМЯТЬЮ

Осипенко Г.С.

Динамика биологических систем обладает естественной памятью. Как правило, состояние биологической системы в последующую единицу времени зависит не только от состояния системы в настоящее время, но также от предыдущих состояний. Изучение такой динамики естественно приводит к уравнению с запаздыванием или с задержкой. Кроме биологических аспектов применения уравнений с запаздыванием имеется чисто математический результат - Теорема Такенса, который подводит базу для применения уравнений с запаздыванием в самом общем виде.

Теорема Такенса. Пусть имеется динамическая система $\Phi(t,x)$ с фазовым пространством M, $dimM=d$. Пусть имеется наблюдаемая скалярная величина

$$u_i = h(\Phi(t_i, x_0)), \quad i \in Z.$$

Построим m-вектора $z_i=(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+m-1})$, тогда в типичном случае (в случае общего положения) при $m \geq 2d+1$ существует отображение $F:R^m \to R$ которое по m наблюдаемым значениям $u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+m-1}$ задает следующее значение u_{i+m}

$$u_{i+m}=F(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+m-1}).$$

Так правило в каждом конкретном случае необходимое число предыдущих значений будет меньше чем 2d+1.

В докладе рассматриваются уравнения с запаздыванием вида

$$x_{i+1} = x_i \frac{a - bx_i - cx_{i-1} - dx_{i-2}}{1 + h\left(x_i + x_{i-1} + x_{i-2}\right)}$$

и

$$x_{i+1} = x_i \exp\left(a - bx_i - cx_{i-1} - dx_{i-2}\right),$$

которые описывают динамику численности (биомассы) некоторых биологических видов
Показано, что динамика данных уравнений является достаточно богатой, рассмотрен сценарий перехода к хаосу. Кроме того, рассмотрен способ моделирования хаотического воздействия внешней среды на описанные выше системы.

Павликов Сергей Владимирович
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,
e-mail: svpavlikov@yandex.ru;

К ЗАДАЧЕ ОБ УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Павликов С. В.

Рассматривается управляемая механическая система с голономными, идеальными, стационарными связями, положение которой определяется обобщенными координатами $q^T=(q_1,q_2,\dots,q_n)$. Движения рассматриваемой системы определяются уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q(t,q_t,\dot q_t), \tag{1}$$

где $Q(t,q_t,\dot q_t)$ -- матрица-столбец размерности $n\times 1$ обобщенных сил, действующих на систему, через q_t обозначена функция, задаваемая для непрерывного отображения $q:R\to R^n$ равенством $q_t=q(t+s), s\le 0$. $Q(t,0,0)\equiv 0$. Тогда система (1) допускает положение равновесия $\dot q=q=0$.

Решается задача о стабилизации положения равновесия $\dot q=q=0$, состоящую в том, чтобы указать управления Q_y, при которых положение равновесия $\dot q=q=0$ будет асимптотически устойчивым. Определим управление в виде:

$$Q_y(t,q_t)=-C(t)q(t)+\int_0^t F(s)q(t-s)ds. \tag{2}$$

Полагаем:

$$M(t)=C(t)-\int_0^t F(s)ds.$$

На основании результатов из [1] получена следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:
1) матрицы C и F являются симметричными размерностей $n\times n$;
2) матрица $M(t)$ является положительно определенной матрицей;
3) матрица $F(s)$ непрерывно дифференцируема, $F(s)\ge 0$, $\dot F(s)\le 0$; 4) $\dot C(t)\le F(t)$; 5) матрица $M(t)$ является равномерно непрерывной при $t\in R^+$.

Тогда управление вида (2) есть стабилизирующее управление, при этом положение равновесия $q=\dot q=0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

1. *Павликов С.В.*Об устойчивости движений эредитарных систем с бесконечным запаздыванием // Доклады Академии наук. -- 2007. -- Т. 416, № 2. -- С. 1--3.

Работа выполнена при финансовой поддержке совета по грантам президента РФ (МД-7549.2010.1).

Панталиенко Людмила Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Национальный университет биоресурсов и природоиспользования Украины
Адрес для переписки: 03041, Киев, ул. Героїв Оборони 15, корп.11, тел. 527-80-91.

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Панталиенко Л.А.

Анализ устойчивости параметрических систем предлагается осуществлять с помощью II метода Ляпунова на конечном промежутке времени. С целью получения численных алгоритмов расчета областей устойчивости множества начальных условий и параметров рассматриваются в структурно-заданном виде. Такой подход позволяет значительно расширить круг исследуемых задач, связанных с проблемой чувствительности.

Для учета возмущающих факторов исследуются системы вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha) + R(x,t,\alpha),\ t \in [t_0, T] \tag{1}$$

для которых вводится понятие внутренней $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$- и внешней $\{D_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$- устойчивости.

Так, для случая параметрической модели

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha)\ ,t \in [t_0, T], \tag{2}$$

невозмущенное решение $x(t,0) = 0$ назовем $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$-устойчивым, если траектории $x(t,\alpha)$ (2) не выходят за пределы допустимого множества $\Phi_t, t \in [t_0, T]$ для начальных условий $x(t_0,\alpha) \in G_0^x$ и произвольных параметров $\alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$.

Согласно распространенным постановкам прикладных задач целесообразно рассматривать совместные динамические ограничения на фазовые координаты и параметры $\Phi_{t,\alpha}$, $t \in [t_0, T]$ и оценивать область $G_0^{x,\alpha}$ начальных условий и параметров системы (2).

В рамках приведенных постановок задач с помощью II метода Ляпунова осуществляется анализ и оценка устойчивости при наличии неизвестных или ограниченных возмущений.

Для линейных параметрических систем

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(t)\alpha + f(t), t \in [t_0, T], \tag{3}$$

разработаны алгоритмы расчета областей практической устойчивости в заданных структурах.

Так, например, условия внешней $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Gamma_t, t_0, T\}$- устойчивости системы (3) при неизвестных возмущениях можно записать так:

$$c^2 \le \max_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1,2,\dots,N} \frac{(1 - a_s(t))^2}{l_s^*(t) Q_1(t) l_s(t) + m_s^* B_\alpha^{-1} m_s + 2 l_s^*(t) G_1(t) B_\alpha^{-1} m_s}.$$

Перевалова Татьяна Владимировна ассистент кафедры математической физики, математико-механического факультета, *Уральский государственный университет им А.М.Горького, Екатеринбург, Россия*
e-mail: tatyana.perevalova@usu.ru
Ряшко Лев Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики, математико-механического факультета, *Уральский государственный университет им А.М.Горького, Екатерибург, Россия,*
e-mail: lev.ryashko@usu.ru

СТОХАСТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ И БИФУРКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б.

Рассматриваются системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dx = f(x)dt + \varepsilon\sigma(x)dw,$$

где $f(x)$ – функция задающая динамику системы, w – стандартный винеровский процесс, $\sigma(x)$ – достаточно гладкая матричная функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы, ε – интенсивность вносимого шума. Стохастическим аттрактором является состояние системы, имеющее устойчивое стационарное вероятностное распределение.

Полное вероятностное описание поведения траекторий стохастической системы дается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова. Для общих одномерных систем и двумерных систем Хопфа найдено его решения и проведен анализ этого решения в зависимости от значений вносимого шума. В ходе исследований было обнаружено принципиальное различие в характере индуцированных шумом переходов и стохастических бифуркаций между аддитивными и мультипликативными случайными возмущениями. Увеличение аддитивного шума приводит лишь к размыванию случайных траекторий вокруг детерминированного аттрактора. В то время как увеличение интенсивности мультипликативного шума ведет к качественному изменению характера поведения системы.

На примерах линейной и квадратичной систем исследован эффект сдвига стохастического аттрактора под действием мультипликативного шума, получена оценка этого сдвига и проведен его параметрический анализ. Для одномерной кубической и двумерных систем Хопфа воздействие параметрического шума приводит к качественному изменению формы графика функции плотности распределения. На основании проведенных параметрических исследований построены бифуркационные диаграммы стохастических систем. При фиксированном значении параметра системы увеличение значения параметрического шума приводит к перераспределению случайных траекторий системы из окрестности устойчивого аттрактора в окрестность неустойчивого. Подобное поведение интерпретируется как обратная стохастическая бифуркация, индуцированная увеличением параметрического шума.

Работа частично поддержана грантами РФФИ №09-01-00026, 10-01-96022урал, ФЦП 02.740.11.0202.

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированые шумом переходы. – М: Мир, 1987. – 398 с.
2. Arnold. L. Random dynamical systems. // Springer, 1998. 585 P.

Петришин Роман Іванович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Чернівецький національний університет імені Юря Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: r.petryshyn@chnu.edu.ua

ПРО МАТРИЦАНТ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Петришин Р.І.

Нехай задано задачу Коші для системи з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+f(\varphi,\tau),\tau\neq\tau_j,\quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j}=\varepsilon F(\varphi,\tau_j),\quad \varphi|_{\tau=t_0}=\psi. \qquad (1)$$

Тут $\varphi\in R^m$, $\psi\in R^m, t_0\in R$, $(0,\varepsilon_0]\ni\varepsilon$ -- малий параметр, $\tau\in R$, τ_j -- моменти імпульсної дії, $j\in Z$, $\tau_{j+1}=\tau_j+\varepsilon\theta(\tau_j)$, $\theta(\tau)$ -- гладка функція, $\theta_1\le\theta(\tau)\le\theta_2$, $\|\omega(\tau)\|\le\sigma_1$, $\theta_1,\theta_2,\sigma_1$ -- деякі додатні сталі.

Далі розглядається система зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{d\tau}=(a(\tau)+A(\varphi,\tau))x,\tau\neq\tau_j,\quad \Delta x|_{\tau=\tau_j}=\varepsilon(b_j+B(\varphi,\tau_j))x, \qquad (2)$$

в якій $\varphi=\varphi_{t_0}^{\tau}(\psi,\varepsilon)$ --- розв'язок задачі Коші (1), $x\in R^n$.

Припустимо, що функції, які визначають праві частини (1) і (2), l раз неперервно диференційовані в області $(\varphi,\tau)\in R^m\times R$, обмежені сталою σ_1, 2π-періодичні по кожній із координат φ_ν, $\nu=\overline{1,m}$, вектора φ.

Припустимо також, що матрицант $Q_t^\tau(\varepsilon)$, $Q_t^t(\varepsilon)=E$, лінійної імпульсної системи

$$\frac{dx}{d\tau}=a(\tau)x,\quad \tau\neq\tau_j,\quad \Delta x|_{\tau=\tau_j}=\varepsilon b_j x$$

задовольняє нерівність

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\|\le K_0e^{-\gamma_0(\tau-t)},\quad \tau\ge t,\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],$$

з деякими сталими $K_0\ge 1$ і $\gamma_0>0$, не залежними від ε.

Нехай $\theta(\tau)\in C_R^l$, $\omega(\tau)\in C_R^l, l\ge m$, і

$$W_l(\tau)=\left(\frac{d^g[\theta(\tau)\omega_\nu(\tau)]}{d\tau^g}\right)_{g,\nu=1}^{l,m},\ \|(W_l^T(\tau)W_l(\tau))^{-1}W_l^T(\tau)\|\le\sigma_1,$$

$$|\theta'(\tau)|\le\theta_2,\quad \|\omega'(\tau)\|\le\sigma_1,\quad \tau\in R.$$

У статті [1] встановлено експоненціальну оцінку матрицанта $\Omega_t^\tau(\psi,t_0,\varepsilon)$ лінійної системи (2) і оцінки його частинних похідних по малому параметру ε.

У данному повідомленні при досить малому $\varepsilon_0>0$ отримана оцінка

$$\left\|D_\psi^r\Omega_t^\tau(\psi,t_0,\varepsilon)\right\|\le K_{r+1}\varepsilon^\alpha e^{-\gamma_{r+1}(\tau-t)+\mu r|t-t_0|}$$

з деякими додатними сталими K_{r+1}, $\gamma_{l+1}<\gamma_l<...<\gamma_1<\gamma_0$, $\mu<\dfrac{\gamma_1}{2l}$ і α для всіх $\tau\ge t\in R$, $t_0\in R$, $\psi\in R^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і $1\le r\le l$.

1. *Петришин Р.І., Сопронюк Т. М.* Про матрицант одної лінійної системи з імпульсною дією // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. --- Ужгород: УжНУ, 2010. --- Вип. 21.---С. 102-118.

Пилпани Юлия Юрьевна, аспирантка 3 курса, факультет математический,
Донецкий национальный университет, Донецк, Украина,
e-mail: juliet_don@rambler.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИ – ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Пилпани Ю. Ю.

В докладе рассмотрена механическая модель движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемых уравнениями класса Кирхгофа – Пуассона

$$A\dot{\overline{\omega}} = A\overline{\omega}\times\overline{\omega} + \overline{\omega}\times\left(B\overline{\nu} - \overline{\lambda}\right) + \overline{\nu}\times\left(C\overline{\nu} - \overline{s}\right) = \overline{0}\,, \qquad (1)$$

$$\dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu}\times\overline{\omega}\,, \qquad (2)$$

где $\overline{\omega}$ - угловая скорость гиростата; $\overline{\nu}$ - единичный вектор вертикали; $\overline{\lambda}$ - гиростатический момент; $\overline{s}$ - вектор обобщенного центра масс; A - тензор инерции гиростата; B и C - постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными означает относительную производную по времени.

Исследованы условия существования асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата в случае, когда предельное движение будет регулярной прецессией уравнений (1) и (2)

$$\overline{\omega} = n\overline{a} + m\overline{\nu} \qquad (3)$$

Условия прецессий (3) гиростата в случае с произвольным распределением масс указаны в работе [1]. В докладе изучены асимптотически – прецессионные движения гиростата с помощью первого метода Ляпунова [2]. Условия из [1] использованы для варианта, когда эллипсоид инерции в неподвижной точке является сферой.

Следуя методике [3] записаны уравнения в вариациях и на основании первых интегралов проведена их редукция к уравнению Хилла: $\ddot{x} + p(t)x = 0$, где $p(t)$ - периодическая функция времени. Применено достаточное условие Ляпунова $p(t) \le 0$ существования положительного характеристичного числа решения данного уравнения. Найдены условия на параметры задачи, при выполнении которых движение гиростата будет асимптотически – прецессионным. Предельным движением служит регулярная прецессия (3).

1. Горр Г. В., Курганский Н. В. О регулярной прецессии относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 16 - 20.

2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. В 5 т. – М.: Изд – во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7 -263.

3. Горр Г. В., Думбай Д. И. Об асимптотически – прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26 (I). – С. 20 -28.

Пироженко Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт технической механики НАНУ и НКАУ, Днепропетровск, Украина,
e-mail: alex.pirozhenko@mail.ru;
Ящук Алёна Викторовна, аспирантка,
Институт технической механики НАНУ и НКАУ, Днепропетровск, Украина,
e-mail: alena.svyat@mail.ru;
Меньков Егор Владимирович, студент 5 курса, механико-математический факультет,
ДНУ имени О. Гончара
e-mail: menkov89@rambler.ru

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТИ ФИНИТНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Пироженко А.В., Меньков Е.В., Ящук А.В.

Исследования явления детерминированного хаоса в рамках задач классической механики абсолютно твердого тела представляют особую привлекательность, поскольку позволяют строить достаточно ясные образы явления. Под хаотической траекторией будем понимать траекторию движения, в которой самое малое дополнительное воздействие приводит к качественным изменениям в траектории. Ключевым условием появления хаотической траектории является наличие среди траекторий так называемых сепаратрис – разделителей движений – разделяющих качественно отличные режимы движения. Только при условиях идеального математического моделирования сепаратриса является отдельной траекторией. В других же случаях, она представляет собой некоторую область фазового пространства, где траектории движения приобретают особую чувствительность к малейшим воздействиям. Таким образом, можно сказать, что хаотическая траектория механических систем – это траектория, которая пересекает множество сепаратрис. Чувствительность к внешним воздействиям приводит к тому, что хаотическая траектория на длительных интервалах времени становится непредсказуемой (случайной). При учете в динамике систем диссипативных сил одним из основных проявлений случайного характера хаотических траекторий является случайная синхронизация движений, или случайность финитных (предельных) движений.

В докладе на примерах простых механических систем, а именно, модели движения орбитального маятника и модели выпадения грани прямоугольника, рассматривается задача вероятностного описания финитных движений. Приводятся предварительные результаты исследований, и обсуждается постановка задач определения вероятности реализации тех или иных финитных движений как задач теоретической механики.

Полетаев Г. С.,
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

КРИТЕРИЙ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ПАРНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОЕКТОРАМИ

Полетаев Г. С.

Рассматриваются парные уравнения с неизвестной матрицей $X \in R_{n\times n}$ и проекторами:

$$\begin{cases} [A_1X]^- = C^-, \\ [A_2X]^+ = B^+. \end{cases} \tag{1}$$

С их помощью бывает возможно моделировать взаимосвязи известных и неизвестных величин в теоретических и прикладных вопросах. К (1) приводят некоторые новые задачи механики. Например,- для двух разных совокупностей тел (о неизвестных силах, вызывающих, в некоторых точках, заданные прогибы и др.). Теория уравнений (1) связана, в частности, с теорией парных и других интегральных уравнений типа свертки. В сериях постановок все упомянутые парные уравнения допускают единую трактовку в терминах теории парных уравнений (уравнений– моделей) в кольцах с факторизационными парами [1-3].

Изучается связь решений уравнений (1) с произвольной и равной единичной матрице правыми частями. Через $R_{n\times n}$ обозначено кольцо всех вещественных числовых квадратных матриц размера $n\times n$, $n \ge 2$, $n \in N$ с подкольцами $R^+_{n\times n}$, $R^-_{n\times n}$, $R^0_{n\times n}$ нижних, верхних треугольных и диагональных матриц, соответственно. Установлена следующая

Теорема. Пусть матрицы-коэффициенты $A_1, A_2 \in R_{n\times n}$, $n \ge 2$, $n \in N$, и существует матрица - решение $X_E \in R_{n\times n}$ уравнения (1) с правой частью E, где E - единичная матрица. Тогда для того, чтобы это уравнение (1) при любой правой части $C^- \in R^-_{n\times n}$, $B^+ \in R^+_{n\times n}$ имело решение $X \in R_{n\times n}$, представимое через матрицы X_E, A_1, A_2, C^-, B^+ формулой:

$$X = X_E\{[(A_2X_E)^{-1}B^+]^+ + [(A_1X_E)^{-1}C^-]_-\}, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы X_E, A_1, A_2 были неособенными, и выполнялось условие:

$$[(A_2X_E)^{-1}B^+]^0 = [(A_1X_E)^{-1}C^-]^0. \tag{3}$$

Знаки «+,–,0» в (1)-(3) указывают на применение соответствующих проекторов или на принадлежность соответствующим подкольцам матриц.

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.//Теор. и прикл. матем.–1958.–Вып. 1.–Львов, 1958. – С. 58 – 81.
2. Poletaev G.S.//Operator Theory: Adv. and Appl., Birkh. Verlag Basel/Switz. - 2009.-Vol. 191.- P. 479-484.
3. McNabb A., Schumitzky A. // J. Funct. Anal. – 1972. –v. 9, № 3. – P. 262 – 295.

Поліщук Олександр Дмитрович, кандидат фіз.-мат. наук, ст.наук.співр.,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України,
e-mail: od_polishchuk@mail.ru, dept25@iapmm.lviv.ua

КОМПЛЕКСНЕ ОЦІНЮВАННЯ СТАНУ ТА ЯКОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Поліщук О.Д.

Реальні складні динамічні системи (СДС) відрізняються типом, призначенням, способами опису, законами функціонування та потребують, відповідно, різних підходів до оцінювання свого стану та поведінки. Одним із прикладів таких систем, на якому можна проілюструвати принаймі деякі з них, є залізнична транспортна система України (ЗТСУ). По функціональному призначенню її природно поділити на чотири основні підсистеми: колійне господарство (понад 22 тис. км залізничних колій), станційне господарство (1684 станції), рухомий склад (близько 26 тис. вантажних та пасажирських вагонів та 6 тис. рушійних засобів), система управління та інформаційного забезпечення (СУІЗ), яка забезпечує безперебійне функціонування трьох попередніх систем. Пераховані підсистеми самі є прикладами СДС з різною динамікою розвитку та іншими особливостями і у своїй сукупності складають єдиний промислово-транспортний комплекс, який щорічно забезпечує перевезення понад 85% вантажів та біля 55% пасажирів. Подальшу структуризацію основних підсистем Укрзалізниці (УЗ) доцільно здійснювати за принципом територіально-ієрархічної будови СУІЗ (УЗ сьогодні налічує 6 залізниць, що об'єднують 27 дирекцій залізничних перевезень; останні, у свою чергу, поділяються на полігони дистанцій колії і т.д.). Це дає можливість співвіднести оцінювані елементи з підрозділами УЗ, які відповідають за їхній стан, обслуговування та ефективність роботи.

В залежності від типу системи чи її елемента ми використовуємо такі підходи до їхнього оцінювання:

1) оцінка стану системи в біжучий момент; їй підлягають, в основному, елементи матеріальної бази (колія, станційна інфраструктура, одиниці рухомого складу);
2) оцінка якості функціонування системи протягом певного періоду, наприклад, доби чи під час виконання окремих функцій; їй підлягає, зокрема, ефективність роботи станційного господарства чи окремих його служб, дотримання встановленого графіка руху поїздів, якість виконання ремонтних робіт тощо;
3) оцінка стану елементів однієї з підсистем, наприклад, ділянок колії, шляхом аналізу якості функціонування безпосередньо пов'язаних з ними елементів іншої, зокрема, руху потягів;
4) оцінка динаміки поведінки системи, як результат відстеження її стану чи якості функціонування протягом певного, достатньо тривалого періоду часу; їй підлягає, наприклад, стан колії чи рухомого складу між плановими ремонтами, ефективність роботи станцій, дотримання встановленого графіка руху тощо;
5) на основі знання передісторії попередніх оцінювань системи, її підсистем та елементів побудова короткострокових прогнозів наступних оцінок з метою завчасного запобігання негативним тенденціям розвитку, зокрема, аварійним ситуаціям.

Для кожного з вищезгаданих підходів ми використовуємо два рівні оцінювання: локальний та агрегований. На першому проводиться оцінка кожного елемента системи за набором його складових, їхніх характеристик, критеріїв та параметрів у неперервній, дискретній та прийнятій на залізниці понятійній шкалах. Незадовільна оцінка по одному з параметрів чи критеріїв у нашому випадку може означати потенційну загрозу аварії чи катастрофи. Тому агреговане оцінювання не здійснюється до виявлення та усунення причини отримання таких оцінок. Результати останнього шляхом низхідного аналізу за допомогою спеціально розроблених засобів дозволяє оперативно відстежити «найслабші» підсистеми та елементи системи.

Потапов Алексей Алексеевич, к.ф.-м.н., д.х.н., профессор,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия,
e-mail: aleksey.potapov.icc@gmail.com;
Демидюк Алексей Игоревич, аспирант,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия,
e-mail: demalexx@gmail.com

ДИНАМИЧЕСКАЯ ДИПОЛЬ-ОБОЛОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ СИСТЕМ

Потапов А.А., Демидюк А.И.

Предлагается для обсуждения динамическая диполь-оболочечная модель водородоподобных структур, которая является развитием планетарной модели Резерфорда-Бора в соответствии с полуклассической теорией Бора атома водорода [1]. Показана применимость планетарной модели атома водорода к атомам I группы таблицы Менделеева в основном и возбуждённом состоянии, а также к многозарядным катионам. Сведение многочастичной (многоэлектронной) задачи водородоподобных структур основано на приближении жестких недеформируемых оболочек и применении теоремы Гаусса, в соответствии с которой атомы I группы принимаются как изоморфные атому водорода [2].

В качестве исходного для анализа уравнения принимается дифференциальное уравнение движения «частицы на окружности». Отличительной особенностью его в отношении к атомам щелочных металлов является гипотеза эффективного заряда q остова атома $q = e\sigma$, где σ – константа экранирования. Отличие заряда q остова от единичного заряда e является причиной перехода электронной орбиты от круговой к эллиптической. В рамках данной модели определены потенциальные функции атомов первой группы таблицы Менделеева с характерным для них экстремумом, которому соответствует энергия связи валентного электрона с остовом атома. Особенностью данного класса функций является то, что они не требуют введения подгоночных параметров. Построены компьютерные модели потенциальных функций атомов I группы. Дается обоснование возможности сведения многочастичной задачи атомов к двухчастичной. Установлено, что причиной чрезвычайно высокой химической активности атомов с одним валентным электроном является их дипольная структура. Выдвинута гипотеза природы и механизма образования дискретного оптического спектра водородоподобных атомов. Исследован эффект захвата валентного электрона.

В рамках диполь-оболочечной модели атомов с целью исследования их электронного строения и динамического поведения было выполнено компьютерное моделирование. Для этого была создана программа, которая предназначена для выполнения численного интегрирования, используя дифференциальные уравнения движения тела в поле центральных сил. Численный эксперимент подтвердил корректность диполь-оболочечной модели, в том числе достоверность гипотезы круговых/эллиптических орбит. Согласие получено для всех водородоподобных систем – атома водорода, водородоподобных катионов, и атомов I группы таблицы Менделеева в основном и возбуждённом состоянии. Данный факт может служить убедительным доказательством правомерности применимости планетарной модели к атомам с одним валентным электроном.

1. Шпольский Э.В. Атомная физика. т. 1. // М.: Наука. 1963.
2. Потапов А.А. Электронное строение атомов // М.-Ижевск: Изд-во РХД. 2009

Родюков Фёдор Фёдорович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия,
e-mail: frodyukov@gmail.com

ШАГ НАЗАД, ДВА ШАГА ВПЕРЁД В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И В ЭЛЕКТРОМЕХАНИКЕ

Родюков Ф.Ф.

Формализм классической механики исходит из законов и определений, сформулированных для одного тела. То есть – это механика одного тела. Законы же и определения в электромеханике исходят первоначально из взаимного влияния друг на друга двух тел (катушек, электрических контуров). Но при математическом моделировании движений этих тел берётся формализм уравнений Лагранжа из классической механики, т.е. аппарат для описания движения одного тела. Это противоречие приводит к тому, что при написании уравнений в электромеханике искусственно увеличивается размерность фазового пространства переменных. Естественно, что эти уравнения неадекватно описывают физические процессы в электромеханических системах (см. монографию автора [1]).

В [1] для выхода из парадоксального положения новые (корректные по отношению к основным законам механики) уравнения электромеханических систем получались из старых с помощью как физических, так и логических рассуждений. При этом были использованы новые физические переменные с размерностью **кулон**. Автор теперь называет их **магнитонами** – источниками магнитных полей.

Корректные уравнения оказались вполне пригодными для устранения парадоксов существующей теории электромеханических систем. На их основе была получена математическая модель большой электроэнергетической системы. Она качественно правильно описывает динамику и условия устойчивости реальных аналогов таких систем.

Но корректные уравнения из [1] не могут быть выведены непосредственно из известных формализмов классической механики. Поэтому в конце этой монографии поставлен вопрос, ради которого, по существу, она и была написана: **каким должен быть некий новый формализм получения математических моделей в электромеханике и в теории электромагнитного поля.**

Этот формализм был назван уравнениями Лагранжа в форме Ньютона. В нём сделан шаг назад к формулировке самим Ньютоном второго закона механики через **импульс тела (p).** В электромеханике этому соответствует формулировка Фарадея закона электромагнитной индукции через аналог импульса –- **потокосцепление.** В новом формализме и диссипативная функция и потенциальная энергия тоже используют в качестве обобщённой скорости импульс и потокосцепление. При этом вводится дополнительный **закон электромагнитной индукции для вращающегося трансформатора**.

Если в дополнение к **электрическому заряду и току** ввести **магнитон и ток магнитного смещения** (производная по времени от магнитона), то уравнения Максвелла полностью симметризируются. Такая операция уже проделана: симметричные уравнения Максвелла приведены в Википедии (http://ru.wikipedia.org/wiki/Монопль).

Так шаг назад к старым формулировкам основных законов Ньютона и Фарадея позволил сделать два шага вперёд в теории эктромеханических систем и в теории полей.

1. Родюков Ф.Ф. Математическая модель большой электроэнергетической системы.

СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. – 153 с.

Романчук Катерина Геннадіївна, аспірант,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна,
E-mail: c.romanchuk@mail.ru;
Стефанишин Дмитро Володимирович, доктор техн. наук, пров. н. с.,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна,
E-mail: dvstefanyshyn@yahoo.com

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДМОВОСТІЙКОСТІ СИСТЕМИ З АВТОМАТИЧНИМ РЕГУЛЮВАННЯМ

Романчук К.Г., Стефанишин Д.В.

З метою забезпечення відмовостійкості систем в останній час широко застосовують автоматичні засоби контролю та регулювання. При цьому вже зафіксовано ряд аварій, зокрема на гідроенергетичних об'єктах, які безпосередньо були пов'язані з відмовами автоматики.

Дослідження проводилося на прикладі аварії на ГАЕС Taum Sauk, що відбулася 14.12.2005 р. в США (штат Міссурі). Було встановлено, що причиною руйнування дамби огородження верхового басейну ГАЕС було його переповнення внаслідок збою в комп'ютерній програмі системи автоматичного регулювання рівня води в басейні [1].

Розглядалася відмовостійкість системи $\mathbf{S}_{u,a} = \{s_u, s_a\}$ у складі огороджувальної дамби верхового басейну (підсистема s_u) та підсистеми автоматичного регулювання рівня (s_a). Покладалося, що аварія на ГАЕС могла б не відбутися при облаштуванні аварійного водозливу. Відмова останнього моделювалася умовою C, за якої ймовірність $P(s_{u,C})$ руйнування дамби при відмові автоматики за відсутності водозливу приймалася рівною одиниці.

Показано, що ймовірність відмови системи $\mathbf{S}_{u,a}$ в загальному випадку буде:

$$P(\mathbf{S}_{u,a}) = P(s_u)\cdot\left(1 - P(s_a)\right) + \frac{P(s_a)^2 \cdot P(s_{u,C})}{P(s_a) + P(s_{u,C})},$$

де $P(s_u)$ – ймовірність незалежної відмови підсистеми s_u; $P(s_a)$ – ймовірність відмови s_a.

а) б)

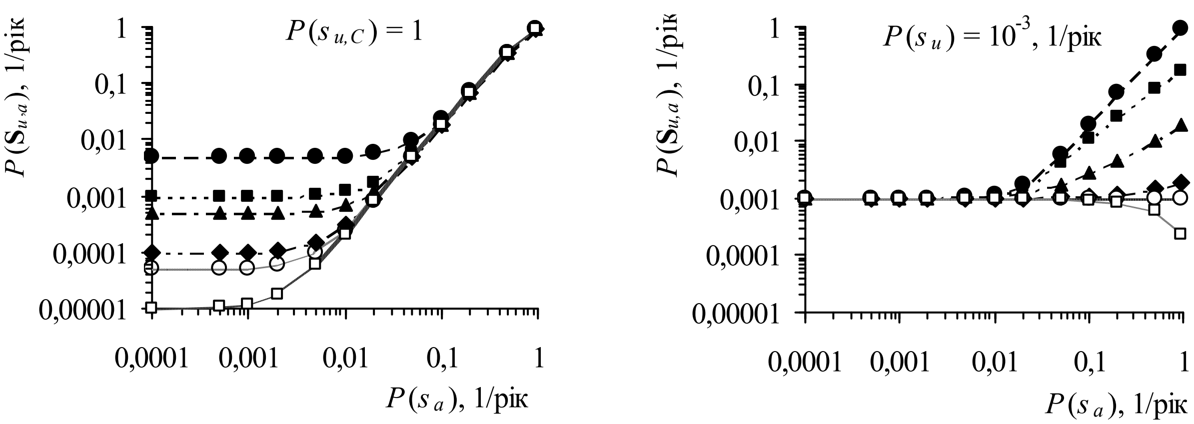


Рис. 1. Залежність $P(\mathbf{S}_{u,a})$ від $P(s_a)$ при різних значеннях $P(s_u)$ (а) та $P(s_{u,C})$ (б)

1. http://www.ferc.gov/industries/hydropower/safety/projects/taum-sauk/staff-rpt.asp. Taum Sauk Pumped Storage Project. Incident Description. FERC Staff Report, April 28, 2006.

Савчин Владимир Михайлович Д.ф.м.н.
Российский Университет дружбы народов, Москва, Россия,
e-mail: vsavchin@yandex.ru;
Колесникова Ирина Анатольевна, К.ф.м.н.,
Российский Университет дружбы народов, Москва, Россия,
e-mail: ikolesnikova@sci.pfu.edu.ru

VARIATIONAL ANALYSIS OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

Савчин В.М., Колесникова И.А.

The lecture is devoted to the problem of existence of solutions of the inverse problems of the calculus of variations – variational principles – for some classes of differential-difference equations. Using methods of non-linear functional analysis there are found conditions of variationality for a large classe of such equations with partial derivatives. Methods of constructive determination of variational factors are worked out.

A special attention is paid to the following differential-difference operator equation

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} P_\lambda(t) u_t(t+\lambda\tau) + Q(t, u(t+\lambda\tau)) = 0, \qquad u \in D(N), t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Here $P_\lambda : U_1 \to V_1 (\lambda = -1, 0, 1)$ are linear operators depending on t. $Q : [t_0 - \tau, t_1 + \tau] \times U_1^3 \to V_1$ is in general a nonlinear operator; $N : D(N) \subseteq U \to V; U = C^1([t_0 - \tau, t_1 + \tau]; U_1)$, $V = C([t_0 - \tau, t_1 + \tau]; V_1)$, where U_1, V_1 are real normed linear spaces, $U_1 \subseteq V_1$; $D(N) = \{u \in U : u(t) = \varphi_1(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], u(t) = \varphi_2(t), t \in [t_1, t_1 + \tau]\}$, where $\varphi_i, (i = 1, 2)$ are given functions.

We shall assume that at every point $u \in D(N)$ there exists the Gâteaux derivative N'_u of N defined by the formula $\frac{d}{d\varepsilon} N(u + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = \delta N(u, h) = N'_u h.$

Let us consider the bilinear form

$$\Phi(\cdot,\cdot) \equiv \int_{t_0}^{t_1} lt;\cdot,\cdot gt; dt : V \times U \to \mathbb{R}. \qquad (2)$$

We denote by K^* the operator adjoint to K.

Theorem 1. If $D_t^* = -D_t$ on the set $D(N'_u)$, then for the existence of the direct variational formulation for equation (1) on the set $D(N)$ relative to the given bilinear form (2) it is necessary and sufficient that the following conditions hold on the set $D(N'_u)$:

$$P_{-\lambda} + P_\lambda^* |_{t \to t - \lambda\tau} = 0, \qquad \partial P_\lambda^* \partial t |_{t \to t-\lambda\tau} + Q'_{u(t-\lambda\tau)} - Q'_{u(t+\lambda\tau)}{}^* |_{t \to t-\lambda\tau} = 0,$$
$$\lambda = -1, 0, 1, \forall u \in D(N), \forall t \in (t_0, t_1).$$

1. *Filippov V.M., Savchin V.M., Shorokhov S.G.* Variational principles for nonpotential operators // Journal Math. Sci.--1994. -- **68**, в•J 3. -- P. 275-398.

2. *Kolesnikova I.A., Popov A.M., Savchin V.M.* On variational formulations for functional differential equations // Journal of Function Spaces and Applications.--2007.-- **5**, в•J 1. P. 89-101.

Сасонкіна Марія Сергіївна Аспірант
ОНУ ім. І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
e-mail: masonmas@gmail.com;
Пічкур Володимир Володимирович, Д.ф.м.н.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: vpichkur@gmail.com

ПРО ПРАКТИЧНУ СТІЙКОСТЬ ДИСКРЕТНИХ ВКЛЮЧЕНЬ САСОНКІНА М. С, ПІЧКУР В. В. РОЗГЛЯНЕМО ДИСКРЕТНЕ ВКЛЮЧЕННЯ ВИГЛЯДУ

Сасонкіна М.С. Пічкур В.В.

$$x(k+1) \in f_k(x(k)), k \in [0, N], \qquad (1)$$

де $f_k : D \to comp(D)$ -- багатозначні відображення, які визначені в області $D \subset \mathbb{R}^n$, $k \in [0, N-1]$. В роботі обгрунтовані твердження про неперервну залежність розв'язків включення (1) від початкових умов в залежності від класу відображень, до яких належить права частина включення (1). У випадку, якщо відображення f_k задовольняють умові Ліпшиця на D, то для розв'язків включення (1) має місце багатозначний аналог умови Ліпшиця за початковими умовами.

Нехай $f_k : D \to comp(D)$ вЂ“- відкрите напівнеперервне зверху багатозначне відображення, яке визначене в області $D \subset \mathbb{R}^n$, $G_0 \in comp(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(k) \in comp(\mathbb{R}^n)$ -- множина фазових обмежень, $0 \in int\Phi(k)$, $0 \in G_0$, $k \in [0, N]$. Нульовий розв'язок включення (1) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ - стійким, якщо для довільного $x_0 \in G_0$ кожен розв'язок $x(k, x_0)$ дискретного включення (1) належить $\Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$. Позначимо G_* множину всіх точок $x_0 \in D$ таких, що кожен розв'язок $x(k, x_0) \in \Phi(k)$, $k \in [0, N]$. Можна показати, що G_* є компактом.

Теорема . Точка $x_0 \in \partial G_*$ тоді і тільки тоді, коли будь- який розв'язок дискретного включення (1) $x(s, x_0) \in \Phi(s)$, $s \in [0, N]$ і існує таке $k \in [0, N]$ і такий розввЂ™язок $x(k, x_0)$, що $x(k, x_0) \in \partial\Phi(k)$.

Розглянемо лінійне дискретне включення

$$x(k+1) \in A_k x(k) + U(k),$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, A_k -- невироджена матриця розмірності $n \times n$, $U(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$, $0 \in intG_*$. Позначимо $\Theta_k = A_0 A_1 \cdots A_{k-1}$, $\Omega(k) = U(k-1) + \sum_{i=0}^{k-2} A_{i+1} U(i)$. Можна показати, що в цьому випадку $G_* \in conv(\mathbb{R}^n)$. Опорна функція множини G_* має вигляд

$$c(G_*, \xi) = \overline{co} \min_{k \in [0,N]} \left(c\left(\Phi(k), \left(\Theta^T(k) \right)^{-1} \xi \right) - c\left(\Omega(k), \left(\Theta^T(k) \right)^{-1} \xi \right) \right), \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Функціонал Мінковського для множини G_* записується так

$$m_*(x) = \max_{k \in [0,N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle \Theta_k x, \psi \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - c(\Omega(k), \psi)}$$

де S - одинична сфера в $\mathbb{R}^n$.

Седова Наталья Олеговна
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,
e-mail: nata-sedova@yandex.ru, sedovano@ulsu.ru;

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ВОЗМУЩЁННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Седова Н. О.

Рассмотрим управляемую систему, аффинную по управлению, описываемую функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) + p(t, x_t, u) + g(t, x_t)u, \qquad (1)$$

где $t \in R^+ = [0, +\infty)$, $\dot{x}(t)$ -- правосторонняя производная функции x в точке t, $x(t)$ -- вектор n-мерного действительного пространства R^n с нормой $|\cdot|$, x_t -- элемент (банахова) пространства $C(n) = C([-r, 0], R^n)$ с супремум-нормой $|\cdot|$, определяемый формулой $x_t(s) = x(t+s)$ для $s \in [-r, 0]$, $r > 0$ -- величина запаздывания, $u \in R^m$ ($m \leqslant n$) -- вектор управлений, $f : R^+ \times C(n) \to R^n$, $p : R^+ \times C(n) \times R^m \to R^n$ и $g : R^+ \times C(n) \to R^{n\times m}$ -- заданные функционалы.

Предполагается, что управление строится в виде непрерывной по состоянию обратной связи, и любое допустимое управления обеспечивает существование для каждой начальной точки единственного непродолжимого решения, определённого на некотором интервале (при этом ограниченные решения бесконечно продолжимы вправо). Кроме того, $f(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$, так что невозмущённая система при отсутствии управления, т.е. $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$, допускает нулевое решение. Рассматривается задача о построении управления, стабилизирующего начало координат возмущённой системы (1), в случае когда выполняется одно из следующих условий:

1) для невозмущённой системы без управления $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво и известен классический функционал Ляпунова (задача Ляпуновского синтеза [2]);

2) для невозмущённой управляемой системы $\dot{x}(t) = f(t, x_t) + g(t, x_t)u$ известен контролирующий функционал [1].

При некоторых ограничениях на функционал $p(t, x_t, u)$ получены достаточные условия разрешимости указанной задачи и построены соответствующие непрерывные законы управления в терминах вспомогательных функционалов для невозмущённой системы. При этом, в зависимости от свойств возмущения, либо начало координат для возмущённой системы оказывается равномерно притягивающим, либо обеспечивается <<практическая устойчивость>>, то есть решения возмущённой системы (1) равномерно предельно ограничены, причём за счёт выбора параметров управления граница может быть сделана произвольно малой.

1. *Седова Н.О.* Контролирующие функционалы в задаче стабилизации систем с запаздыванием // Проблемы управления -- 2008. -- No 3. -- С. 23--29.
2. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.--Ижевск: НИЦ <<Регулярная и хаотическая динамика>>, Институт компьютерных исследований, 2009.

Семенов Віктор Вікторович, аспірант
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: hunt.semen@gmail.com

РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ОПУКЛИХ МНОЖИНАХ

Семенов В.В.

Останні десятиліття характеризуються швидким розвитком теорії вибору й прийняття рішень при наявності багатьох критеріїв. Векторні (багатокритеріальні) задачі оптимізації, які при цьому виникають, широко використовуються як математичні моделі формування й пошуку варіантів рішень в економіці, техніці, соціальній сфері й інших областях.

Нехай дійсний простір F^{ℓ} частково впорядкований замкненим опуклим гострим конусом K, $K^* = \left\{ y^* \in F^* : \left\langle y^*, y \right\rangle \geq 0 \ \forall y \in K \right\}$ – спряжений до K конус.

Розглянемо задачу векторної оптимізації:

$$\min \left\{ f(x) \mid x \in X \right\}, \tag{1}$$

де $X \subseteq Z^n \subset R^n$, $X \neq \varnothing$, $|X| < \infty$, f – векторна функція, $f : E \to F$, тобто задача полягає у знаходженні такої цілочислової точки $\bar{x} \in X$, що $f(X) \cap \left(f(\bar{x}) - K \setminus \{0\} \right) = \varnothing$. Позначимо $E_K(f, X)$ множину розв'язків задачі (1), а елементи цієї множини будемо називати Парето оптимальними (ефективними) розв'язками. Нехай B – опукла замкнена обмежена множина з R^n, $0 \notin B$. $K^* = \mathrm{con}(\mathrm{conv}\ B)$. Визначимо опорну функцію множини B: $\sigma_B \overset{def}{=} \max\limits_{z \in B}(y, z)$.

Розроблено та обгрунтовано точний та наближений алгоритми, які є розвитком градієнтних методів [1] для багатокритеріальної цілочислової оптимізації, а у випадку однокритеріальної оптимізації співпадають з ними.

Алгоритм 1

1. $x_s \in X$ - s-е наближення.
2. Розв'язуємо задачу $\sigma_B \left(\nabla f(x_s)(x - x_s) \right) \to \min\limits_{x \in X}$ і знаходимо $\bar{x}_s$.
3. Знаходимо точку $x_{s+1} \in O_\delta(\bar{x}_s) \cap X$.
4. Якщо $\nabla f(\bar{x}_s)(x - \bar{x}_s) \notin -\mathrm{int}\, K \ \ \forall x \in X$, то $\bar{x}_s$ − Парето-оптимальний розв'язок задачі.

Якщо ж ні, то переходимо до п.1 з $s = s + 1$.

Алгоритм 2 призначений для розв'язання методом опорного конуса векторної задачі цілочислової оптимізації вигляду (1). Суть цього методу полягає в апроксимації вхідної нелінійної задачі послідовністю задач лінійної оптимізації. Тут використовується апроксимація допустимої множини послідовністю опорних до множини X конусів $Q_0 \supset X, Q_1 \supset X, ..., Q_k \supset X, ...,$ з вершинами в точках $x^0, x^1, ..., x^k, ...,$ причому для всіх точок повинні виконуватись умови $f(x^k) \subset \left\{ \min f(x) \mid x \in Q_k \right\}$, $x^{k-1} \notin Q_k$, $k = 1, 2, ...$ 1. Семенов Віктор. В. Методи градієнтного типу розв'язання задач векторної оптимізації // Комп'ютерна математика. – 2010. – № 1. – С. 145-152.

Скрыпник Светлана Валентиновна, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Донецкий национальный университет экономики и торговли им. М.И. Туган-Барановского
e-mail: matemat@kaf.donduet.edu.ua

ДВА ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Скрыпник С.В.

Рассмотрена задача об условиях существования у уравнений Кирхгофа-Пуассона и уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона двух линейных инвариантных соотношений [1]

$$\overline{x}\cdot\overline{a}_1+\overline{\nu}\cdot\overline{b}_1=c_1,\ \ \overline{x}\cdot\overline{a}_2+\overline{\nu}\cdot\overline{b}_2=c_2, \tag{1}$$

где $\overline{x}$ – момент количества движения гиростата; $\overline{\nu}$ – вектор оси симметрии силовых полей; $\overline{a}_i$ и $\overline{b}_i$ $(i=1,2)$ – постоянные векторы; c_i $(i=1,2)$ – постоянные параметры.

Таким образом, в качестве механических моделей приняты две модели. Первая модель описывает движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

$$\dot{\overline{x}}=\left(\overline{x}+\overline{\lambda}\right)\times a\overline{x}+a\overline{x}\times B\overline{\nu}+\overline{s}\times\overline{\nu}+\overline{\nu}\times C\overline{\nu}-\dot{\lambda}\overline{\alpha},$$

$$\dot{\overline{\nu}}=\overline{\nu}\times a\overline{x}\,. \tag{2}$$

Вторая модель описывает движение гиростата в магнитном поле в предположении, что он является ферромагнетиком

$$\overline{x}=\left(\overline{x}+\overline{\lambda}\right)\times a\overline{x}+Ba\overline{x}\times\overline{\nu}+\overline{s}\times\overline{\nu}+\overline{\nu}\times C\overline{\nu}-\dot{\lambda}\overline{\alpha},$$

$$\overline{\nu}=\overline{\nu}\times a\overline{x}\,, \tag{3}$$

где определение переменных векторов $\overline{x},\overline{\nu}$ дано выше, а $\overline{s}$ и $\overline{\lambda}$ – постоянные вектора; a – гирационный тензор гиростата; B и C – постоянные матрицы третьего порядка; $\overline{\alpha}$ – единичный вектор гирастатического момента.

На основе метода инвариантных соотношений в докладе изложены результаты изучения инвариантных соотношений (1) уравнений движения в указанных выше задачах в случае постоянного и в случае переменного гиростатического момента. Показано, что для варианта постоянного гиростатического момента $\dot{\lambda}=0$ условия существования двух инвариантных соотношений сведены к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и параметры инвариантных соотношений. Проведен сравнительный анализ этих систем для рассмотренных уравнений движения механических моделей.

Для случая, когда гиростатический момент гиростата зависит от времени $\left(\dot{\lambda}(t)\neq 0\right)$ задача исследования соотношений (1) у уравнений движения сведена к нахождению решения системы четырех дифференциальных уравнений относительно одной компоненты момента количества движения, переменной составляющей гиростатического момента и двух компонент вектора $\overline{\nu}$.

В докладе для варианта переменного гиростатического момента приведены примеры разрешимости этих уравнений для первой механической модели, то есть для модели, которая описывается уравнениями Кирхгофа-Пуассона (2). Он характеризуется свойством, что вектор гиростатического момента принадлежит плоскости, в которой лежат векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$.

1. Скрыпник С.В. Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики //Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31-40.

Смелов Валерий Викторович, студент 4 курса, факультета кибернетики,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: valery.smielov@gmail.com
Бычков Алексей Сергеевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: bychkovtk@gmail.com

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ГИБРИДНЫХ АВТОМАТОВ

Смелов В.В., Бычков А.С.

Рассмотрим вопрос об устойчивости по части переменных. Рассмотрим четкий гибридный автомат

$$\dot{y} = f_q(y),\ y \in Inv_q,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ y(t_0) = 0, \tag{1}$$

где $y_1 \in R^{n_1}$, $y_2 \in R^{n2}$. Переменную y_1 будем называть наблюдаемой, y_2 — скрытой. Будем считать, что переключение между состояниями $q \in Q$ непрерывно ($Jump(q, y) = \varnothing \vee \{(r, y)\}$).

Необходимо исследовать устойчивость (1) по векторам наблюдаемых координат y_1. Считаем, что $y_1 = 0$ — стационарная точка системы для всех значений скрытого вектора y_2.

Определение 1. Траектория $y(\bar{y}^0, t)$ гибридного автомата $y(y^0, t)$ устойчива по набору переменных y_1, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, для которого при $\left\| y^0 - \bar{y}^0 \right\| < \delta$ будет выполняться $\left\| y_1(\bar{y}^0, t) - y_1(y^0, t) \right\|_1 < \varepsilon$.

Следует обратить внимание, что устойчивость должна быть как при отклонении наблюдаемых координат, так и при отклонении скрытых.

Определение 2. Функция $V(y): B_r(0_1) \times R^{n2} \to R$ называется y_1-равномерно-положительно определенной, если существуют две положительно определенные функции $W(y_1), U(y_1): B_r(0_1) \to R$ такие, что для любого $y = (y_1, y_2) \in B_r(0_1) \times R^{n2}$ выполняется неравенство $W(y_1) \le V(y_1, y_2) \le U(y_1)$.

Пусть для системы (1) существует такой набор y_1-положительно определенных функций Ляпунова, что $\dot{V}^q |_{f_q} \le 0$, причем на переключениях $y|_{q \to r}$ выполняется неравенство $V^r(y) \le V^q(y)$. Тогда нулевое решение системы (1) устойчиво.

Теорема. Пусть система (1) имеет циклическое непрерывное переключение. Если в цилиндре $D \times R^{n2}$, где $D \subseteq R^{n_1}$, существует такой набор y_1- равномерно-положительно определенных функций Ляпунова $V^q : D \times R^{n2} \to R$, что $\dot{V}^q |_{f_q} \le 0$ для $y \in D \times Inv_q$, и $c^N \le c^0$, то $x = 0$ — устойчивая ТФО системы (1).

Сопронюк Тетяна Миколаївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Чернівецький національний університет імені Юря Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: sopronyuk@gmail.com

ПРО ОДНУ ІМПУЛЬСНУ СИСТЕМУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

Сопронюк Т.М.

Нехай задана система диференціальних рівнянь з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, x, \varepsilon), \qquad \tau \neq \tau_j,$$
$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon B_j(x), \tag{1}$$

в якій $x = (x_1, ..., x_n) \in D, \tau = \varepsilon t \in I = [0,1]$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ -- малий параметр, D -- обмежена область, $\tau_j = \varepsilon t_j, \tau_{j+1} > \tau_j$ для всіх $j = 0,1,...$.
Припустимо, що рівномірно по x, t існують границі

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sum\limits_{t \le t_j < t+T} B_j(x)}{T} = \frac{B(x)}{\theta}, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{d(t, t+T)}{T} = \frac{1}{\theta}, \quad \theta = const. \tag{2}$$

Тут $d(t, t+T)$ -- кількість моментів імпульсної дії на відрізку $[t, t+T]$.

Зазначимо, що умови, подібні (2), запропоновані у роботі [1] при обгрунтованні методу усереднення по часу для систем стандартного вигляду з нефіксованими моментами імпульсної дії.

Нехай для всіх $x', x'' \in D$ рівномірно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \in I, j = 0,1,...$ з деякою сталою σ виконуються нерівності

$$\| A(\tau, x', \varepsilon) - A(\tau, x'', \varepsilon) \| \le \sigma \| x'' - x' \|, \quad \| B_j(x') - B_j(x'') \| \le \sigma \| x'' - x' \|,$$
$$\| A(\tau', x', \varepsilon)) \| \le \sigma, \| B_j(x') \| \le \sigma. \tag{3}$$

Поставимо у відповідність системі (1) систему без імпульсної дії

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = A(\overline{x}, \tau, \varepsilon) + \frac{B(\overline{x})}{\theta}. \tag{4}$$

Якщо для системи (1) виконуються умови (2), (3), і для всіх $\tau \in I, y \in D_1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ крива $\overline{x} = \overline{x}(\tau, y, \varepsilon)$ лежить у D разом зі своїм ρ-околом, то доведено, що для довільного $\mu > 0$ існує таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu) > 0$, що для кожних $\tau \in I, y \in D_1$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджується оцінка

$$\| x(\tau, y, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, y, \varepsilon) \| \le \mu.$$

Тут $x(\tau, y, \varepsilon)$ та $\overline{x}(\tau, y, \varepsilon)$ -- розв'язки систем відповідно (1) і (4) з початковою умовою $x|_{\tau=0} = \overline{x}|_{\tau=0} = y \in D_1 \subset D.$

Якщо ж існує таке $p \in N$, що замість рівностей (2) для всіх $j = 0,1,...$ виконуються умови

$$(t_{j+p} - t_j) / p \equiv \theta, \quad B_j(x) \equiv B(x),$$

то доведено, що існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що для кожних $\tau \in I, y \in D_1$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджується оцінка

$$\| x(\tau, y, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, y, \varepsilon) \| \le \alpha\varepsilon, \quad \alpha = const.$$

1. *Самойленко А.М.* Метод усреднения в системах с толчками // Матем. физика - 1971. Т. 9. -- С.101-117.

Стадник Оксана Ивановна, к.ф.м.н.
Киевский национальный университет культуры и искуств, Киев, Украина,
e-mail: ostadnyk@mail.ru;

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ОПТИМИЗАЦИИ ОЦЕНОК ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Стадник О. И.

Одним из основных методов исследования динамических систем различной природы является второй метод Ляпунова. Суть его состоит в построении некоторой функции (функционала) и исследовании его поведения вдоль решения системы. Если функция обладает определенными свойствами (непрерывностью и положительной определенностью) и вдоль решений динамической системы она убывает (полная производная отрицательно определенная), то положение равновесия динамической системы является асимптотически устойчивым.

Доказано, что для основных видов динамических систем (дифференциальных, разностных, функционально-дифференциальных уравнений) метод функций Ляпунова является необходимым и достаточным условием устойчивости. Основной проблемой метода является проблема построения соответствующей функции (функционала).

Для линейных стационарных динамических систем соответствующая функция ищется в виде квадратичной формы с некоторой (или некоторыми) положительно определенными матрицами, т.е. в заранее заданной структурной форме. И проблема нахождения функции (функционала) сводится к поиску положительно определенной матрицы, определяющей функцию Ляпунова. Условием отрицательной определенности производной является, как правило, отрицательная определенность некоторой квадратичной формы, т.е. отрицательная определенность матрицы, являющейся функционалом от матриц, входящих в функцию Ляпунова. И задача нахождения функции Ляпунова может быть сведена к задаче оптимизации с целевой функцией, являющейся матрицей квадратичной формы производной функции Ляпунова. Функция Ляпунова, являющаяся решением задачи оптимизации названа «оптимальной функцией Ляпунова».

В докладе приведен ряд задач, приводящий к нахождению оптимальных функций Ляпунова в различных смыслах. Для решения задач оптимизации используются как традиционные методы оптимизации (метод покоординатного спуска), так и специально разработанные. Одним из таких является модификация градиентного спуска. Особенностью его является предложенный метод вычисления обобщенного градиента.

Столярчук Ростислав Всеволодович, старший викладач
Львівський навчально-науковий інститут, ЗакДУ, Львів, Україна,
e-mail: rostyks@yahoo.com

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ ДО ЗАДАЧ ДИНАМІКИ БАГАТОМАСОВИХ СИСТЕМ ЗМІННОЇ СТРУКТУРИ

Столярчук Р.В.

У термінах розривних систем або систем змінної структури формулюються численні змістовні інженерно – технічні задачі, пов’язані, наприклад, із передачею рух та зусиль в кінематичних парах, де необхідно враховувати зазори та наявність сил тертя, а також в задачах розповсюдженням сейсмічних коливань, керуванням маніпуляторами, автоматичного керування системами тощо. Метою даного дослідження є ознайомлення з питанням узагальнення чисельного розв'язку та обґрунтування знаходження функції адаптивного керування для алгоритмічного представлення розв’язку задачі з відповідним пошуком точок розриву правої частини диференціальних рівнянь на кожному кроці інтегрування системи диференціальних рівнянь.

Прикладний характер таких математичних моделей розглянуто стосовно багатомасових динамічних систем машинних агрегатів з врахування внутрішніх зв’язків, які відображають реальний кінематичних та силовий зв’язок окремих ланок, що можуть змінюватись в процесі передачі руху.

.

1. Aizerman, M.A. and Pyatnitskii, E.S., Fundamentals of the Theory of Discontinuous Systems. I, II,Avtom. Telemekh., 1974, no. 7, pp. 33-47; no. 8, pp. 39-61.(in Russian)
2. Filippov, A.F., Differential Equations with Discontinuous Right-hand Side, Moscow: Nauka, 1985.(in Russian)
3. Stolyarchuk R. Multibody Modeling and Dynamical Analysis of the Worm Gear Drive System **:** Linköping University Electronic Press, Linköpings universitet Year: 2007 Issue: 27 Article No.: 7 http://www.ep.liu.se/ecp/027/007/ecp072707.pdf (in English)

Сумбатов Александр Сумбатович, кандидат физ.-мат. наук, ст. научн. сотрудник,
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия,
e-mail: sumbatow@ccas.ru

К 100-ЛЕТИЮ УРАВНЕНИЙ ВОРОНЦА В ЗАДАЧЕ КАЧЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ПОВЕРХНОСТИ

Сумбатов А.С.

В январе 1911 г. известный киевский механик П.В. Воронец направил в журнал “Mathematische Annalen” текст своей второй [1] и последней из опубликованных в этом журнале публикаций, которая содержит в завершенной форме уравнения качения без скольжения твердого тела по поверхности. К этим уравнениям Воронец шел почти 10 лет. Однако получилось так, что полученные уравнения не вошли ни в один учебник, ни в одну монографию по теоретической механике, хотя на публикацию [1] имеются ссылки в литературе. Приложениями уравнений Воронца в рассматриваемой классической задаче механики занимались Я. Штаерман (1915), А. Билимович (1916) и Ю.П.Бычков (1965-67, 2004).

Основной идеей Воронца явилось использование общей теоремы [2] об изменении кинетического момента тела относительно *движущейся* геометрической точки касания тела с опорной поверхностью. В результате в динамические уравнения не вошел момент силы реакции, действующей на тело со стороны опорной поверхности. Из восьми уравнений относительно восьми кинематических и динамических величин системы собственно динамических уравнений три, которые в обозначениях Воронца имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} + (\tau-\tau_1)\frac{\partial\Theta}{\partial n} - (n-n_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + M\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\tau}{\sqrt{E}} - \rho\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\sigma}{\sqrt{G}}\right)\sqrt{G}\,\dot{v} = \Gamma_\xi,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + (n-n_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} - (\sigma-\sigma_1)\frac{\partial\Theta}{\partial n} - M\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\tau}{\sqrt{E}} - \rho\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\sigma}{\sqrt{G}}\right)\sqrt{E}\,\dot{u} = \Gamma_\eta,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial n} + (\sigma-\sigma_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} - (\tau-\tau_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} + M\varepsilon\left(\sqrt{E}\,\dot{u}\sigma+\sqrt{G}\,\dot{v}\tau\right) - $$

$$-M\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial u}\dot{u} + \rho\frac{\partial\rho}{\partial v}\dot{v}\right)n = \Gamma_\zeta$$

Остальные пять уравнений кинематические, в том числе, уравнения неголономных связей.

Рассмотрен пример составления уравнений Воронца в задаче качения тяжелого диска по поверхности вращения (реализуется в интересном механическом устройстве для сбора небольших пожертвований от посетителей Восточно-Берлинского зоопарка и Московского планетария).

1. Woronetz P. Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers // Mathematische Annalen. - 1912. Bd. 71. - S. 392-403.

2. Суслов Г.К. Основы аналитической механики. Изд. 1-е, Т. I , §190. Киев, 1900. Изд. 2-е, Т. I, Ч.1, §36. Киев, 1911. (Суслов Г.К. Теоретическая механика. Изд. 3-е под ред. Н.Н.Бухгольца и В.К. Гольцмана. М.-Л.: Гостехиздат, 1944, 1946. §32).

Тхай Валентин Николаевич, доктор физ.-мат.наук, профессор,
Институт проблем управления РАН, Москва, Россия,
e-mail: tkhai@ipu.ru

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КВАЗИАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ

Тхай В.Н.

Изучаются одночастотные колебания периодической системы, близкой к автономной (порождающей) системе. Согласно открытому закону[1], период на семействе колебаний нелинейной автономной системы зависит, как правило, только от одного параметра. При этом точки семейства делятся на обыкновенные (производная от периода по параметру отлична от нуля) и критические (указанная производная обращается в нуль). Исследуются колебания в возмущенной (квазиавтономной системе).

Колебания в обыкновенной точке анализировались ранее[2]. В настоящей работе показано, что в критической точке колебания носят резонансный характер, т.е. в μ-возмущенной системе в окрестности порождающего колебания возникают колебания амплитуды $O(\mu^{1/3})$. Установлено рождение по крайней мере двух резонансных колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФФ(09-01-00468) и Программы 15 ОЭММПУ РАН(проект 2.3).

1. Тхай В.Н. Закон о зависимости периода нелинейных колебаний от одного параметра// Прикл. матем. и механика. -2011. -73, вып. 3. – С.423-427.
2. Тхай В.Н. Колебания и устойчивость в квазиавтономной системе. I. Обыкновенная точка однопараметрического семейства периодических движений// Автоматика и телемеханика. -2006. №9. – С.90-98.

Финогенко Иван Анатольевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
Иркутск, ул. Лермонтова, 134, Россия 664033, e-mail: fin@icc.ru

О ПРИТЯЖЕНИИ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Финогенко И.А.

Пусть R^n - n-мерное векторное пространство, C_τ - пространство всех непрерывных функций $\phi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau,0]$ со значениями в R^n с обычной sup-нормой, $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $-\tau\le\theta\le 0$, $t\in[0,\omega)$. Мы исследуем вопросы притяжения для функционально-дифференциальных включений

$$\dot{x}\in F(x_t(\cdot)),\quad x_0(\cdot)=\varphi_0(\cdot), \tag{1}$$

где функция $\varphi_0(\cdot)\in C_\tau$ задает начальное значение для задачи (1) в момент времени $t=0$ (начальная функция), $F:C_\tau\to R^n$ - многозначное отображение.

Для эффективного использования принципа инвариантности Ла-Салля в задачах о притяженнии важно знать наибольшее инвариантное подмножество $\Lambda\subset E(\dot{V}^*=0)$ из множества нулей (в пространстве C_τ) верхней производной функционала Ляпунова-Красовского $V(\phi(0),\phi(\cdot))$ в силу включения (1):

$$E(\dot{V}^*=0)\overset{\Delta}{=}\{\phi(\cdot)\in C_\tau:\dot{V}^*(\phi(0),\phi(\cdot))=0\}$$

или, что может оказаться проще, уметь определять те точки из множества $E(\dot{V}^*=0)$, которые Λ заведомо не принадлежат. Этой цели служит набор вспомогательных функционалов $W_j(\phi(0),\phi(\cdot))$. (Мы используем понятие инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова-Красовского из [1]).

Доказанные теоремы не позволяют в полной мере решать задачу притяжения для включения (1), так как притягивающее множество $M\subset E_\nu(\dot{V}^*=0)$ заранее неизвестно и может формироваться, по сути дела, лишь в ходе анализа множества $E(\dot{V}^*=0)$. Чем богаче будет набор вспомогательных функционалов, тем точнее определяется притягивающее множество и полнее те выводы, которые оно позволяет сделать на основе свойств ω-предельных множеств.

Исследуется также свойство слабого притяжения, которое может быть полезно при наличии некоторой дополнительной информации. Например, если известно, что множество M обладает свойством устойчивости, то из слабого притяжения следует притяжение. Этот же вывод можно сделать, если известно, что ω-предельное множество решения состоит из одной точки. Результаты иллюстрируются примером.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (междисциплинарный проект № 107) и РФФИ (проект № 10-01-00132)

1. *Ким А.В.* i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения // Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996, 233 с.

Хітько Іван Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ivan.khitko@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА

Хітько І.В.

Розглянемо дискретну систему

$$x(k+1) = f_k(x(k)), \quad k = 0,1,...,N-1, \tag{1}$$

де $f_k(x): D \to D$ – n-вимірні вектор-функції, $D \subset R^n$. Позначимо $x(k) = x(k, x_0)$ – розв'язок системи (1) за умови $x(0) = x_0$, $k = 0,1,...,N$. Нехай $G_0 \subset D$ – множина початкових умов, $\Phi_k \subset D$, $k = 0,1,...,N$ – множина фазових обмежень, $0 \in \operatorname{int}\Phi_k$, $k = 0,1,...,N$, $f_k(0) = 0$, $k = 0,1,...,N-1$.

*Означення***.** Нульовий розв'язок системи (1) називається $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-стійким (внутрішньо $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-практично стійким), якщо $x(k, x_0) \in \Phi_k$, для всіх $x_0 \in G_0$, $k = 0,1,...,N$.

Максимальну за включенням множину всіх початкових умов, для яких виконується дане означення, позначимо G_*.

Теорема. Нехай Φ_k, $k = 0,1,...,N$ – компакти, функції $f_k(x)$, $k = 0,1,...,N-1$ неперервні в області D і знайдуться такі додатні константи a_k, $k = 0,1,...,N-1$, що $a_k\|x-y\| \le \|f_k(x) - f_k(y)\|$, $x, y \in D$, $k = 0,1,...,N-1$. Для того щоб система (1) була $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-стійкою необхідно і достатньо, щоб існували функції Ляпунова $V_k(x)$, $k = 0,1,...,N$ такі, щоб справджувалися співвідношення:

$$G_0 \subseteq \{x \in R^n : V_0(x) \le 1\},$$

$$\{x \in R^n : V_k(x) \le 1\} \subseteq \Phi_k, \; k = 0,1,...,N,$$

$$V_{k+1}(f_k(x)) \le V_k(x), \; k = 0,1,...,N-1.$$

Наслідок. Якщо фазові обмеження Φ_k, $k = 0,1,...,N$ – компакти**,** то для дослідження $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-стійкості можна використовувати функцію Ляпунова у вигляді

$$V_k(x) = \begin{cases} 1 + \min\limits_{y \in \partial G_*} \|\varphi_k(x) - y\|, & x \in \{z : \varphi_k(z) \in D \setminus G_*\}, \\ 1 - \min\limits_{y \in \partial G_*} \|\varphi_k(x) - y\|, & x \in \{z : \varphi_k(z) \in G_*\}. \end{cases}$$

Для лінійних дискретних систем за опуклих фазових обмежень одержано оптимальні оцінки множини початкових умов у вигляді кулі та еліпсоїда, а також оцінки фазових обмежень за умови поділу.

1. Башняков А.Н., Пичкур В.В., Хитько И.В. О максимальном множестве начальных условий в задачах практической устойчивости дискретной системы // Проблемы управления и информатики. – 2011. – №2. – С.5-11.
2. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
3. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.

Чемисов Борис Георгиевич, к.т.н.
Черниговский государственный институт экономики и управления, Чернигов, Україна,
e-mail: M.Kutovaya@geci.cn.ua;

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧИСЛЕННОСТИ СЕЛЬСКИХ РЕГИОНОВ

Чемисов Б. Г.

Одной из первых математических моделей, описывающих динамику популяций, является дифференциальное уравнение Мальтуса, предполагающее, что скорость распространения популяции линейно зависит от ее количества.
Если коэффициент размножения является положительным, то популяция растет, если отрицательным – уменьшается. Модель достаточно неплохо отображает динамику процесса на небольшом промежутке времени. Очевидно аналогичные зависимости имеют место и для людности поселений.

Широко известно правило Зипфа, согласно которому в региональной сети городов существует зависимость между людностью города и его номером.

Более удобным для использования являлась не исходная зависимость, а прологарифмированная, т.е. прологарифмированная формула Зипфа

Предложенная зависимость имела вид «убывающей» прямой и достаточно неплохо отображала распределение численности населения городов Китая. В работах Чемисова Б.Г. для получения зависимости распределения сельского населения была предложена более сложная зависимость

$$P_i = K^{-1} P_1 i^{b+c\ln i},\ i = \overline{1, N},$$

где a, $b-$ некоторые постоянные параметры (не обязательно положительные), отражающие специфику региона. Соответственно логарифмическая зависимость имела вид

$$\ln P_i = \ln K^{-1} + \ln P_1 + b\ln i + c(\ln i)^2,\ i = \overline{1, N}$$

и более адекватно отражала зависимость.

Фактически предлагаемая зависимость имеет вид квадратичной зависимости от логарифма

$$X(i) = R + b\ln i + c(\ln i)^2,\ X(i) = \ln P_i,\ M = \ln\frac{P_1}{K}.$$

Для определения коэффициентов N, b, c, дающих наилучшее приближение использовался метод наименьших квадратов.

В предлагаемом докладе приведены численные расчеты указанной зависимости распределения населения для поселений Черниговской области.

Чорненька Олена Володимирівна, кандидат фіз.-мат. наук,
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, м. Ніжин, Україна ,
e-mail: elenagolovch@rambler.ru;
Майдан Ірина Миколаївна, студентка 4 курсу, фізико-математичний факультет,
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя м. Ніжин,, Україна ,
e-mail: bionika9@mail.ru

ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

Чорненька О.В., Майдан І.М.

Вивчається задача про побудову загального асимптотичного розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x,\varepsilon) z \qquad (1)$$

з іррегулярною особливою точкою $x = \infty$, де $z(x,\varepsilon)$ – шуканий *n*-вимірний вектор, ε – малий дійсний параметр, $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, x – незалежна змінна, $|x| \ge a$, $h > 0$ і $g \ge 0$; $A(x,\varepsilon)$ – квадратна матриця n -го порядку

$$A(x,\varepsilon) = A_{00} + \varepsilon A_{10} + x^{-1} A_{01}. \qquad (2)$$

Дослідження систем (1) за умови, що матриця $A(x,\varepsilon)$ допускає асимптотичне розвинення вигляду $A(x,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} A_{sk}$, наведено в роботах [1–4]. Відповідно в [1] здійснено асимптотичне розщеплення системи (1) на підсистеми меншої розмірності, у роботі [2] описано побудову асимптотичних розв'язків у випадку простого спектра граничного оператора, дослідження [3 – 5] присвячені ґрунтовному вивченню питання побудови загального асимптотичного розв'язку системи (1) у випадку кратного спектра матриці A_{00}.

Дана робота присвячена побудові загального асимптотичного розв'язку системи (1), (2) за умови, що гранична матриця A_{00} має одне власне значення λ_0 кратності *n*, якому відповідає один елементарний дільник такої самої кратності; φ - відповідний власний вектор матриці A_{00}, ψ - елемент нуль-простору матриці $(A_{00} - \lambda_0 E)^*$.

Застосовуючи методику [3, 4], розв'язок системи (1) знайдено у вигляді $z(x,\varepsilon) = u(x,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{x_0}^{x} x^g(\lambda_0 + \lambda(x,\varepsilon))dx\right)$, де $u(x,\varepsilon)$ - шукана вектор-функція, $\lambda(x,\varepsilon)$ невідома скалярна функція. Для знаходження функції $\lambda(x,\varepsilon)$ виведено рівняння розгалуження, операторні коефіцієнти якого подано через матриці A_{01}, A_{10} та напівобернену матрицю H до $(A_{00} - \lambda_0 E)$. Показано, що шукані функції мають вигляд подвійних розвинень за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної та параметра. Застосовуючи просторові діаграми Ньютона, розроблено алгоритм визначення дробових показників у випадку $n = 2$. Знайдено відповідні асимптотичні оцінки.

1. Сотниченко Н.А. Асимптотическое интегрированние дифференциальных уравнений / Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф. – К., 1980. – 48 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.3).

2. Давидюк Г.П. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой: автореф. дисс. на соискание науч. ст. канд. физ.-мат. наук : спец. 01.01.02. "Дифференциальные уравнения" / Г. П. Давидюк. – Киев, 1983. – 14 с.

3. Головченко О. В. Побудова розв'язків лінійних систем з особливою точкою та параметром / О. В. Головченко, В. П. Яковець // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – № 15. – С. 40–49.

Чуйко Сергей Михайлович,
Славянский государственный педагогический университет, Славянск, Україна,
e-mail: chujko-slav@inbox.ru;

НЕТЕРОВЫ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Чуйко С. М.

Найдены достаточные условия разрешимости нетеровой $(m \neq n)$ краевой задачи [1] для вырожденной $(k \neq n)$ дифференциально-алгебраической системы [2,3]

$$A(t)\, dzdt = B(t)z + f(t),\ A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{k\times n}, \mathbb{C}[a,b],\ \ell z(\cdot) = \alpha,\ \ell z(\cdot): \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m. \qquad (1)$$

Предположим, что матрица $B^+(t)A(t)$ постоянного ранга; при этом неособенным преобразованием подобия она приводится к жордановой форме $B^+(t)A(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t)$. Обозначим $J_\delta(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}$ невырожденный блок жордановой формы $J(t)$, соответствующий ненулевым собственным числам матрицы $B^+(t)A(t)$ и $P_{A^*(t)}, P_{B^*(t)}, P_{Q^*}$ - ортопроекторы транспонированных матриц $A^*(t), B^*(t), Q^*$ [1].

Теорема. *Предположим, что матрица $B^+(t)A(t)$ постоянного ранга δ и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при условии $P_{A^*(t)}B(t) \neq 0$, $P_{B^*(t)}A(t) = 0$, $P_{B^*(t)}f(t) = 0$ для непрерывной матрицы $J_\delta^{-1}(t)$ и постоянной матрицы $S(t) \equiv S$ система (1) имеет решение вида*

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta + K[f(s)](t),\ K[f(s)](t) = S \cdot K[\varphi(s), \psi(s)](t),\ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где

$$X(t) = S \cdot \big(Y_\delta(t) O\big),\ K[\varphi(s), \psi(s)](t) = \left(Y_\delta(t)\int_a^t Y_\delta^{-1}(s)J_\delta^{-1}(s)\varphi(s)ds - \psi(t)\right),$$

$Y_\delta(t)$ *--- нормальная $(Y_\delta(a) = I_\delta)$ фундаментальная матрица системы $u' = J_\delta^{-1}(t)u$,*

$$\varphi(t) = (I_\delta\ \ O)S^{-1}B^+(t)f(t) \in \mathbb{R}^\delta,\ \psi(t) = (O\ \ I_{n-\delta})S^{-1}B^+(t)f(t) \in \mathbb{R}^{n-\delta}.$$

В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0, Q := \ell X(\cdot))$ при условии $S' = 0$ краевая задача (1) имеет семейство решений

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G[f(s); \alpha](t) := X(t)Q^+\alpha - \ell K[f(s)](\cdot) + K[f(s)](t)$$

- обобщенный оператор Грина нетеровой краевой задачи (1).

Предложенные условия разрешимости краевой задачи (1) не предполагают существования центральной канонической формы [1,2] и совершенных троек матриц [3].

1. *Бойчук,А.А., Шегда,Л.М* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. - 2007. - 10, № 3. - С.303 - 312.
2. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. - San Francisco - London - Melbourne: Pitman AdvancedPublishing Program. - 1980.
3. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. - Новосибирск. - Наука. 1998. - 224 с.

Чуйко Сергей Михайлович,
Славянский государственный педагогический университет, Славянск, Україна,
e-mail: chujko-slav@inbox.ru;
Пирус Ольга Евгеньевна, аспирант,
Славянский государственный педагогический университет, Славянск, Україна,
e-mail: olya.pirus@rambler.ru;

УСКОРЕНИЕ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Чуйко С. М., Пирус О. Е.

Исследована задача о нахождения решения [1,2]

$$y(t,\varepsilon): y(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,T_1(\varepsilon)],\, T_1(\varepsilon)=2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)),\, T_1(0)=2\pi,\, y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$$

автономной периодической задачи для уравнения типа Хилла [3]

$$y''+y=\varepsilon\cdot Y(y,\varepsilon),\ y(0,\varepsilon)-y(T_1(\varepsilon),\varepsilon)=0,\ y'(0,\varepsilon)-y'(T_1(\varepsilon),\varepsilon)=0. \quad (1)$$

Решение задачи (1) ищем в окрестности решения порождающей задачи

$$y_0''+y_0=0,\ \ y_0(0)-y_0(2\pi)=0,\ \ y_0'(0)-y_0'(2\pi)=0. \quad (2)$$

Здесь $Y(y,\varepsilon)-$ нелинейная скалярная функция, непрерывно-дифференцируемая по неизвестной y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1) является критической [1,2]. Представим период решения задачи (1) $T_1(\varepsilon)=2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$ через новую неизвестную $\beta(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0]$.

Теорема. *Для любого действительного корня* $c^*=col\,(\hat{c}^*,\beta^*)\in\mathbb{R}^2,\beta^*:=\beta(0)$ *уравнения для порождающих амплитуд*

$$F(\hat{c},\beta):=\int_0^{2\pi}H_\rho(s)[Y(y_0(s,\hat{c}),\varepsilon)-2\cdot\beta\cdot y_0(s,\hat{c})]\,ds=0(3)$$

при условии $F_\beta'(c^*)\neq 0$ *задача (1) имеет единственное решение, при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в решение* $y_0(t,\hat{c}^*)=\hat{c}^*\cdot\cos t$ *порождающей задачи (2).*

Здесь $H_\rho(t)=\cos t$, либо $H_\rho(t)=\sin t$, в зависимости от нелинейности $Y(y,\varepsilon)$ задачи (1). Для нахождения решения автономной периодической задачи для уравнения типа Хилла (1) предложена итерационная техника, построенная по схеме Ньютона-Канторовича [2]. Найдены достаточные условия сходимости итерационной схемы и оценка длины промежутка, на котором находятся значения малого параметра, гарантирующие квадратичную сходимость предложной итерационной техники. Получены приближения к периодическому решению уравнения Дюффинга, значительно превосходящие по точности приближения, получаемые при помощи итерационной техники [2,3].

1. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Метод ускоренной сходимости для построения решений нетеровой краевой задачи // Укр. мат.журн.--- 2008. bf 60. № 12, С. 1587 --- 1601. 23--29.
2. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Автономные краевые задачи в частном критическом случае// Динамические системы. --- 2009. --- bf 27, С. 127 --- 142.
3. *Torres P.J.* Non-trivial periodic solutions of a non-linear Hill.

Шамолин Максим Владимирович, д.ф.м.н.
МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия,
email: shamolin@imec.msu.ru;
Кочулова Елена Григорьевна,
Киев, Україна

СОПОСТАВЛЕНИЕ СЛУЧАЕВ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ ДВУМЕРНОГО, ТРЕХМЕРНОГО И ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ

Шамолин М. В, Кочулова Е. Г.

Исследованию случаев полной интегрируемости уравнений движения четырехмерного твердого тела посвящено огромное количество работ. Автор не претендует в данном вопросе на первенство, хотя при исследовании "маломерных" уравнений движения вполне конкретных (двумерных и трехмерных) твердых тел в неконсервативном поле сил пришла идея обобщить уравнения на случай движения четырехмерного твердого тела в аналогично построенном поле. В результате такого обобщения получились несколько случаев интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы, позволяющей методическим образом понизить порядок общей системы динамических уравнений движения. Более того, на взгляд автора, полученные результаты оригинальны с той точки зрения, что в системе присутствует пара неконсервативных сил.

Ранее автором была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В предлагаемой работе обобщаются некоторые известные ранее результаты по интегрированию двумерного и трехмерного твердых тел, находящихся под действием неконсервативного момента сил, а также исследуются уравнения движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела в одном из двух логически возможных случаях - в зависимости от расстановки главных моментов инерции. Структура таких уравнений движения в некотором смысле сохраняется при переносе на случаи большей размерности.

Шиян Ольга Владимировна, старший преподаватель кафедры высшая математика,
Крымский институт бизнеса, Украина, Симферополь,
e-mail: olgshiyan@yandex.ru;

УСТОЙЧИВЫЕ РЕЖИМЫ ГОРЕНИЯ ВДОЛЬ ПОЛОСЫ

Шиян О.В.

На отрезке l рассматривается феноменологическое уравнение горения вдоль полосы [1], [2]:

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\delta\left(\dot{\xi} - \frac{4}{3}\left(\dot{\xi}\right)^3 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\dot{\xi} + \frac{\lambda\beta}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{\xi}\right), \qquad \left.\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right|_{x=l} = 0\,. \qquad (1)$$

Здесь $\xi = \xi(t;x)$, $0 < \delta << 1$, $\lambda > 0$, $\beta > 0$, Δ - одномерный лапласиан.

Исследуются вопросы о существовании, устойчивости и форме периодических по t пространственно неоднородных решений задачи (1), бифурцирующих из пространственно однородного решения $\xi_0 = Cost + O(\delta)$.

Теорема. *Существует* δ_0 *такое, что при* $0 < \delta < \delta_0$ *и малых* $\rho - \rho_k > 0$ $\left(\rho_k = k \cdot \beta^{-1},\ \ \rho = 2\pi l / \lambda,\ \ k = 0,1,...\right)$, *задача (1) имеет периодические по* t *пространственно неоднородные решения* $\xi_k^{\pm}(\omega(\delta,\rho)t;\rho,\theta)$, *где* $\omega(\delta,\rho) = 1 + O(\delta^2)$ *− гладкая функция* δ, ρ. *Справедливо равенство:*

$$\xi_k^{\pm} = \xi_k^{\pm}(t,\rho,\theta) = \sqrt{3 - 2\alpha_k}\,Cost \pm 2\sqrt{\alpha_k - 1}\,Sint \cdot Cosk\theta + O(\delta;\rho - \rho_k), \qquad (2)$$

где $\theta = \pi x / l$, $\quad \alpha_k = 1 - (k/\rho)^2 + \beta \cdot (k/\rho)$.

Решения $\xi_1^{\pm}(\omega(\delta,\rho)t;\rho,\theta)$ *экспоненциально орбитально устойчивы при малых* δ, $\rho - \rho_1$.

Установлено, что при $\beta > 0, \alpha_k < 1$ единственным решением задачи (1) – (2) является синфазная волна $\xi_0 = Cost + O(\delta)$. Далее при увеличении ρ и прохождении критического значения ρ_1 $(\alpha_1 = 1)$ из теряющего устойчивость ξ_0 бифурцирует пара экспоненциально устойчивых пространственно неоднородных, периодических по t решений $\xi_1^{\pm}$. Численно установлено, что решения $\xi_1^{\pm}$ остаются устойчивыми и при углублении ρ в область надкритичности.

При дальнейшем увеличении ρ и прохождении критического значения ρ_2 из уже неустойчивого ξ_0 бифурцирует пара $\xi_2^{\pm}$ имеющая такой же индекс неустойчивости что и ξ_0, при этом индекс неустойчивости ξ_0 увеличивается до 2. При дальнейшем увеличении параметра ρ решения $\xi_2^{\pm}$ приобретают устойчивость.

1. Маломед Б. А. Распространение автоколебательных волн вдоль полосы. // Изв. вузов, сер. Радиофизика. – 1981. – Вып. 14. – № 5. – С.571 – 576.
2. Белан Е.П., Шиян О.В. Автоколебательные режимы горения вдоль полосы // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 3–16.

Шматко Татьяна Валентиновна, доц., кандидат техн. наук,
НТУ «ХПИ», Харьков, Украина,
e-mail: ktv_ua@yahoo.com

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Шматко Т.В.

Исследованием оболочек переменной толщины занимались многие современные ученые [1, 3, 4, 6]. Однако практически отсутствуют работы, в которых бы рассматривались задачи о колебаниях анизотропных пологих оболочек переменной толщины со сложной формой плана при их геометрически нелинейном деформировании. В данной работе выполнено дальнейшее исследование вопроса о возможности и эффективности применения теории R-функций [5] к этому классу задач. Математическая постановка задачи выполнена в рамках классической геометрически нелинейной теории [1, 2] тонких пологих оболочек. Для дискретизации исходной системы по времени используется одномодовая аппроксимация неизвестных функций. Предложенный алгоритм дискретизации позволяет свести исходную задачу к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению типа Дуффинга, коэффициенты которого найдены в аналитическом виде и вычисляются в процессе решения последовательности краевых задач: линейной задачи о свободных колебаниях пологой оболочки переменной толщины и последовательности уравнений типа уравнений Ламе. Решение полученного уравнения находится приближенно с помощью метода Бубнова-Галеркина.

Программное обеспечение, реализующее предлагаемый подход в рамках системы POLE-RL, предусматривает решение промежуточных краевых задач для получения функций, с помощью которых представляется искомое решение нелинейной задачи и вычисляются двойные интегралы, входящие в аналитические выражения для коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения [6].

С помощью разработанного подхода решены как тестовые задачи, так и некоторые новые задачи для оболочек со сложной формой плана. Получены амплитудно-частотные зависимости для оболочек переменной толщины при повороте осей ортотропии по отношению к главным осям, изменении частоты внешней поперечной нагрузки, вида граничных условий, формы плана оболочки и законов изменения толщины оболочки.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432с.
3. Будак В.Д, Григоренко А.Я., Пузырев С.В. Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 4. – С.89-99
4. Ashour A.S. A semi-analytical solution of the flexural vibration of orthotropic plates of variable thickness // Journal of Sound and Vibration. – 2001. - 240, № 3. – P.431-445.
5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук.думка, 1982. – 552 с.
6. Курпа Л.В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана. // Мат.методи та фіз.-мех. поля. - 2008. – 51, № 2. – С. 1-11.

Шорникова Татьяна Александровна, кандидат технических наук, доцент
Пензенская государственная технологическая академия, Пенза, Россия
e-mail: shornikovat@mail.ru
Алёнина Анастасия Валерьевна, студ. 2 курса специальности «Математические методы в экономике»
Пензенская государственная технологическая академия, Пенза, Россия
Калашникова Екатерина Юрьевна, студ. 2 курса спец. «Математические методы в экономике»
Пензенская государственная технологическая академия, Пенза, Россия

СИСТЕМНЫЕ СОПРЯЖЁННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Шорникова Т.А., Алёнина А.В., Калашникова Е.Ю.

Сопряжённые процессы — процессы, протекающие одновременно, когда один из них (основной, сопрягающий) может протекать в отсутствие другого, а другой (сопряженный) осуществляется только при наличии основного.

В терминах термодинамики для концентрирования вещества или энергии в ходе сопряженного процесса должна быть произведена некоторая работа *A*, откуда эволюционный критерий сопряженного процесса будет соответствовать увеличению его мощности (работы в единицу времени):

$$dA / dt > 0 .$$

Однако системы бывают разные, и использовать один и тот же внешний энергетический поток могут по-разному. Отношение полезно используемой энергии, идущей на совершение работы *A*, и полной энергии, попадающей в систему извне *E*, будет отражать ее внутренние свойства — коэффициент полезного действия

$$\eta = A / E .$$

Тогда увеличение мощности сопряженного процесса записывается в виде:

$$dA / dt = \eta(dE / dt) + E(d\eta / dt) > 0 ,$$

откуда следует, что сопряженный процесс эволюционирует либо на основе роста потока энергии в систему, либо на основе роста к.п.д.

В первом случае ($d\eta / dt = 0, dE / dt > 0$) имеет место экстенсивное развитие системы — только за счет ресурсов сопрягающего процесса. При этом системе нет нужды совершенствовать внутренние механизмы использования энергии, так как и без этого обеспечивается ее прогрессирующее развитие на избытке внешнего ресурса. Однако, в реальных системах любой поток энергии конечен, поэтому экстенсивно развивающаяся система рано или поздно достигнет стадии, когда она будет потреблять весь внешний поток и дальнейшее развитие по этому пути станет невозможным ($dE / dt = 0$).

В этой критической точке система либо перестает развиваться, либо может продолжить развитие, но уже по принципиально иной стратегии — $d\eta / dt > 0, dE / dt = 0$, совершенствуя внутренние механизмы использования энергии (повышая к.п.д. или эффективность). Эта стратегия развития называется интенсивной. Интенсивный тип развития может обеспечивать поддержку эволюционного критерия даже в условиях ограниченного или уменьшающегося внешнего ресурсного потока. Коэффициент полезного использования энергии не может расти до бесконечности, и всегда ограничен соотношением $\eta \le 1$.

Рассмотрение системных процессов с позиции термодинамики позволяет решить круг значительно более сложных и труднорешаемых задач.

1. Алексеев Г.А. Энергоэнтропика. М.: Знание, 1983.
2. Берг Л.С. Труды по теории эволюции. Л.: Наука, 1987.
3. Тринчер К.С. Биология и информация. Элементы биологической термодинамики. М.: Наука, 1965.

Щетинина Елена Константиновна, кандидат физ.-мат. наук, доцент
ДонНУЭТ имени Михаила Туган-Барановского, Донецк, Украина
e-mail: elenaschetinina@mail.ru

ПЕРВЫЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ИССЛЕДОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА

Щетинина Е.К.

Весьма актуальным в настоящее время является получение новых решений обощенных уравнений движения гиростата в виде рядов Ляпунова. В докладе на основе первого метода Ляпунова построены новые решения уравнений Кирхгофа–Пуассона в виде рядов Ляпунова, которые описывают асимптотически-равномерные движения сферического гиростата. Отметим, что равномерные движения в динамике твердого тела изучали О.Штауде, В.В.Румянцев, А.Анчев, П.В.Харламов, А.М.Ковалев и другие.

Выписано и подробно проанализировано характеристическое уравнение системы первого приближения, в силу структуры которого для любых значений параметров задачи оказалось возможным сделать вывод о наличии одного, двух, трех либо четырех положительных характеристичных чисел системы в вариациях. Этот факт доказывает существование асимптотически-равномерных движений гиростата, описываемых рядами Ляпунова. При этом максимальное количество произвольных постоянных равно четырем, минимальное – одной. Таким образом, показано, что при любых значениях параметров задачи (исключая вырожденные случаи) существуют такие начальные данные, для которых движение гиростата стремится к равномерному вращению относительно вертикали.

Для задачи о движении сферического гиростата под действием силы тяжести найдены варианты условий, при которых, возможны одно или два положительных характеристичных чисел системы в вариациях. Приведены примеры реализации каждого варианта. При условии существования одного и двух положительных характеристичных чисел выписаны фундаментальные матрицы систем первого приближения.

Таким образом, построены решения нелинейной системы в возмущениях в виде рядов Ляпунова в случае одной и двух произвольных постоянных:

$$u_s(\tau)=\sum_{m_1=1}^{\infty} L_s^{(m_1)}(\tau)\alpha_1^{m_1}\, e^{-m_1\kappa_1\tau}\ ,\quad u_s(\tau)=\sum_{\substack{(m_1+m_2=m)\\ m=1}}^{\infty} L_s^{(m_1,m_2)}(\tau)\alpha_1^{m_1}\,\alpha_2^{m_2}\, e^{-(m_1\kappa_1+m_2\kappa_2)\tau}\quad \left(s=\overline{1,6}\right).$$

Ряды Ляпунова абсолютно сходятся для малых произвольных постоянных α_1,α_2 и при $\tau\to\infty \quad u_s(\tau)\to 0$.

Отдельно рассмотрен случай применимости теоремы Каменкова, когда линейная система уравнений возмущенного движения имеет одно положительное характеристичное число μ_0. Построено новое решение в виде рядов Каменкова $u_i(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} u_i^{(n)} c^n e^{-\mu_0\tau n}$, где c – произвольная постоянная. Ряды Каменкова сходятся для всех τ и описывают частный класс асимптотически-равномерных движений гиростата относительно вертикали с одной произвольной постоянной.

Таким образом, построены новые классы решений уравнений Кирхгофа–Пуассона в виде рядов Ляпунова, описывающие асимптотически–равномерные движения сферического гиростата.

Юрьева Ольга Дмитриевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,
e-mail: yurjevaod@mail.ru

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Юрьева О.Д.

Для динамически симметричного гироскопа в кардановом подвесе рассматривается задача управления его движением посредством моментов, приложенных к внешней и внутренней рамкам. Уравнения движения такого гироскопа имеют вид.

$$\begin{gathered}(A+A_2)\ddot{\vartheta}=((A+B_2-C_2)\sin\vartheta\cos\vartheta)\dot{\psi}^2-\mu C\dot{\psi}\sin\vartheta+Mgz_0\sin\vartheta+M_\vartheta\\ ((A+B_2)\sin^2\vartheta+C_2\cos^2\vartheta+A_1)\ddot{\psi}=\mu C\sin\vartheta\dot{\vartheta}+2(C_2-A-B_2)\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\psi}+M_\psi\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь A,B,C - главные моменты инерции ротора, A_2,B_2,C_2 - главные моменты инерции внутренней рамки, A_1 - момент инерции внешнего кольца относительно неподвижной вертикальной оси L_1; M - масса ротора и внутреннего кольца; z_0 - координата центра масс ротора и внутреннего кольца в системе координат ось z которой направлена по главной центральной оси инерции тела L; ψ - угол поворота внешней рамки, ϑ - угол поворота внутренней рамки, угол между осями L_1 и L, φ - угол поворота ротора относительно внутренней рамки вокруг оси L.

При значениях

$$M_\psi^0=(C_2+A_1)\ddot{\psi}_0 \text{ и } M_\vartheta^0=0 \tag{2}$$

система имеет обобщенное стационарное движение

$$\dot{\psi}=\dot{\psi}_0(t),\quad \dot{\vartheta}=0\quad \vartheta=0. \tag{3}$$

Уравнения возмущенного движения в переменных $y_1=\vartheta,\ y_2=\dot{\psi}-\dot{\psi}_0(t)$ согласно (1) и (2) определяются в виде:

$$\begin{aligned}&(A+A_2)\ddot{y}_1=(A_2+B_2-C_2)(y_2+\dot{\psi}_0(t))^2\sin y_1\cos y_1-\mu C(y_2+\psi_0(t))\sin y_1+M_y^1,M_y^1=M_\vartheta\\ &((A+B_2)\sin^2 y_1+C_2\cos^2 y_1+A_1)\ddot{y}_2=\mu C\sin y_1\cdot\dot{y}_1+\\ &+2(C_2-A-B_2)\sin y_1\cos y_1(y_2+\psi_0(t))+(C_2-A-B_2)\sin^2 y_1\cdot\ddot{\psi}_0(t)+M_y^2,M_y^2=M_\psi-M_\psi^0.\end{aligned}$$

Найдены условия, накладывающие ограничения на правые части данной системы, при которых задача приведения в заданное программное движение за конечный промежуток времени решается на основе метода, предложенного в работе [1]. Показано, что под действием моментов вида

$$M_y^1=\mu_1 sign\left(\dot{y}_1+\sqrt{|y_1|}sign\,y_1\right),\quad M_y^2=-\mu_2 sign\,y_2,$$

каждое возмущенное движение, ограниченное областью $\left\{|y_1|\le\frac{\varepsilon_1^2}{2},|\dot{y}_1|\le\varepsilon_1,|y_2|\le\varepsilon_2\right\}$, приводится к обобщенному стационарному движению (3) за конечный промежуток времени. Проведено численное моделирование процесса управления.

1. Андреев А.С., Беликова Е.И. Задача о синтезе управления в автономной нелинейной системе // Обозрение прикладной и промышленной математики. М.: О.ПиПМ. Т.15 Вып. 4. 2008. С. 652-653.

Ясинский Владимир Кириллович, доктор физ.-мат. наук, профессор
ЧНУ имени Юрия Федьковича, Черновцы, Украина
e-mail: yasinsk@list.ru
Бодрик Надежда Петровна, студентка 5 курса, факультет прикладной математики
ЧНУ имени Юрия Федьковича, Черновцы, Украина
e-mail: bodryk-n@yandex.ru

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФУЗИОННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ (НСДДРУ ЧП) С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ясинский В.К., Бодрик Н.П.

На вероятностном базисе $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}\equiv\left\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\right\},\mathbb{P}\right)$ задана случайная функция $u\left(t,x,\omega\right)$: $\left[0,\infty\right)\times\mathbb{R}^1\times\Omega\to\mathbb{R}^1$ как сильное решение НСДДРУ ЧП с марковскими параметрами $\xi\equiv\xi(t,\omega):\left[0,\infty\right)\times\Omega\to\mathbb{R}^1$ для $t\geq 0$ [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}A_1\left(\xi\left(t\right),\dot{u}_t,\dot{u}_x\right)+A_2\left(\xi\left(t\right),\dot{u}_t,\dot{u}_x\right)+A_3\left(\xi\left(t\right),\dot{u}_t\left(t-\tau,x\right),\dot{u}_x\left(t-\tau,x\right)\right)=$$
$$=A_4\left(\xi\left(t\right),\dot{u}_t,\dot{u}_x\right)\dot{w}_1\left(t\right)+A_5\left(\xi\left(t\right),\dot{u}_t\left(t-\tau,x\right),\dot{u}_x\left(t-\tau,x\right)\right)\dot{w}_2\left(t\right) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$A_1\left(\xi\left(t\right),\dot{u}_t,\dot{u}_x\right)\Big|_{-\tau\leq t\leq 0}=\left[Au\right]_{[-\tau,0]}. \tag{2}$$

Здесь операторы $A_l\left(\bullet,\bullet,\bullet\right), l=\overline{1,5}$, по определению равны соответственно $A_l\left(\bullet,\bullet,\bullet\right)\equiv$ $\equiv\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{kj}^{(l)}\dot{u}_t\dot{u}_x$, $\left\{a_{kj}^{(l)}\right\}\subset\mathbb{R}^1$; при $\forall t^*\in\left[0,\infty\right)$ стохастически непрерывный марковский процесс $\xi^*\equiv\xi^*(t,\omega):\left[0,\infty\right)\times\Omega\to\mathbb{R}^1$ принимает значение $y\in\mathbb{Y}$ - компактного пространства; $w_i\left(t\right)\equiv w_i\left(t,\omega\right):\left[0,\infty\right)\times\Omega\to\mathbb{R}^1$ - стандартные винеровские процессы [2].

Сильное решение задачи Коши (1), (2) рассматривается в пространстве $\mathfrak{M}_T$ случайных функций $u\equiv u\left(t,x,\omega\right)$ с нормой $\left\|u(t,x)\right\|^2\equiv\int_0^T\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u(t,x)\right|^2dx\right]^2dt.$

Установлено, что преобразование Фурье по x от случайной функции $u\left(t,x,\omega\right)$ не выводит её из $\mathfrak{M}_T,\left[0,T\right]\subset\mathbb{R}_+$.

Доказано: I) существование сильного решения задачи Коши (1), (2) в $\mathfrak{M}_T$;

II) с помощью второго метода Ляпунова доказаны асимптотическая стохастическая устойчивость, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость в *l.i.m.* тривиального решения задачи Коши;

III) глобальная экспоненциальная устойчивость $u\left(t,x\right)\equiv 0$ задачи (1), (2);

Как модельная задача рассмотрены устойчивости (в смысле определений II)) НСДДРУ ЧП задачи Коши (1), (2) с дискретными марковскими параметрами [2].

1. Беллман Р.,Кук К.Дифференциально-разностные уравнения.–М.:Наука, 1968. – 640 с.
2. Королюк В.С., Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Вероятность, статистика и случайные процессы. Теория и компьютерный практикум. – Черновцы: Золотые литавры, 2009. – 798 с.

Ясинський Володимир Кирилович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: Yasinsk@list.ru;
Лукашів Тарас Олегович, асистент,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: lukashiv@rambler.ru

ПРО АСИМПТОТИЧНУ СТОХАСТИЧНУ СТІЙКІСТЬ В ЦІЛОМУ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВОЮ СТРУКТУРОЮ

Ясинський В.К., Лукашів Т.О.

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\})$ [1], розглядається рівняння збуреного руху, яке будемо трактувати як динамічну систему випадкової структури зі скінченною післядією

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), x(t-r))dt + b(t, \xi(t), x(t), x(t-r))d\omega(t), \tag{1}$$

із зовнішніми марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\big|_{t=t_k} = g(t_k -, \xi(t_k -), \eta_k, x(t_k -)), \quad t_k \in S \equiv \{t_n, n \in N\}, \ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \tag{2}$$

і з початковими умовами

$$x(t)\big|_{-r\leq\theta\leq 0} = \varphi(\theta) \in \boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}([-r,0], \boldsymbol{R}^m), \quad \xi(t_0) = y \in \boldsymbol{Y}, \ \eta_{k_0} = h \in \boldsymbol{H}. \tag{3}$$

Тут $\xi(t)$ – марковський процес із значеннями в метричному просторі $\boldsymbol{Y}$ з перехідною ймовірністю $\boldsymbol{P}(s, y, t)$ [1]; $(\eta_k, k \geq 0)$ – ланцюг Маркова із значеннями в метричному просторі $\boldsymbol{H}$ з перехідною ймовірністю на k-ому кроці $\boldsymbol{P}_k(h, G)$ [1]; $\theta \in [-\tau, 0]$, $\tau > 0$; $w(t)$ – одновимірний стандартний вінерів процес, $\boldsymbol{D}$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі з нормою $\|\varphi\| = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|$.

Припустимо:

1) вимірні за сукупністю змінних відображення $a : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$; $b : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$; $g : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times H \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ задовольняють умову Ліпшиця

$$|a(t, y, \varphi_1, \varphi_2) - a(t, y, \psi_1, \psi_2)|^2 + |b(t, y, \varphi_1, \varphi_2) - b(t, y, \psi_1, \psi_2)|^2 + |g(t, y, h, \varphi_3) - g(t, y, h, \psi_3)|^2 \leq$$
$$\leq L\left(|\varphi_1 - \psi_1|^2 + |\varphi_2 - \psi_2|^2 + |\varphi_3 - \psi_3|^2\right), \ L > 0,$$

при $\forall t \geq 0$, $y \in Y$, $h \in H$;

2) $0 < |t_{k+1} - t_k| \leq \Delta$, $k \geq 0$, $\Delta > 0$;

3) існують функції Ляпунова [2], $v_k(y, h, \varphi)$, $a_k(y, h, \varphi)$, $k \geq 0$, такі що на розв'язках системи (1)-(3) правильна рівність $lv_k(y, h, \varphi) \leq -a_k(y, h, \varphi)$.

Доведено, що при вищевказаних припущеннях система випадкової структури (1)-(3) асимптотично стохастично стійка в цілому.

1. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1969. – 859 с.
2. Лукашив Т.О., Юрченко И.В., Ясинский В.К. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. I. Общие теоремы об устойчивости импульсных стохастических систем. Кибернетика и системный анализ. – 2009. – №2. – С. 135-145.

Ясинский Владимир Кириллович, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедры стохастического и системного анализа факультета прикладной математики
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича, Черновцы, Украина,
e-mail: yasinsk@list.ru;
Юрченко Игорь Валерьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры стохастического и системного анализа факультета прикладной математики
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича, Черновцы, Украина,
e-mail: yurchiv@ukr.net

ПОВЕДЕНИЕ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ясинский В.К., Юрченко И.В.

На вероятностном базисе $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t,t\ge 0\},\mathbb{P}\right)$ задано сильное решение $u\equiv u(t,x,\omega)$: $[0,\infty)\times\mathbb{R}^1\times\Omega\to\mathbb{R}^1$ нелинейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных (НСДУвЧП) с марковскими параметрами

$$\frac{\partial}{\partial t}Q\left[A\left(t,\xi(t),\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]=B\left(t,\xi(t),\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial t}C\left(t,\xi(t),\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dw(t,\omega)}{dt}, \tag{1}$$

$$Q\left[A\left(t,\xi(t),\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{t=0}=[Qu]_0\ , \tag{2}$$

где

$$Q\left[A\left(t,\xi(t),\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\equiv\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{kj}\left(t,\xi(t),\frac{\partial^k u}{\partial t^k},\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right);$$

$$Q\left[B\left(t,\xi(t),\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\equiv\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_{kj}\left(t,\xi(t),\frac{\partial^k u}{\partial t^k},\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right);$$

$$Q\left[C\left(t,\xi(t),\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\equiv\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{kj}\left(t,\xi(t),\frac{\partial^k u}{\partial t^k},\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right),$$

A,B,C – матрицы размерности $n\times m$, содержащие в качестве элементов a_{kj},b_{kj},c_{kj} бэровские функции, зависящие от $t\in[0,\infty)$, $\xi(t)\in\mathbb{Y}$ – стохастический непрерывный марковский процесс с непрерывными справа реализациями, $w(t,\omega)$ – стандартный винеровский процесс, $\frac{dw(t,\omega)}{dt}$ – “белый шум”.

Установлено: 1) существование с вероятностью единица сильного решения задачи Коши для НСДУвЧП (1), (2); 2) с помощью второго метода Ляпунова доказана асимптотическая устойчивость тривиального решения задачи (1), (2) в среднем квадратическом при выполнении определенных условий; 3) с помощью второго метода Ляпунова доказана глобальная экспоненциальная устойчивость тривиального решения $u\equiv 0$ стохастической задачи Коши (1), (2).

1. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. В 3-х т.– Т.3. Випадкові процеси. Теорія та комп’ютерний практикум.– Чернівці: Золоті литаври, 2009.– 798 с.

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION

MODELLING

&

STABILITY

Section 2

MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES

Jaromr Baštinec,
Brno University of Technology, Technická 8, 616 00 Brno, Czech Republic,
Denys Khusainov,
Taras Shevchenko National University of Kiev, 01033, Ukraine, Kiev, 64 Volodymyrska str.,
Ganna Piddubna,
Brno University of Technology, Technická 8, 616 00 Brno, Czech Republic
e-mail: bastinec@feec.vutbr.cz, khusainov@unicyb.kiev.ua, xpiddu00@stud.feec.vutbr.cz

SOLUTION OF A CERTAIN CLASS OF MATRIX LINEAR DELAYED SYSTEM

Baštinec J., Khusainov D., Piddubna G.

We investigated the existence of solutions of a certain class of differential matrix linear delayed equation. The solution we find in general form. The basic role in proof has the special matrix function, so called matrix exponential, and its properties.

Let we have the equation

$$\dot{X}(t) = AX(t) + AX(t-\tau), \tag{1}$$

with initial condition

$$X(t) \equiv I, \qquad -\tau \le t \le 0, \tag{2}$$

where A is square matrix, I is the identity matrix, $\tau > 0, \tau \in R$ is a constant delay.

Definition. Let A be a square matrix. Matrix exponential is defined by

$$^{At} = I + A\frac{t}{1!} + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!}.$$

Theorem 1. Let A is regular. Then the solution of equation (1) with initial condition (2) has the recurrence form:

$$X_{n+1}(t) = ^{A(t-n\tau)} X_n(n\tau) + \int_{n\tau}^{t} {}^{A(t-s)} AX_n(s-\tau)ds,$$

where $X_n(t)$ is defined on the interval $(n-1)\tau \le t \le n\tau$.

Theorem 2. Let A is regular. Then the solution of equation (1) with initial condition (2) has the form:

$$\mathrm{X}_n(t) = \sum_{k=o}^{n-1} 2^{A(t-k\tau)} \left(\sum_{p=0}^{k} (-1)^{p+k} A^p \frac{(t-k\tau)^p}{p!} \right) + (-1)^n I,$$

where $\mathrm{X}_n(t)$ is defined on the interval $(n-1)\tau \le t \le n\tau$.

If we have initial condition in the form

$$X(t) \equiv \varphi(t)_{,} \ -\tau \le t \le 0, \tag{3}$$

where $\varphi(t) \in C^1[-\tau, 0]$, then we could write the following result.

Theorem 3. [1] Let A is regular. Then the solution of equation (1) with initial condition (2) have the form:

$$X(t) = \mathrm{X}_n(t)\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \mathrm{X}_n(t-\tau-s)\varphi'(s)ds,$$

where $\mathrm{X}_n(t)$ is the solution of the same equation with identity initial condition, defined in Theorem 2.

Let we have the linear heterogeneous equation with delay

$$\dot{X}(t) = AX(t) + AX(t-\tau) + F(t). \tag{4}$$

Theorem 4. [1] Let A is regular. Then the solution $\overline{X(t)}$ of the heterogeneous equation (4) with zero initial condition, has the form

$$\overline{X(t)} = \int_0^t \mathrm{X}_n(t-\tau-s)F(s)ds, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

where $\mathrm{X}_n(t)$ is the solution of the equation (1) with identity initial condition, defined in Theorem 2.

Theorem 5. [1] Let A is regular. The solution of heterogeneous equation (4) with the initial condition (3) has the form

$$X(t) = \mathrm{X}_n(t)\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \mathrm{X}_n(t-\tau-s)\varphi'(s)ds + \int_0^t \mathrm{X}_n(t-\tau-s)F(s)ds, \tag{6}$$

where $\mathrm{X}_n(t)$ is the solution of the equation (1) with identity initial condition, defined in Theorem 2.

Acknowledgement

This research was supported by the Grant 201/10/1032, 201/08/9469 of Czech Grant Agency and by the Council of Czech Government MSM 0021630529 and by Grant FEKT-S-11-2-921 of Faculty of Electrical Engineering and Communication, BUT.

1. *BAŠTINEC, J., PIDDUBNA, G.: Controllability of stationary linear systems with delay.* 10th International conference APLIMAT. Bratislava, FME STU. 2011, 207 - 216. ISBN 978-80-89313-51-8.

2. *BOICHUK, A., DIBLÍK, J., KHUSAINOV, D., R23 UŽIČKOVÁ, M.,: Boundary Value Problems for Delay Differential Systems*, Advances in Difference Equations, vol. 2010, Article ID 593834, 20 pages, 2010. doi:10.1155/2010/593834

3. *BOICHUK, A., DIBLÍK, J., KHUSAINOV, D., R23 UŽIČKOVÁ, M.,: Fredholm's boundary-value problems for differential systems with a single delay,* Nonlinear Analysis, **72** (2010), 2251--2258. (ISSN 0362-546X)

4. *DIBLÍK, J., KHUSAINOV, D., LUKÁČOVÁ, J., R23 UŽIČKOVÁ, M., : Control of oscillating systems with a single delay*, Advances in Difference Equations, Volume 2010 (2010), Article ID 108218, 15 pages, doi:10.1155/2010/108218.

5. *BOICHUK, A., DIBLÍK, J., KHUSAINOV, D., R23 UŽIČKOVÁ, M.,: Controllability of linear discrete systems with constant coefficients and pure delay,* SIAM Journal on Control and Optimization, **47**, No 3 (2008), 1140--1149. DOI: 10.1137/070689085, url = http://link.aip.org/link/?SJC/47/1140/1. (ISSN Electronic: 1095-7138, Print: 0363-0129)

6. *KHUSAINOV D.Ya., IVANOV A.F., SHUKLIN G.V..: About a single submission of solution of linear systems with delay.* Differential equations. 2005. No.41,7. 1001-1004. (In Russian)

7. *KHUSAINOV D.Ya., SHUKLIN G.V.: About relative controllability of systems with pure delay.* Applied Mechanics. 2005. No.41,2. 118-130. (In Russian)

Dolenko Galyna Alexandrovna, Dr. Sci. (Phys.–Math.), As.Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: galinadolenko2006@yandex.ru;
Manovytska Dariia Alexandrovna, second-year student, faculty of cybernetics,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: manovitska_dariia@ukr.net

MATHEMATICAL MODEL OF REGIONAL ECONOMIC INDICATOR DEFINITION PROBLEM

Dolenko G.A., Manovytska D.A.

The regional economic development research domain offers huge potentialities [1-3].

The mathematical model of result indicators definition problem for regional economic development is proposed in the paper, as the following: $\langle T, L, \Phi \rangle$.

T is a result indicators tree. T is built on the base of the hierarchy decomposition of criterion.

On the first level of hierarchy T is the main goal of organizational systems F0.

Criteria of socio-economic development of organizational systems Fs, s = 1, …, S, (sub goals of F0) are represented on the second level of hierarchy T.

Subsystems of organizational system Ri, i = 1,…, m are represented on the third level of hierarchy T. For the task of regional development indicators evaluation Ri, i = 1, …, m, are ratings [4] of regions.

Φ - system of preference relations of some factors over others at each level of hierarchy T:

$$\Phi = \{F_i(\varphi)F_j | \varphi \in (\succ, \approx), i \neq j\},$$

where: $\succ$ - preference; $\approx$ - indifference. The linguistic variable L is described through five linguistic values:

L = {Very Low Level (VL), Low Level (L), Average Level (A), High Level (H), Very High Level (VH)}.

L is a set of qualitative assessments of levels for each criterion and each region in the hierarchy T, that we want to find.

Our proposed approach empowers analysts to explore the effectiveness of regional economic development using hierarchical techniques, the fuzzy sets theory and the elements of applied statistics theory.

1. Dolenko G., Multicriteria decision making problem of financial capital market// PDMU-2009 (International Conference- Problems of Decision Making under Uncertainties), Ukraine, April 27-30, 2009, - P. 20-21.

2. Methodological approach to forming of monitoring and evaluation system for innovation economy development of Russian’s regions, Project № 07-02-64201a/T.

3. Sables M., Regional Policy DSS: Result Indicators Definition Problems, Collaborative Decision Making: Perspectives and Challenges, edited by P. Zarate, IOS Press, 2008, 485-492.

4. http://www.kmu.gov.ua

Gonchar Nicholas Semenovych,
Bogolyuobov Institute for Theoretical Physics, Kiev, Ukraine
e-mail: mhonchar@i.ua, mgonchar@bitp.kiev.ua

BANK CAPITALIZATION THEOREM

Gonchar N.S.

A new model of bank work is proposed. A bound on probability do not become bankrapt is obtained.

There are n possible results of investment in every period of bank operation. Suppose that a bank have an initial capital x. Evolution of bank capital happens in discrete moment of time $n = 1,2,...$ by the following way: having capital x at zero moment, in the next period of its operation, a bank invests this capital into some actives such that with probability p_1 it can lose some part of capital and with probability p_i, $i = \overline{2,n}$, it can increase its capital. We suppose that $0 > b_1 > -1$, $b_i > b_{i-1} \geq 0, i = \overline{2,n}$. Then the capital of bank at time $t = 1$ have the form

$$R_1 = x(1+\varphi_1) + Y_1 - Z_1, \qquad (1)$$

where Y_1 is non negative random variable taking values in interval $[C_0, C]$, $C_0 \geq 0, 0 < C < \infty$, and describing the size of deposits coming to the bank in the first period of bank operation, Z_1 is non negative random variable describing liabilities to creditors. Doing so, at the time moment $t = n$ the capital of bank will be equal

$$R_n = R_{n-1}(1+\varphi_n) + Y_n - Z_n, n = 1,2,..., \qquad (2)$$

where the sequences of random variables Y_k, $k = 1,2,...,$ and Z_i, $i = 1,2,...$ are independent between themselves and identically distributed. We also suppose that the sequences of random variables φ_i, $i = 1,2,...,$ Y_k, $k = 1,2,...,$ and Z_i, $i = 1,2,...$ are independent.

Theorem. **(Bank capitalization Theorem)**

Suppose that inequalities $0 < p_1 < 1$ holds and the initial capital of bank is greater than $\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}K$, where

$$K = \frac{T_1}{b_2} + \frac{T_1}{(1+b_1)}, \quad \alpha = \frac{1}{(1+b_1)},$$

then the probability to become bankrupt for n steps $\psi_n(x) \leq p_1$ for all $x \geq \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}K$.

1. *N.S. Gonchar,* Mathematical Foundations of Information Economics. // Kiev:Bogolyubov Institute for Theoretical Phisics, 2008. -- 468p.

Krylova Anastasiya Sergiivna, PhD,
Taras Shevchenko National University of Kiev , Kiev, Ukraine,
e-mail: krylovaas@univ.kiev.ua;

THE q-PERIODIC SPECTRAL PROBLEM ON A CROSS STRING

Krylova A.S.

This work is about the modeling of a periodic network fragment on a cross string. Eigenspaces structure research is carried out for the spectral problem on this cross with q-periodicity boundary conditions, the contact condition and the balance condition of tension. Varied oscillations' modelling gives the basis for boundary problem research for second-order differential equations on a segment. These kinds of problems appear while performing analysis of difficult systems' processes such as periodic network [1].

Consider the eigenvalue problem for the system differential equations

$$-u_1'' = \lambda u_1, \quad -u_2'' = \lambda u_2, \tag{1}$$

on the cross string, where the function u is complex-valued and satisfies the following boundary conditions for $q \in [0,1)$

$$u_1(0) = e^{i2\pi q}u_1(1), \quad u_2(0) = e^{i2\pi q}u_2(1),$$
$$u_1'(0) = e^{i2\pi q}u_1'(1), \quad u_2'(0) = e^{i2\pi q}u_2'(1).$$

The system (1) also satisfies the contact condition and the balance condition of tension (see [1]).

Theorem. Let above mentioned problem on the two-demensional cross string with the unit length of string is given then solution is eigenvalues $\lambda = 4\pi^2(n-q)^2$, $n \in \mathbb{Z}$ and the following complex-valued eigenfunctions:

a) if $2q = 0$ $2q = 1$ then

$$u_1 = Ae^{i2\pi(n-q)x_1} + Ce^{-i2\pi(n-q)x_1}, x_1 \in [0,1],$$
$$u_2 = Ae^{i2\pi(n-q)x_2} + Ce^{-i2\pi(n-q)x_2}, x_2 \in [0,1];$$

b) if $2q \not\in \mathbb{Z}$ then

$$u_1 = Ae^{i2\pi(n-q)x_1}, x_1 \in [0,1], \quad u_2 = Ae^{i2\pi(n-q)x_2}, x_2 \in [0,1];$$

where A, C - arbitrary constants.

Thus we considered the theorem about eigenspaces' structures on the two-demensional unit cross string. We got two-demensional eigenspaces for parameter value q which correspond to the 0 and $\frac{1}{2}$. Eigenspaces are one-dimensional for all other values of this parameter in the interval $[0,1)$.

The transition from the fragment to the whole network we will implement on the basis of the averaging theory [2], [3].

1. Differential equations on geometrical graphs/ *Y. V. Pokornii, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev.* -- M.: FizMatLit, 2005. -- 272 p. (in Russian) 2. *Maz'ya V. G. Slytski A. S.* Homogenization of difference equations with rapidly oscillating coefficients. // Seminar Analysis Operator equat. and numerical analysis 1986/87, Karl-Weierstrab-Institut f*ü* r Mathematik, Berlin. --- 1987. --- p. 63--92 3. *Sandrakov G. V.* Averaging principles for eguations with rapidly oscillatory coefficients, Mat. Sb., 180:12. --- 1989 --- p. 1634-1679

Maslovskaya Anna Gennadievna, PhD, Ass. Prof.,
Amur State University, Blagoveshchensk, Russia,
e-mail: maslovskayaag@mail.ru ;
Sivunov Anton Valerievich, postgraduate student, department of mathematics and computer sciences,
Amur State University, Blagoveshchensk, Russia,
e-mail: tohaamsu@mail.ru

DYNAMIC PROCESSES SIMULATION IN FERROELECTRICS UNDER ELECTRON BEAM EXPOSURE

Maslovskaya A.G., Sivunov A.V.

Nowadays the scanning electron microscopy methods are widely used practically in condenser matter physics to study properties and structure of solids. The electron probe of scanning electron microscope is not merely a passive indicator of the geometrical or potential profiles of the sample surface, but also the source producing ionization, electric and thermal action on the sample [1-2]. The application of raster electron techniques to polar materials, responding to electric and heat exposures of the electron bunches permits getting a response and creating new modes of image formation and studying electric properties of samples [2]. The research problems of electron bunches influence on investigated samples, and also studying and theoretical justification of the basic principles and mechanisms of electronic probe interaction with materials are important directions in this field of study.

This article considers the results of dynamic process simulation caused by factors of thermal nature in ferroelectrics under the investigation with the scanning electron microscope. The some theoretical aspects of charging effects of electron beam interaction with ferroelectric crystals are also presented.

The simulation of heat transfer and charging processes are realized provided by Matlab programming and Comsol Multiphysics application package designed for diffused processes and phenomena modeling.

The calculation results of non-stationary thermal fields in ferroelectric crystals due to concentrated heat flows influence of various spatial configurations are submitted. The parameters of electron deposition distribution are determined by a Monte-Carlo simulation of electron trajectories in the specimen. The computation is associated with typical ferroelectric crystal TGS exposed to middle level energy electron bunches (10-40keV). The solution of the problem of heat conductivity is based on numeric methods. The analysis of modeling results is submitted with respect to various parameters of the samples and experimental conditions, specifically to uncoated sample surface and to ferroelectrics with thin metal electrodes. The geometrical interpretations and animation results demonstrating thermal distribution are suggested to the cases of the persistent and pulse beam intensity.

To simulate the charging mechanism of ferroelectric crystals as a time function a mathematical model is proposed. The calculation is based on the joint numerical solving of the continuity equation and Poisson equation taking into account the intrinsic radiation-induced diffusion processes. The initial electron distribution determined by Monte-Carlo methods is also included. Variables and model parameters were normalized. The mathematical model of the time-dependent charging process in ferroelectrics allows to investigate the dynamics of charging process, and also to estimate the potential distribution at the given experimental parameters.

1. Cazaux J. Mechanisms of charging in electron spectroscopy // Journal of electron spectroscopy and Related Phenomena. - 1999. - V. 105. - P. 155-185.
2. Sogr A.A., Maslovskaya A.G., Kopylova I.B. Advanced modes of imaging of ferroelectric domains in SEM. // Ferroelectrics. - 2006. - V. 341. - P. 29-37.

Ovcharenko Olena Valerivna,
National University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine,
e-mail: lena_rum@ukr.net

THE Q-INTEGRAL REPRESENTATION OF THE GENERALIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTION

Ovcharenko O.V.

Let us introduce a new generalized hypergeometric function in the form of series:

$$ {}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=\frac{\Gamma_q(c)}{\Gamma_q(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\Gamma_q(b+\tau n)}{\Gamma_q(c+\beta n)}\frac{z^n}{(q;q)_n}, \tag{1}$$

where a,b and c are real or complex numbers, $\{\tau;\beta\}\subset R, \tau>0, \beta>0, 1+\beta-\tau>0, c\neq 0,-1,-2,...$, $|z|<1, |q|<1$, $\Gamma_q(b+\tau n)$ and $\Gamma_q(c+\beta n)$ are finite for integer n; q-shifted factorial is defined as $(\alpha;q)_n=\begin{cases}1 & ;if\ n=0\\ (1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})...(1-q^{\alpha+n-1}); & if\ n\in N\end{cases}$, where α real or complex, $|q|<1$ or in terms of q-Gamma function:

$$(\alpha;q)_n=\frac{\Gamma_q(\alpha+n)(1-q)^n}{\Gamma_q(\alpha)},\ n>0$$

where

$$\Gamma_q(\alpha)=\frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;\omega)_\infty(1-q)^{\alpha-1}}.$$

The fractional q-derivative of order $\delta>0$ for function $\varphi(t)=t^{\lambda-1}$ is

$$D_{q,t}^{\delta}(t^{\lambda-1})=\frac{\Gamma_q(\lambda)t^{\lambda-\delta-1}}{\Gamma_q(\lambda-\delta)},\ \lambda\neq 0,-1,-2,...$$

Let to note that if $q\to 1$ in (1) we get the generalized hypergeometric Gauss function ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ [1].

For new generalized hypergeometric function

$$ {}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)=\frac{\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\Gamma_q(b_1+\tau n)\Gamma_q(b_2+\tau n)}{\Gamma_q(c_1+\tau n)\Gamma_q(c_2+\beta n)}\frac{z^n}{(q;q)_n} \tag{2}$$

integral representation is:

$$ {}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)=\frac{\Gamma_q(c_1)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(c_1-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}\frac{(tq;q)_\infty}{(tq^{c_1-b_1};q)_\infty}{}_2^qF_1^{\tau,\beta}(a,b_2;c_2;zt)d_qt,$$

where $\mathrm{Re}(c_1)>\mathrm{Re}(b_1)>0$, $\mathrm{Re}(c_2)>\mathrm{Re}(b_2)>0$, $\{\tau;\beta\}\subset R, \tau>0, \beta>0, 1+\beta-\tau>0$, $|z|<1, |q|<1$.
Interesting to note that in case $b_1=c_1$, (2) reduced to (1).

1. Virchenko N.O., Rumiantseva O.V. On the generalized associated Legendre functions // J. Fractional Calculus and Appl. Analysis. – 2008. – 11,№2. – P.175-185.

Zdeněk Svoboda
Brno University of Technology, Technická 8, 616 00 Brno, Czech Republic
e-mail:svobodaz@feec.vutbr.cz

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SYSTEM OF THE DELAYED LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SPECIAL TYPE

Zdeněk Svoboda

The investigations of properties of the linear system differential equation with the constant matrix and constant delay i.e.

$$\dot{y}(t) = Ay(t-r), \tag{1}$$

where A is square constant matrix and $r > 0$ is a constant which is based on the step by step method use the notation of the delayed exponential of matrix e_r^{At}. This matrix function is defined according to intervals and for asymptotic investigation of these equation is suitable to find the matrix C such that exponential e^{Ct} of this has the same asymptotic properties i.e. holds $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e_\tau^{An\tau} - e^{Cn\tau}\right) = 0$. The matrix C holds so called characteristic equation of the system (1)

$$C = Ae^{-Cr} \equiv Ce^{Cr} = A \quad . \tag{2}$$

For constant matrix A which Jordan canonical form is diagonal matrix i.e. there is invertible matrix P such that $A = P^{-1}diag(\ldots\lambda_j\ldots)P$ and for which modules of eigenvalues satisfy $e\,|\,\lambda_j\,|\,r < 1$ there is the constant matrix C such that

$$e^{-Cr} = P^{-1}diag(\ldots\frac{W_0(\lambda_j r)}{\lambda_j r}\ldots)P,$$

where $W_0(x)$ is the principal branch of known LambertW function, see [5]. The exponential e^{Ct} bounds exponentials $e^{\hat{C}t}$ of other matrices $\widehat{C}$ satisfying (2) which eigenvalues depend on values of other branches of LambertW function, for more details see [1].

Analogous technique for the system of linear differential equations of the second order with the constant matrix and the constant delay in the form:

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t-\tau) = 0, \tag{3}$$

introduces the notation of the delayed matrix sine and cosine. Using the identities

$$Cos_\tau\Omega\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = \frac{e_{\frac{\tau}{2}}^{i\Omega t} + e_{\frac{\tau}{2}}^{-i\Omega t}}{2} \qquad Sin_\tau\Omega(t-\tau) = \frac{e_{\frac{\tau}{2}}^{i\Omega t} - e_{\frac{\tau}{2}}^{-i\Omega t}}{2i}, \tag{4}$$

which hold for any square matrix Ω, is possible investigate the asymptotic properties of these matrix functions. The relations (4) accord with the possibility rewrite the characteristic equation of the equation (3) in the form

$C^2e^{C\tau} = -\Omega^2$ and as the couple of two equations $Ce^{C\tau/2} = \pm i\Omega$,

which has interpretation that the solutions of systems of linear equations with the matrix $-i\Omega$ resp. $i\Omega$ and delay $\tau/2$ are solutions of the system (3). The analogous consideration are possible for other linear differential equations of higher order of special type:

$$A_n x^{(n)}(t) + A_{n-1}x^{(n-1)}(t-\tau) + \ldots + A_1\dot{x}(t-(n-1)\tau) + A_0 x(t-n\tau) = 0. \tag{5}$$

This equation has the characteristic equation:

$$A_nC^n + A_{n-1}C^{n-1}e^{-\tau C} + \ldots + A_1Ce^{-(n-1)\tau C} + A_0e^{-n\tau} = 0.$$

As characteristic polynomial of the equation (5) is called polynomial:

$$P(C) = A_n C^n + A_{n-1} C^{n-1} + \ldots + A_1 C + A_0 \quad (6)$$

Theorem.1 *Let there is matrix* B *such that this is the root of characteristic polynomial i.e.* $P(B) = 0$. *Then the matrix function* e_τ^{Bt} *is matrix solution of the equation (5). If moreover the canonical form of matrix* B *is a diagonal matrix with real number* λ_i *satisfying the condition* $|\lambda_i \tau| < \frac{1}{e}$ *i.e. there is invertible matrix* P *such that* $B = P^{-1} diag(\ldots \lambda_j \ldots) P$, *then exponential of matrix* e^{Ct} *has the same asymptotic behavior, where* $C = P^{-1} diag(\ldots W_0(\lambda_j \tau) / \tau \ldots) P$.

Remark.2 *For the complex matrix* B *which is root of characteristic polynomial i.e.* $P(B) = 0$ *the complex conjugate matrix* $\overline{C}$ *is root of characteristic polynomial,too (* $P(\overline{C}) = 0$ *) 2 then there is a couple of the real matrix functions*

$$\frac{e_\tau^{Ct} + e_\tau^{\overline{C}t}}{2} \text{ and } \frac{e_\tau^{Ct} - e_\tau^{\overline{C}t}}{2i}$$

which are solutions of the equation (5). For multiple roots root of characteristic polynomial there is the hypothesis :

Let the real matrix B *is multiple roots of characteristic polynomial) i.e.*

$$P(B) = P'(B) = \ldots P^{(k)}(B) = 0 \text{ and } p^{(k+1)}(B) \neq 0.$$

Then the matrix functions $e_\tau^{Bt}, te_\tau^{Bt}, \ldots t^{k-1} e_\tau^{Bt}$ *are solutions of the equation (5).*

Acknowledgement

The paper was supported by grant Czech Grant Agency (Prague) no. P201-11-0768 and by the Czech Ministry of Education in the frame of projects MSM002160503

1. R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. E. Knuth, *On the Lambert W Function* Advances in Computational Mathematics, Vol 5 (1996), 329-359.

2. J. Diblk, D. YA. Khusainov, Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving. J. Math. Anal. Appl. 318 **318** (2006), 6376, ISSN: 0362-546X

3. D. Ya. Khusainov, J. Diblk, M. R u ži č ková, J. Luká č ová *Representation of a solution of the Cauchy problem for an oscillating system with pure delay*, Nonlinear Oscillations, **Vol 11**, No 2, (2008), 276-285

4. D. YA. Khusainov, G. V. Shuklin, *Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving*, Studies of the University of Žilina, Mathematical Series **Vol 16** (2003), 1-8.

5. Z. Svoboda, *Asymptotic properties of delayed exponential of matrix. Journal of Applied Mathematics.* Slovak University of Technology in Bratislava, (2010), p. 167 - 172, ISSN 1337-6365

Азамов Абдулла Азамович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: abdullaazamov@gmail.com;
Исматходжаев Садулла Кудратович, кандидат тех.наук, ведущий научный сотрудник,
Институт энергетики и автоматики АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
Бекимов Мансур Адамбаевич, младший научный сотрудник,
Институт энергетики и автоматики АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: mansu@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОЗДУХОПОДОГРЕВАТЕЛЯ В ВИДЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Азамов А.А., Исматходжаев С.К., Бекимов М.А.

В регенеративных теплообменных аппаратах горячий теплоноситель (дымовые газы) в начале передает тепло твердому наполнителю, который в свою очередь передает тепло холодному теплоносителю (наружному воздуху) [1]. В результате одна и та же поверхность твердого материала, имеющего высокою теплоемкость, омывается в начале горячим, а затем холодным теплоносителем, т.е. происходит попеременный нагрев и охлаждение поверхности теплоемкого материала. Эффективность и экономичность работы регенеративного вращающегося воздухоподогревателя (РВП) существенно зависят от температурного режима теплоносителей. Нахождение распределения температуры по всему объему теплоносителей невозможно ни непосредственными измерениями, ни посредством решения уравнений теплопроводности и газодинамики. В связи с этим широко применяются различные упрощенные математические модели [2, 3]. Один из таких моделей состоит из системы, составляемой на основе дискретизации как структуры РВП, так и динамики процесса (в частности, замена равномерного вращения барабана РВП скачкообразным движением). Рассматривая изменение состояния процесса в дискретные моменты времени $t_{k+1} = k\Delta t$, имеем следующие соотношения для температуры горячего газа, для насадок на горячей части, для температуры холодного воздуха, и для насадок на холодной части соответственно

$$T_g(k+1) = T_g(k) - a_{gi}(T_g(k) - T_i(k)), \qquad (1)$$

$$T_i(k+1) = T_i(k) - a_i(T_g(k) - T_i(k)), \; i = 1, 2, ..., n, \qquad (2)$$

$$T_{\hat{a}}(k+1) = T_{\hat{a}}(k) + a_{\hat{a}i}(T_i(k) - T_{\hat{a}}(k)), \qquad (3)$$

$$T_i(k+1) = T_i(k) - a_i(T_i(k) - T_{\hat{a}}(k)), \; i = n, n+1, \ldots, 2n, \qquad (4)$$

где $a_{gi} = \alpha_i/(c_g \rho_g)$, $a_i = \alpha_i/(c\rho)$, $i = 1, 2, ..., n$, $a_{\hat{a}i} = \alpha_i/(c_{\hat{a}}\rho_{\hat{a}})$, $i = n, n+1, \ldots, 2n$ – безразмерные величины, характеризующие агентов, участвующих в процессе теплообмена,

В зависимости от постановки конкретной задачи, система (1)-(4) может быть изучена как динамическая система (жесткий режим), детерминированная управляемая система, стохастический марковский процесс, а также как дифференциальная игра. Модель позволяет как осуществить расчет распределения температуры по всему объем РВПП-54 котла ТГМ-84, так и синтеза управления калорифера с тремя видами целевой функции.

1. Мигай В.К. и др. Регенеративные вращающейся воздухоподогреватели. − М.: Энергия, 1971. − 169 с.

2. Кирсанов Ю.А. Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухоподогревателях. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.− 240 с.

3. Chi-Liang Lee Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system // Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 32, No. 5, pp. 703-710 (2009)

Азизбеков Эльвин Ибрагим, кандидат физ.-мат. наук, старший преподаватель,
Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан,
e-mail:azel_azerbaijan@mail.ru;
Мегралиев Яшар Топуш, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан,
e-mail:yashar_aze@mail.ru

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ БАЛКИ

Азизбеков Э.И., Мегралиев Я.Т.

Простейшая линейная модель движений однородной балки описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha w+w^3=0,$$

где w - прогиб балки (после смещений точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x). Заметим, что аналогичное уравнение возникает и в теории кристаллов [1].

Теперь рассмотрим уравнение [2]

$$u_{tt}(x,t)+u_{xxxx}(x,t)+\beta u_{xx}(x,t)+\alpha u(x,t)+u^3(x,t)=0 \quad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ и подставим для него задачу с условиями

$$u(x,0)+\delta u(x,T)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)+\delta u_t(x,T)=\psi(x)\ (0\le x\le 1), \quad (2)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)\quad (0\le t\le T), \quad (3)$$

где $\beta>0$, $\alpha>0$, δ - заданные числа, причем $\pi^4-\beta\pi^2+\alpha>0$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные функции, а $u(x,t)$ – искомая функция.

Определение. Под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(x,t)$, непрерывную в замкнутой области D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

В работе доказано существование и единственность классического решения задачи (1)-(3) при некоторых условиях на данные задачи.

1. *Изюмов Ю.*А., *Сыромятников В.И.* Фазовые переходы и симметрия кристаллов. М.: Наука, 1984.
2. *Костин Д.В.* Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки. Доклады Академии Наук, 2008, том 418, № 3, с. 295-299.

Амирханова Гульшат Аманжоловна, магистр
Институт проблем информатики и управления, Алматы, Казахстан,
e-mail: gulshat.aa@ipic.kz;

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИКОЙ НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ БАРРО

Амирханова Г.А.

Проблема стабильного экономического роста является в настоящее время актуальной, и улучшение уровня образования, здоровья, квалификации и возможностей человека является одним из условий устойчивого экономического роста. В настоящее время развитие экономических моделей идет по двум направлениям: экзогенному и эндогенному.

В данной работе рассматривается эндогенная модель Барро [1], в которой учитываются общественные расходы на образованных и квалифицированных специалистов - гарант того, что производство будет наиболее эффективным. Американский экономист Роберт Дж. Барро в 1990 году предложил производственную функцию (1):

$$g = qy = qAk^{1-\alpha}g^{\alpha},$$

где q - доля валового национального продукта, представляющая общественные расходы на развитие человеческого капитала, $k = \frac{K}{L}$ -- капиталовооруженность труда, $k = \frac{K}{L}$ --объем общественных благ.

Данная производственная функция используется в оптимизационной экономической модели и качестве её критерия оптимальности предполагается максимизировать дисконтированную сумму конечного (непроизводственного) потребления в течение срока прогнозирования (планирования) $[0;T]$:

$$W = \int_0^T e^{-\delta t}\frac{C}{L}dt \to \max_D$$

где δ -- коэффициент дисконтирования, $0 < \delta < 1$.

Для нахождения оптимального процесса $v = \left(K(t), X(t), u(t)\right)$ модели была использована теорема Кротова В.М. [2] (о достаточных условиях оптимальности для непрерывных процессов). Оптимальные $\hat{u}(t) = 1 - \frac{\overline{A}^{\alpha}(m+\mu)}{A(1-a)(1-q)}$ и $\hat{k}(t) = \overline{A}e^{mt}$ найдены из условия:

$$\overline{k}(t), \overline{x}(t) \to \max_{0 \le x \le f(k,t)} R(t,k,x).$$

где $R(t,k,x) = e^{-\delta t}\left[(1-a)(1-q)x - (\mu+\delta)k\right]$, $\overline{A} = \left[\frac{(1-a)A(1-a)(1-q)}{\mu+\delta}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$.

1. *Акимов Н.И.* Политическая экономия современного способа производства. Кн. 3, часть 1, Макроэкономика. -- М.: Экономика, 2004. -- 293 с.

2. Основы теории оптимального управления/ Под ред. В.М. Кротова. -- М.: Высшая школа, 1990. -- 430 с.

Анісімова Л.А., к.ф.-м.н., доц. к-ри менеджменту інноваційної та інвестиційної діяльності екон. ф-ту *Київського національного університету імені Тараса Шевченка*

ЗАСТОСУВАННЯ АГЕНТНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ ЕКОНОМІЦІ

Анісімова Л.А.

Моделювання є важливим засобом розв'язання багатьох економічних завдань і, зокрема, проведення аналітичного дослідження. Математичні теорії опису ринкових економік мають столітню історію. Тільки в останні роки спеціалісти почали працювати над специфічними проблемами побудови математичних моделей ринкових процесів, за допомогою яких можна зручно і адекватно описати процес накопичення та аналізу динамічних даних в умовах неповної та неоднорідної інформації [3]. Одним з таких варіантів є застосування агентних технологій для аналізу, прогнозування та прийняття рішень на базі теорії ігор.

Комп'ютерне моделювання ринків розширює експериментальний підхід простотою тестування різноманітних теорій поведінки навчання та ринкової логіки в контрольованому середовищі. Засновані на агентах моделі дозволяють ефективно обробляти неоднорідну інформацію за евристичними пріоритетами.

Створення ефективно працюючих реальних програмних комплексів агентного типу вимагає досить великих зусиль в області методів організації кооперативного рішення задач агентами мультиагентних систем, методів організації переговорів при розв’язанні конфліктів і створення відповідних протоколів. У цій області недостатньо використовуються теоретичні досягнення з області розподілених систем і рівнобіжних обчислень.

Моделювання за допомогою інтелектуальних агентів з високою мірою адекватності здатне відобразити реальну економічну логіку та процеси. Емпірично можна побачити, що агентне моделювання здатне успішно описати різноманітні цілі та вподобання активних об'єктів та виробити адекватну стратегію на майбутні стани. Хоча й існує частина економічних задач, які мають успішну реалізацію на базі агентів, та велика кількість економічних процесів є настільки складною, що майже неможливо описати взаємодію між учасниками не вдаючись до інтелектуального моделювання знову ж таки на базі агентних технологій. Роботи зараз над цим ведуться, з'ясовуються та описуються нові правила взаємодії, виявляються нові фактори впливу, і агентне моделювання поступово буде завойовувати визнання. Порівняно з традиційними методами моделювання – шляхом математичних рівнянь, дискретного моделювання подій, циклічним автоматам та теорією ігор – симуляція за допомогою агентів (Agent-Based Simulation, ABS) є менш абстрактною і дозволяє наблизити процес симуляції ближче до реального стану речей завдяки можливості моделювання за допомогою агентів специфічну поведінку індивідів, на відміну від методів макроімітаційного моделювання, які зазвичай базуються на математичних моделях, що працюють з усередненими параметрами поведінки індивідів або її спільнот.

1. *Грін В.Г.* Економетричний аналіз / *В.Г.Грін.* – Київ, Видавництво «Основи», 2005 –1197с.
2. *Михалевич М.В.* Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологи / *М.В.Михалевич., И.В. Сергиенко.* – Киев, Наукова думка, 2005, 670с.
3. *Brock. W.A., Hommes. C.H.*, 1998. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. / W.A. Brock, C.H. Hommes. // Journal of Economic Dynamics and Control 22 (8-9), 1235-1274.
4. *Глибовец Н.Н.* Использование агентных технологий в системах дистанционного образования, /Н.Н. Глибовець. – «Управляющие системы и машины» – 2002. – №6. – С.69-76.

Антоновская Ольга Георгиевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
НИИ ПМК ННГУ имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: antonovsckaja@yandex.ru;
Горюнов Владимир Иванович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
НИИ ПМК ННГУ имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: pmk@unn.ac.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМ СИНХРОНИЗАЦИИ С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ СИГНАЛА УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Антоновская О.Г., Горюнов В.И.

Известно, что системы синхронизации автоколебаний с использованием перестраиваемых декадных счетчиков, формирующих на своем выходе импульсы, определяющие характер широтно-импульсной модуляции сигнала управления, представляют существенный интерес не только для создания новых типов математических моделей, но и развития качественно-численных методов анализа их динамики [1].

В настоящем докладе, носящем обзорно-итоговый характер, на примерах конкретных исследований приводится обоснование того, что использование метода точечных отображений позволяет объединить в единое целое как процедуру построения математических моделей за счет выбора вида фазовых подпространств, в каждом из которых динамика системы описывается конкретными типами дифференциальных уравнений, так и процедуру построения функций точечных отображений с привлечением тех или иных способов приближенного описания отрезков фазовых траекторий в каждом из указанных подпространств, так что изображающие точки движения при переходе из подпространство в подпространство естественным образом определяют динамику изменения во времени интервала следования управляющих импульсов [2], позволяя на только перейти от инженерно-прикладной и, в ряде случаев, достаточно сложной процедуры анализа свойств выборочных осциллограмм движений к обобщенному представлению свойств динамики систем, эффективно используя геометрическую интерпретацию локальных и глобальных свойств фазовых траекторий и, в том числе, за счет специально разработанной методики построения условно-экстремальных функций Ляпунова, учитывающих существование и свойства границ разбиения фазовых пространств на части, соответствующие определенным типам движений.

Использование процедуры продолжения по параметру и, в том числе, введение в рассмотрение параметра, отображающего свойство инерционности фильтра нижних частот, используемого в цепи обратной связи рассматриваемого класса систем, позволило установить соответствие результатов исследования условий существования и устойчивости основного режима управления, проведенных с помощью разложения функций последования в ряды по малому параметру и с помощью использования принципа разделения движений, являющегося основной посылкой построения непрерывных моделей систем фазовой синхронизации.

1. Левин В.А., Малиновский В.Н., Романов С.К. Синтезаторы частот с ситемой импульсно-фазовой автоподстройки. – М.: Радио и связь, 1989. – 232 с.
2. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Об особенностях методики исследования динамики систем с широтно-импульсной модуляцией и запоминанием сигнала управления // Математическое моделирование и оптимальное управление: Вестник ННГУ. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. № 6. С. 135-140.

Атаманюк Игорь Петрович – кандидат тех. наук, доцент каф. высшей и прикладной математики,
Николаевский государственный аграрный университет, Украина
e-mail: atamanyuk_igor@mail.ru
Кондратенко Юрий Пантелеевич – доктор тех. наук, профессор каф. интеллектуальных. инф. систем,
Черноморский государственный университет им. Петра Могилы
e-mail: y_kondratenko@rambler.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НА БАЗЕ ЕЕ КАНОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Атаманюк И.П., Кондратенко Ю.П.

Пусть случайная последовательность $\{X\} = X(i), i = \overline{1, I}$ обладает нелинейными связями и для фиксированных моментов времени $t_i, i = \overline{1, I}$ полностью задана дискретизироваными моментными функциями порядка $\leq N : M\left[X^{\xi_l}(i - p_{l-1})X^{\xi_{l-1}}(i - p_{l-2})...X^{\xi_2}(i - p_1)X^{\xi_1}(i)\right]$, $\sum_{j=1}^{l} \xi_j \leq N, p_j = \overline{1, i-1}, i = \overline{1, I}.$ Алгоритм генерации значений $x(i), i = \overline{1, I}$ последовательности $\{X\}$ в точках дискретизации $t_i, i = \overline{1, I}$ имеет вид [1]

$$X(i) = M[X(i)] + \sum_{\nu=1}^{i} \sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{N-1} V_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(1)}(\nu, i) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{i} \sum_{l=2}^{M(\nu)} \sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}} ... \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}} \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}} ... \sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} V_{p_1^{(l)}...p_{l-1;}^{(l)}\xi_1^{(l)}...\xi_l^{(l)}}(\nu)\varphi_{p_1^{(l)}...p_{l-1;}^{(l)}\xi_1^{(l)}...\xi_l^{(l)}}^{(1)}(\nu, i), i = \overline{1, I}.$$

где $V_{p_1^{(l)}...p_{l-1;}^{(l)}\xi_1^{(l)}...\xi_l^{(l)}}(\nu)$ и $\varphi_{p_1^{(l)}...p_{l-1;}^{(l)}\xi_1^{(l)}...\xi_l^{(l)}}^{(1)}(\nu, i)$ - соответственно случайные коэффициенты и координатные функции канонического разложения [2,3] векторной случайной последовательности $\{\overline{X}\}$:

$$\{\overline{X}\} = \left\{ \begin{matrix} X^{\xi_1^{(1)}}(i) \\ X^{\xi_l^{(l)}}(i - p_{l-1}^{(l)})...X^{\xi_2^{(l)}}(i - p_1^{(l)})X^{\xi_1^{(l)}}(i) \end{matrix} \right\}, i = \overline{1, I}.$$

Процедура моделирования сводится к получению значений случайных коэффициентов с требуемым законом распределения и преобразованию данных значений координатными функциями.

Алгоритм моделирования случайных последовательностей не накладывает никаких существенных ограничений на класс исследуемых последовательностей (линейность, марковость, стационарность, монотонность и т. д.).

1. И.П.Атаманюк. Алгоритм реализации нелинейной случайной последовательности на базе ее канонического разложения. //Электронное моделирование. - 2001. - №5. - С. 38-46.
2. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение. -М.:Физматгиз, 1962.-720с.
3. Кудрицкий В.Д. Фильтрация, экстраполяция и распознавание реализаций случайных функций. – К.:ФАДА, ЛТД, 2001.-176 с.

Баняс Мирон Владимирович, аспирант отдела термоупругости,
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: term@inmech.kiev.ua;

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО НАРАЩИВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ЦИЛИНДРА ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Баняс М.В.

Рассматривается многослойное наращивание по боковой поверхности цилиндра из физически нелинейного материала. Физико-механические характеристики материалов считаются зависящими от температуры. Механическое поведение материалов описывается с помощью унифицированной модели течения Боднера-Партома. Микроструктурные превращения описываются термокинетическими диаграммами распада переохлажденного аустенита в каждой точке цилиндра. Влияние микроструктурных превращений на остаточное напряженно-деформированное состояние учитывается с помощью объемной термофазовой деформации.

Наращивание слоев происходит в рамках схемы мгновенного наложения материала. Граничные условия на поверхности наращивания удовлетворяются с помощью собственных деформаций и температуры, которые входят в закон Гука и рассчитываются в процессе решения задачи. Задача решается шаговым методом по времени в сочетании с итерационным методом. На каждом шаге линеаризованная задача решается методом конечных элементов с использованием изопараметрического четырехугольного конечного элемента.

В качестве материала исходного цилиндра выбирается сталь 50ХФА. Наращивание по боковой поверхности производится промежуточным слоем из высокопластичной стали 08кп и наружным слоем из стали 23Х2НВФА. Рассматриваются случаи наращивания с и без промежуточного слоя. В процессе решения задачи толщины промежуточного и наружного слоев варьируются.

Установлено, что в условиях характерных для электродуговой наплавки прокатных валков в наружном слое возникают пластические деформации и формируется мартенсит-бейнитная структура, которая обусловливает сжимающие напряжения. В приповерхностном слое исходного цилиндра имеет место перлит-бейнитная структура с преобладанием бейнита, при этом остаточные напряжения растягивающие. Краевые эффекты вблизи торцов характеризуются возмущением поля напряжений, повышенной пластической деформацией в материале исходного цилиндра и концентрации мартенситной фазы. Размеры краевой зоны не превышают радиус исходного цилиндра. Увеличение толщины наружного слоя приводит к увеличению растягивающих напряжений и пластических деформаций в исходном цилиндре.

При наличии высокопластичного подслоя пластические деформации в исходном цилиндре отсутствуют. Кроме того, подслой снижает напряжение в наружном слое, по сравнению с наращиванием без подслоя. Подслой приводит также к уменьшению интенсивности напряжений, средних напряжений, концентрации мартенсита в наружном слое и увеличению концентрации бейнита в исходном цилиндре.

Результаты работы могут быть использованы при моделировании процесса наплавки цилиндрических элементов конструкций, таких как валков прокатных станов, прошивок для получения заготовок для прокатки труб. Рассчитанное в процессе решения задачи напряженно-деформированное и микроструктурное состояние может быть использовано для моделирования последующего эксплуатационного термомеханического нагружения деталей.

Белогуров Андрей Петрович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
e-mail: aibels@list.ru;

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Белогуров А.П.

Рассматриваемые задачи возникают при моделировании процессов управления нефте- и продуктопроводами, прогнозирования и регулирования уровня подземных вод и т.д. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы при исследовании нелинейных уравнений, различных задач оптимального управления, обратных задач, эквивалентном преобразовании нелокальных краевых задач, при численном решении интегро-дифференциальных уравнений и т.д.

Для нагруженного уравнения теплопроводности

$$Lu \equiv \left(D_t^1 - D_x^2\right)u + \sum_{k=1}^{m}\alpha_k u(x_k, t) = f, \tag{1}$$

определенного в открытом квадрате $Q = \{x, t / 0 < x, t < 2\pi\}$, рассматриваются следующие задачи с условиями на границе ∂Q:

$$\text{либо} \qquad u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \quad u(0,t) = u(2\pi,t); \tag{2}$$

$$\text{либо} \qquad D_x^j u(0,t) = D_x^j u(2\pi,t), \quad j = 0,1; \quad u(x,0) = u(x,2\pi). \tag{3}$$

Здесь $D_y^j = \partial^j \big/ \partial y^j$; $\alpha_k \in C$ – заданные константы, $0 < x_1 < ... < x_m < 2\pi$, $\{x_k\}$ – заданы.

Краевые задачи (1), (2) и (1), (3) исследуются на предмет их однозначной сильной разрешимости. В связи с этим установлены следующие результаты.

Теорема 1. Задача (1), (2) при любом $f \in L^2(Q)$ имеет единственное сильное решение $u \in L^2(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m}\alpha_k x_k(2\pi - x_k) \neq -2 \\ \sum_{k=1}^{m}\alpha_k sh(\sqrt{is}(2\pi - x_k)/2)\cdot sh(\sqrt{is}x_k/2) \neq -is\cdot ch(\sqrt{is}\pi/2) \\ \forall s \in S\setminus\{0\}, \ S = (0;\pm1;\pm2;...), \ i = \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Теорема 2. Задача (1), (3) при любом $f \in L^2(Q)$ имеет единственное сильное решение $u \in L^2(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k \neq -is, \quad \forall s \in S.$$

Отметим, что при отсутствии нагруженных слагаемых задача (1), (3) ни при каком $f \in L^2(Q)$ не будет однозначно разрешимой, тогда как (1), (3) с нагрузкой может оказаться однозначно сильно разрешимой при любом $f \in L^2(Q)$.

Таким образом, установлено, что присутствие в уравнении (1) нагруженных слагаемых оказывает влияние на корректность краевой задачи (1), (3).

Богатырёв Александр Олегович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого, Черкассы, Украина
e-mail: a_bogatyrev@ukr.net;
Красношлык Наталья Александровна, аспирантка кафедры прикладной математики,
Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого, Черкассы, Украина
e-mail: wlik007@ukr.net

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ВЗАИМНОЙ ДИФФУЗИИ С УЧЁТОМ ПАРЦИАЛЬНЫХ МОЛЬНЫХ ОБЪЁМОВ КОМПОНЕНТОВ

Богатырёв А.О., Красношлык Н.А.

Рассмотрим одномерную математическую модель процесса взаимной диффузии в бинарной металлической системе $A-B$, когда парциальные мольные объёмы компонентов различны. В бинарной системе данные величины связаны соотношением:

$$V_m = \Omega_A N_A + \Omega_B N_B ,$$

где V_m – мольный объём (м^3·моль$^{-1}$), N_i – мольная доля компонента i ($N_A + N_B = 1$), $\Omega_i = \partial V_m / \partial N_i$ – парциальный мольный объём i-го компонента (м^3·моль$^{-1}$).

Распределение концентрации в каждой фазе описывает уравнение, полученное из второго закона Фика, характеризующего нестационарный диффузионный процесс:

$$\frac{\partial N_B}{\partial t} = \frac{\partial^2 N_B}{\partial x^2}\tilde{D}^n + v^n \frac{1}{\Omega_A^n}\frac{\partial N_B}{\partial x}\left(V_m^n - N_B\left(\Omega_B^n - \Omega_A^n\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial N_B}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{V_m^n}\left(-3\tilde{D}^n\left(\Omega_B^n - \Omega_A^n\right) + \Omega_B^n D_A^n - \Omega_A^n D_B^n\right),\ n = \overline{\alpha,\beta},$$

где $\tilde{D}^n$ – коэффициент взаимной диффузии (м^2·с$^{-1}$), D_i^n – собственный коэффициент диффузии компонента i (м^2·с$^{-1}$), v^n – скорость, обусловленная различием парциальных мольных объёмов компонентов (м·с$^{-1}$).

Скорость движения межфазной границы $s(t)$ определяется разностью результирующих потоков атомов и скачком концентрации на этой границе:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\dfrac{N_B^\beta}{V_m^\beta} - \dfrac{N_B^\alpha}{V_m^\alpha}} \cdot \left(-\tilde{D}^\beta \frac{\Omega_A^\beta}{\left(V_m^\beta\right)^2}\frac{\partial N_B}{\partial x}\bigg|_{s+0} + \tilde{D}^\alpha \frac{\Omega_A^\alpha}{\left(V_m^\alpha\right)^2}\frac{\partial N_B}{\partial x}\bigg|_{s-0} + \frac{N_B^\beta}{V_m^\beta}\cdot v^\beta \right),$$

где $N_B^\alpha \equiv N_B\left(s(t)-0,t\right)$, $N_B^\beta \equiv N_B\left(s(t)+0,t\right)$ – равновесные концентрации на границе.

Скорость смещения правой границы образца $l(t)$ при изменении объёма системы определяется уравнением:

$$\frac{dl}{dt} = -\tilde{D}^\beta \frac{\Omega_A^\beta}{V_m^\beta}\frac{1}{N_B^l}\frac{\partial N_B}{\partial x}\bigg|_{l-0} + v^\beta,\ N_B^l \equiv N_B\left(l-0,t\right).$$

Предложенная математическая модель более точно описывает процесс взаимной диффузии в бинарной металлической системе. На её основе была реализована соответствующая компьютерная модель. Результаты проведённых численных расчётов позволили установить, что различие парциальных мольных объёмов компонентов системы может быть причиной движения межфазной границы и в совокупности оказывает влияние на процессы роста или угнетения промежуточных фаз в рассмотренной модельной системе.

Богдан Михаил Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина,
e-mail: bogdan@ilt.kharkov.ua ;
Лаптев Денис Владимирович, аспирант 3 года, отдела теоретической физики № 26,
Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина,
e-mail: laptev.denis@mail.ru

ПРОЦЕССЫ СТОЛКНОВЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ БРИЗЕРОВ И УДАРНЫХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ АНГАРМОНИЧЕСКИХ РЕШЁТКАХ

Богдан М.М., Лаптев Д.В.

В физике твёрдого тела учёт нелинейности во взаимодействии между атомами кристаллической решётки может приводить к возникновению новых типов коллективных возбуждений – солитонов, которые представляют собой локализованные волны деформации. В процессе движения и при взаимодействии между собой солитоны сохраняют свою индивидуальность. После столкновения солитоны восстанавливают свою форму и скорость, т.е. взаимодействуют упруго. В математической теории солитонов число интегрируемых решеточных моделей крайне мало. Р. Хиротой была предложена интегрируемая модель одномерного кристалла с силой взаимодействия между ближайшими соседями, пропорциональной тангенсу разности их смещений [1]. Для такой решётки Хироты были найдены точные многосолитонные решения [1], которые описывают взаимодействие ударных волн в кристалле. В работе [2] было впервые получено выражение для связанного состояния ударных волн разного знака – дискретного бризера. В [3] была исследована гамильтонова динамика дискретных солитонов-кинков и бризеров как частицеподобных возбуждений.

В данной работе получена формула нелинейной суперпозиции, позволяющая найти точные многосолитонные решения, которые математически моделируют процессы столкновений нелинейных возбуждений в решетке Хироты. Аналитически описаны все возможные процессы столкновений ударных волн (кинков), бризеров и линейных волн, распространяющихся в решётке Хироты. Рассмотрены важные частные случаи: столкновение ударной волны с неподвижным бризером и столкновение двух одинаковых бризеров. Показано, что результатом столкновений являются сдвиги центров масс кинков, а также сдвиги центров масс бризеров и фаз их осцилляций. Получены явные аналитические выражения для всех данных рассеяния. Также рассмотрен частный случай, когда кинк и бризер имеют одинаковые скорости и координаты центров масс. Такое возбуждение носит название осциллирующий кинк (wobbling kink).

С помощью специального типа многосолитонных решений смоделированы процессы движения и взаимодействия дискретных кинков и бризеров в полубесконечной решётке Хироты с граничными условиями, соответствующими фиксированным границам кристалла. Найдены дополнительные сдвиги центров масс и фаз осцилляций дискретных бризеров и ударных волн при взаимодействии с фиксированной границей.

1. Hirota R. Exact N-Soliton Solution of Nonlinear Lumped Self-Dual Network Equations. // J. Phys. Soc. Jap. – 1973. – vol. 35. – p. 289-294.
2. Bogdan M.M., Maugin G.A. Exact discrete breather solutions and conservation laws of lattice equations. / Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. – 2003. – vol. 52, № 1. – p. 76-84.
3. Богдан М.М., Лаптєв Д.В. Квазікласичні спектри солітонів континуального та дискретного модифікованих рівнянь Кортевега – де Фріза. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2009. - вип. 24. – с. 100-107.

Богдан Михаил Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина,
e-mail: bogdan@ilt.kharkov.ua ;
Чаркина Оксана Викторовна, младший научный сотрудник,
Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина,
e-mail: charkina@ilt.kharkov.ua ; charkina@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СОЛИТОНОВ И НЕЛИНЕЙНОГО ОТКЛИКА В МАГНИТНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ

Богдан М.М., Чаркина О.В.

Недавно было теоретически показано, что искуственно созданные магнитные метаматериалы могут демонстрировать уникальные свойства, в том числе локальную отрицательную магнитную проницаемость. Электромагнитные возбуждения в одно- или двумерных системах индуктивно связанных расщепленных кольцевых резонаторов (РКР) с нелинейными элементами (диодами) описываются дискретными уравнениями, которые обладают сильно локализованными в пространстве и периодическими во времени решениями, соответствующими дискретным бризерам [1]. Численными расчетами было показано, что в области, охватывающей несколько резонаторов, возбуждается дискретный бризер с амплитудой, имеющей обратный знак по отношению к приложенному полю, т.е. метаматериал демонстрирует отрицательный магнитный отклик. Однако аналитическое описание нелинейных возбуждений в таком сильно дискретном случае наталкивается на очевидные трудности. Кроме того, при сильной локализации некорректно говорить о проницаемости, являющейся по определению макроскопической характеристикой, которая описывает свойства сплошной среды.

В данной работе предлагается модификация низкоразмерных магнитных метаматериалов путем включения дополнительного емкости между ближайшими соседними РКР. Тогда в длинноволновом пределе система связанных РКР может быть описана регуляризованным нелинейным уравнением Клейна-Гордона в частных производных для переменной распределения заряда. Вторые пространственные и четвертые пространственно-временные производные в уравнения соответствуют емкостной и магнитоиндуктивной связям между РКР, соответственно, в то время как внешняя сила определяется нелинейной зависимостью емкости от заряда. В работе получено аналитическое решение для бризерного решения в виде асимптотического ряда по малому параметру амплитуды. Основной особенностью такого бризера в случае узкой спектральной зоны метаматериала является его немалая эффективная ширина, независящая от малости амплитуды. Численно изучен режим большой амплитуды колебаний бризера и показано, что, начиная с критического уровня энергии появляются автоколебания его амплитуды и фазы. Численное моделирование движения бризера показало, что время его жизни велико, так как испускаемое им излучение мало. Аналитически исследован отклик системы с магнитоиндуктивным бризером и вычислен бризерный вклад в отрицательную магнитную проницаемость метаматериала. С помощью численного моделирования исследована устойчивость такого неоднородного динамического состояния метаматериала. Определена область параметров высокочастотного поля, для которой наблюдаются устойчивые режимы нелинейного отклика метаматериалов с локальной отрицательной магнитной проницаемостью.

1. Lazarides N. Discrete Breathers in Nonlinear Magnetic Metamaterials / N. Lazarides, M. Eleftheriou, G. P. Tsironis // Phys. Rev. Lett. – 2006. –V.97. – P.157406.

Буркин Игорь Михайлович, доктор физ.-мат наук, профессор,
Тульский государственный университет, Тула, Россия,
e-mail: bim@klax.tula.ru;
Соболева Дарья Владимировна, аспирант мех.-мат. факультета,
Тульский государственный университет, Тула, Россия

ЗАДАЧА СМЕЙЛА ДЛЯ МОДЕЛИ ТЬЮРИНГА

Буркин И.М., Соболева Д.В.

В работе [1] С.Смейл предложил математическую модель, относящуюся к биологии клетки. Эта модель описывает две одинаковые клетки, взаимодействующие путем диффузии через мембрану. Система дифференциальных уравнений, описывающая химическую кинетику веществ (ферментов), содержащихся в каждой клетке, имеет четвертый порядок. Последнее означает, что клетки содержат четыре реагирующих между собой фермента. Динамика рассматриваемой системы обладает тем свойством, что каждое ее решение стремится к единственной стационарной точке, когда время стремится к бесконечности. Иными словами каждая клетка сама по себе "мертва" (концентрация ее ферментов достигает равновесного состояния), однако, если клетки начинают взаимодействовать между собой путем диффузии через мембрану, то клеточная система начинает пульсировать ("оживает"). Математически это означает, что почти любое решение новой динамической системы стремится к некоторому периодическому решению.

Математически указанная ситуация описывается следующим образом: система дифференциальных уравнений порядка n, описывающая изолированную клетку: $\dot{x} = R(x)$ имеет единственное асимптотически устойчивое в целом состояние равновесия; система дифференциальных уравнений (система Тьюринга) порядка $2n$, описывающая взаимодействие двух примыкающих клеток,

$$\begin{aligned}\dot{x}^{(1)} &= R(x^{(1)}) + D(x^{(2)} - x^{(1)}) \\ \dot{x}^{(2)} &= R(x^{(2)}) + D(x^{(1)} - x^{(2)})\end{aligned}, \qquad (1)$$

где $D-$ $n \times n$-матрица, является глобальным осциллятором, то есть имеет нетривиальное глобально устойчивое периодическое решение.

Отметим, что системы вида (1) моделируют также процессы, происходящие в некоторых химических системах (реакция Белоусова-Жаботинского), а также в экологии.

В [1] С.Смейл построил пример системы Тьюринга с нужными свойствами для случая $n = 4$, указав, что этим примером можно воспользоваться для получения более сложных примеров для произвольного числа клеток (свыше одной) или веществ (свыше трех). При этом он подчеркнул, что "проблемой является уменьшение числа веществ в задаче до двух или даже до трех ($n \le 3$), а также построение модели с тремя клетками и двумя или тремя химикалиями".

Поставленная Смейлом задача об аксиоматизации свойств пары (R, D) частично решена в работе [2]. При этом, однако, требование глобальной осцилляции системы заменено в [2] более слабым требованием "автоколебательности" этой системы.

В данной работе получены условия, при выполнении которых система Тьюринга имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл. Приводится пример системы кинетики двух клеток с тремя ферментами $(n = 3)$.

1. Смейл С. Математическая модель взаимодействия двух клеток, использующая уравнения Тьюринга // Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, -1980. С
2. Томберг Э. А., Якубович В. А. Об одной задаче Смейла // Сиб. мат. журн., -2000. Т. 41, № 4. С. 926-928.

Вергунова Ірина Миколаївна, доктор габілітації, кандидат фіз.-мат. наук, професор
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: vergunova@bigmir.net
Вергунов Віктор Анатолійович, член-кор. НААНУ, доктор с.-г. наук, професор
Державна наукова сільськогосподарська бібліотека НААНУ, Київ, Україна
e-mail: v_47@bigmir.net
Пепо Петер, доктор наук, професор
Дебреценський університет, Дебрецен, Угорщина
e-mail: pepopeter@agr.unideb.hu
Сарварі Міхаел, кандидат наук, доцент
Дебреценський університет, Дебрецен, Угорщина
e-mail: pepopeter@agr.unideb.hu

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕХНОЛОГІЙ ВИРОЩУВАННЯ КУЛЬТУР ТА УПРАВЛІННЯ ВІДПОВІДНИМИ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

Вергунова І.М., Вергунов В.А., Пепо П., Сарварі М.

Моделлю технології вирощування культур є формалізовані описи послідовності технологічних операцій з урахуванням термінів і засобів їх проведення, параметрів, що за існуючих обмежень забезпечують одержання економічно доцільного урожаю. Модель повинна включати формальні описи: цілей застосування, вимог до технологічного процесу і умов його використання; операцій, що складають процес; вхідних і вихідних параметрів; факторів зовнішнього середовища; структури процесу; техніко-економічних показників.

При формалізації технологій, використовуються описи на природній мові, що призводять до нечіткості та якісного характеру опису. Якщо вдалося чітко визначити усі параметри технології та її формалізувати, то задача вибору найефективніших параметрів технологій, що забезпечують наближення до оптимального стану ґрунтової системи та реалізацію впливів на рослини, є задачею оптимального керування – задачею виконавчого балансного керування де основним є керування станом ґрунтової системи, а оптимізація режимів у ґрунтовій системі відповідає набору операцій, що складають технологію, забезпечуючи найкраще наближення до оптимального загального балансного технологічного керування з мінімальними втратами ресурсів у системі. На практиці така ситуація зустрічається рідко. Тому пропонується розробка формальної моделі технологічних процесів на основі природної професійно-орієнтованої мови. Взаємозв’язки технологічних операцій і структуру всієї технології пропонується описувати за допомогою бінарних відношень.

Модель представляється як кортеж $M = \langle \gamma, \varepsilon, \eta, \tau, \lambda, \nu, \omega, \alpha, \beta \rangle$, γ - алфавіт, ε, η - множини синтаксичних правил побудови планів виразу і вмісту знаків, τ - множина термів, ν - множина синтаксичних правил побудови виразів, λ - множина семантично правильних виразів (фактів і законів), ω - множина правил отримання наслідку з λ-нових правильно побудованих виразів, α- множина правил зміни синтаксису системи, $\alpha = \alpha_\gamma \cup \alpha_\varepsilon \cup \alpha_\eta \cup \alpha_\tau \cup \alpha_\nu$, β-множина правил зміни семантичної системи, $\beta = \beta_\lambda \cup \beta_\omega$. Ситуація $S = (\Gamma, \Pi, \mathrm{T}, R, \varphi_\Pi, \varphi_\Gamma, \varphi_R)$, Г-множина мільтиграфів, $\Gamma = \{\Gamma_i\}, \Gamma_i = (\Pi_i, R_i)$, Π_i, R_i– множини вершин і дужок; П – множина базових і довільних понять; R - множина відношень, необхідних для опису системи; Т – множина інтервалів часу; $\varphi_\Gamma : \mathrm{T} \to \Gamma, \varphi_\Pi : \Pi \to \Pi^*, \varphi_R : R \to R^*$, $\Pi^* = \bigcup_i \Pi_i, R^* = \bigcup_i R_i$. Тоді задачу побудови оптимальної технології можна сформулювати як пошук розчленування множин можливих ситуацій S технології на класи $\overline{S}_i$, за якого класу ситуацій $\overline{S}_i$ відповідає клас рішень $\overline{D}_i \in \overline{D}$ оптимальний за деяким критерієм ($\overline{D}$ - множина класів можливих рішень).

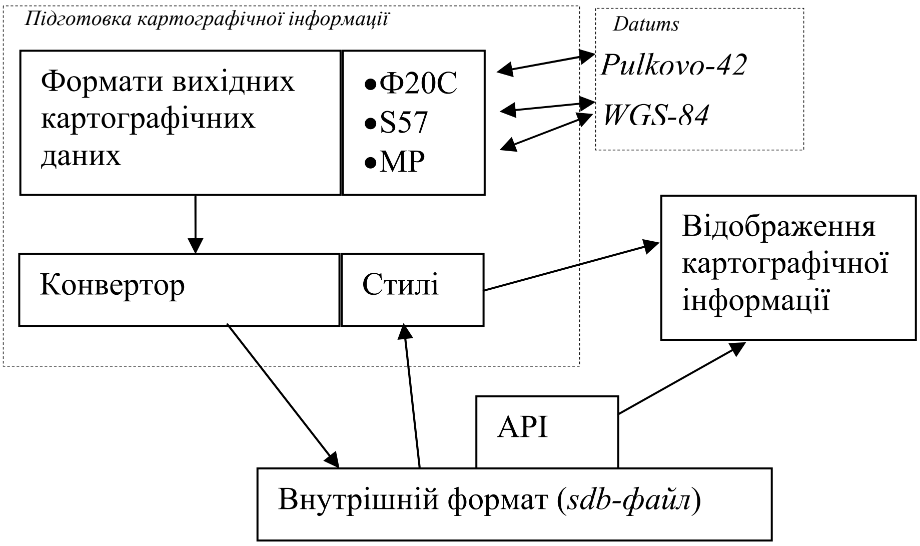
Верченко Андрій Петрович, кандидат фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: An.Verchenko@gmail.com;

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ КАРТОГРАФІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ В НАВІГАЦІЙНІЙ СУПУТНИКОВІЙ АПАРАТУРІ

Верченко А.П.

Колективом кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики останні два роки розробляється програмне забезпечення для візуалізації картографічної інформації в різних навігаційних приладах [1]. Ініціатором розробок стало державне підприємство „Орізон-навігація”, м. Сміла Черкаської області, де створюється навігаційна супутникова апаратура різного призначення.

Структура програмного комплексу обробки і візуалізації картографічної інформації представлена на мал.1:



Мал.1. Функціональна схема програмного комплексу обробки та візуалізації картографічної інформації.

Розроблено внутрішній формат представлення картографічних даних, який забезпечує універсальність та уніфікацію вхідних даних різних форматів. На даний момент реалізовано підтримку наступних картографічних форматів: Ф20С (основний картографічний формат Генштабу СРСР), S57 (міжнародний формат для карт морського призначення) та MP („польський” формат, що є основою для зберігання даних в навігаційних пристроях фірми Garmin).

Конвертор у внутрішній формат використовує відповідний стильовий xml-файл, в якому формалізовано спосіб відмальовки елементів карти. Розроблене API внутрышнього формату дозволяє створювати програмне забезпечення для аналізу та відмальовки карт. Блок відображення картографічної інформації реалізує перетворення внутрішнього формату в набір команд-примітивів OpenGL. Система розробляється в середовищі Visual C++ з цільовими платформами Windows (x86, x86_64), Linux (x86, x86_64, PPC64), MacOSX .

1. Розробка картографічного програмного забезпечення для навігаційної апаратури: Додаток до звіту про науково-дослідну роботу „Розвиток теорії та розробка технологій для моделювання, аналізу оцінки та оптимізації складних систем” / Київський національний університет імені Тараса Шевченка.− №06БФ015-03; № ДР 0106U005858.− К., 2011.− 230с.

Волкова С.А.
Украинский химико – технологический университет кафедра вычислительной техники и прикладной математики , г. Днепропетровск, Украина

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Волкова С.А.

В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с импульсным воздействием.

Для построения непрерывного решения используется метод негладкого преобразования аргумента [1-2]. В результате применения метода пространственная координата приобретает структуру алгебры без деления.

Действие импульсной нагрузки на систему описывается посредством второй обобщенной производной пилообразной функции ф=ф(t;И). Такое представление позволяет, с одной стороны, исключить сингулярные члены из исходного дифференциального уравнения, а с другой, получить решение на всем временной интервале.

Важно отметить, что возможно описать импульсы различного типа. Речь идет о моделировании не только эквидистантных, но и неэквидистантных импульсных воздействий.

Для случая малой нелинейности и малой эквидистантности аналитическим способом построено периодическое решение. Также получена зависимость параметров системы, при которой существуют устойчивые периодические решения. Исследовано влияние типа импульсного воздействия на динамику системы.

В случае сильной нелинейности для анализа системы с локализованными особенностями применяется числено – аналитический подход. В результате выделены три возможных типа решений (периодические, квазипериодические и хаотические).

1. Pilipchuk V.N. Calculation of mechanical system with pulsed excitation // J. Appl. Math. – 1996. – Vol. – 60, No. 2. – P. 217-226.
2. Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mihlin Yu.I., Pilipchuk V.N. and Zevin A.A. Normal Modes and Localization in NonLinear systems. – Wiley Interscience: New York, 1996. – 670 p.

Гаврищук Евгений Михайлович, доктор химических наук
ИХВВ РАН, Нижний Новгород, Россия,
Комаров Валентин Николаевич, доктор технических наук, профессор,
ННГУ им.Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
Метрикин Владимир Семенович, кандидат физ. – мат. наук, доцент,
ННГУ им.Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
Панасенко Адольф Григорьевич, кандидат физ.– мат. наук, доцент,
ННГУ им.Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
e-mail: kovn3@uic.nnov.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ШЛИФОВАНИЯ НА СТАНКАХ ТИПА 3ПД-320

Гаврищук Е.М., Комаров В.Н., Метрикин В.С., Панасенко А.Г.

В настоящей работе изучается возможность регулирования процесса относительного съема материала для различных областей полируемых пластин на станках типа 3ПД-320 за счет настройки геометрических параметров станка и выбора режима его работы.

Математическая модель, описывающая процесс полирования поверхности пластин, в работе основывается на гипотезе [1], согласно которой принимается в первом приближении, что съем материала в окрестности выбранной точки пропорционален интегралу

$$\mathrm{H}=\int_0^T V dt,$$

где V – скорость точки «наклеечника» относительно полировальника, Для станка 3ПД-320 скорость точки «наклеечника» относительно полировальника может быть записана в виде

$$V = R_0\sqrt{(\rho_2(\omega_0-\omega_1)\sin(\gamma)+\rho_1\omega_0\sin(\mu))\text{^}2+(\rho\omega_1+\rho_2(\omega_1-\omega_0)\cos(\gamma)-\rho_1\omega_0\cos(\mu))\text{^}2}$$

где R_0 - расстояние от оси вращения поводка наклеечника до оси полировальника, R – длина поводка наклеечника, ω_0- угловая скорость полировальника, ω_1- угловая скорость поводка наклеечника. (γ, ρ_2) – полярные координаты наклеечника,

$$\rho = R/R_0, \rho_1 = \sqrt{1+\rho(\rho-2\cos\Phi)},$$

Ф -переменный угол, определяющий положение поводка наклеечника,

$$\sin(\mu)=\sin(\Phi)/\rho_1, \cos(\mu)=(\rho-\cos(\Phi))/\rho_1.$$

Величина съема материала в режиме работы станка с фиксированным расположением наклеечника относительно его поводка исследуется в зависимости от полярных координат γ, r, изменяющихся в следующих пределах $0 \le \gamma \le 2\pi, 0 \le r < 0.3R_0$.Принято, что ω_0=1.

Расчеты величины съема материала H в произвольной точке, проведенные с применением математического пакета MAPLE [2] , показали, что с увеличением ω (угловая скорость кривошипа) и r количество съема уменьшается. Так например, при ω=2 относительный съем материала колеблется от 1,57 ($\gamma \approx 3$) до 1,85 ($\gamma = 0;\vee 2\pi$), когда как при $\omega = 4$ съем материала колеблется от 1,23 до 1,38 при тех же значениях γ и изменении величины r от 0,01 до 0,06.В работе проводится детальный анализ зависимости величины съема материала от геометрических и физических параметров станка

1. Хомич Н.С., Луговик А.Ю., Федоров Р.В., Корзун А.Е., Кухто П.В. Моделирование кинематики процесса магнитно-абразивного полирования кремниевых пластин// Вестник БНТУ, №1, 2009 С. 29-38.
2. Дьяконов В.П. MAPLE 9 в математике, физике и образовании. М. СОЛОН-Пресс, 2004. 688 с.

Гаркуша Н.И.
Киевский национальный университет, Украина,

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Гаркуша Н.И.

Логико-динамической, или непрерывно дискретной системой называется сложная динамическая система, которая состоит из большого числа взаимосвязанных и взаимодействующих элементов разной природы, а именно: из элементов, поведение которых описывается непрерывными процессами, которые имеют конечную длительность, и элементов, поведение которых описывается дискретными процессами, время выполнения которых не существенно для анализа системы. В общем случае логико-динамическая система может быть описана тройкой последовательностей: последовательность локальных поведений; последовательность событий, которые приводят к изменению локальных поведений; последовательность дискретных действий, которые выполняются при изменении локальных поведений.

Разработка методов анализа и моделирования логико-динамических систем имеет уже более чем сорокалетнюю историю. Вслед за созданием метода точечных превращений для качественного анализа свойств разрывных колебательных систем в теории нелинейных колебаний А.А. Андронова, которые можно считать первыми изученными динамическими системами с дискретной компонентою, появляются и разные математические модели, предназначенные для исследования поведения непрерывно дискретных систем. Среди них - агрегативные системы Н.П.Бусленко (1963г.), непрерывно дискретная модель В.М.Глушкова (1973г.), кусочно-сшитые системы, импульсные системы, системы с переменной структурой, гибридные системы А.Пнуэлли.

Анализ подходов к моделированию показывает, что сегодня применяются два подхода к исследованию логико-динамических систем. Это - представление поведения системы в виде последовательности классических динамических систем и упрощения непрерывной части и использования технологии дискретного моделирования и анализа. В настоящее время при моделировании таких систем существует тенденция к сближению этих двух основных подходов и применения комплексного подхода к моделированию и анализу таких систем. На сегодняшний день этим комплексным подходом является гибридное направление исследования, в основу которого положен принцип деления системы на две равнозначные непрерывную и дискретную компоненты и использования для каждой из них оптимальных инструментов исследования и анализа. Этому способствует высокий уровень современной технологии моделирования динамических систем.

В докладе произведен подробный анализ современного состояния логико-динамических систем и использования их при исследовании информационных систем.

Демидюк Мирослав Васильович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
e-mail: m_demydyuk@ukr.net;
Литвин Богдан Андрійович, кандидат фіз.-мат. наук, науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
e-mail: b_lytwyn@ukr.net

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХОДИ ЛЮДИНИ З ПАСИВНО КЕРОВАНИМ ЕКЗОСКЕЛЕТОНОМ

Демидюк М.В., Литвин Б.А.

Досліджуємо задачу математичного моделювання ходи людини з екзоскелетоном. Екзоскелетон (екзоскелет) – це механічний пристрій, який дозволяє збільшити м'язову силу людини за допомогою зовнішнього каркасу; він представляє собою корсет, що складається із стержнів, з'єднаних між собою шарнірами. Одним із важливих застосувань екзоскелетона є реабілітація людей із частково (або повністю) втраченими локомоційними функціями нижніх кінцівок. Отримані результати є подальшим розвитком оптимізаційного підходу та алгоритмів математичного моделювання ходи людини, запропонованих у [1, 2].

Розглядаємо керований рух нелінійної механічної системи, яка моделює ходу людини з пружинно-демпферним екзоскелетоном. Система складається із 9 твердих тіл (з'єднаних між собою циліндричними шарнірами), які представляють корпус людини та дві чотириланкові нижні кінцівки (стегно, гомілка, дволанкова стопа). Стопи вважаємо безінерційними, а їхні маси зосередженими в гомілковостопних шарнірах. Рух системи відбувається внаслідок взаємодії сили тяжіння, сил реакцій опорної поверхні та моментів сил у шарнірах. Сили у шарнірах генеруються м'язо-скелетною структурою людини (активні керування) та пружинно-демпферними пристроями у шарнірних вузлах екзоскелетона (пасивні керування). Динаміка руху моделі у вертикальній (сагітальній) площині описується системою 7-и нелінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку та 4-х умов кінетостатичної рівноваги стоп. Додатково на рух моделі накладаються кінематичні та динамічні умови антропоморфності руху нижніх кінцівок та умови періодичності руху системи на проміжку подвійного кроку [0, T].

Ставиться така **задача**. Нехай на проміжку часу [0, T] задано довжини та тривалості одинарних кроків, області зміни міжланкових кутів та реакцій опорної поверхні, а також в'язко-пружні характеристики екзоскелетона. Потрібно визначити такий рух системи і відповідні активні керування у шарнірах, які при заданих кінематичних та динамічних обмеженнях мінімізують заданий функціонал енерговитрат.

Розроблено алгоритм побудови наближеного розв'язку сформульованої задачі оптимального керування, який ґрунтується на процедурах параметризації узагальнених координат системи кубічними згладжувальними сплайнами, концепції обернених задач динаміки та числових методах нелінійного математичного програмування. Отриману задачу параметричної оптимізації розв'язуємо за допомогою генетичного алгоритму [3].

1. Бербюк В.Є., Демидюк М.В. Литвин Б.А. Математичне моделювання ходи людини на підставі експериментальних даних // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикладна математика та інформатика. – 2000. – Вип. 3. – С. 86–91.
2. Бербюк В. Є., Демыдюк М. В. Литвин Б. А. Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированой голенью // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 128-144.
3. Литвин Б. А. Про одну модифікацію гібридного генетичного алгоритму з дійсним кодуванням у задачах оптимізації // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. – 2009. – Вип.15. – С.313-324.

Дмитриев Михаил Геннадьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
НИУ «Высшая школа экономики», Москва, Россия,
e-mail: mdmitriev@mail.ru

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ «ВЛАСТЬ-ОБЩЕСТВО-ЭКОНОМИКА»

Дмитриев М.Г.

Приводится обзор результатов автора и его коллег в рамках нелинейной модели «Власть-общество» Михайлова А.П. для достаточно протяженных и/или безответственных властных иерархий. При этих предположениях математическая модель – сингулярно возмущенная краевая задача для нелинейного диффузионного уравнения. Изучаются предельные стационарные решения, когда реакция гражданского общества описывается кубической нелинейностью. Здесь появляется возможность наряду с «простыми» устойчивыми стационарными решениями (профиль сильной руки и партиципаторный профиль) изучать устойчивые равновесия с внутренним переходным слоем (контрастные структуры). Контрастные профили властных полномочий порождают промежуточные значения, т.н. объема власти в иерархии и именно такие объемы являются оптимальными по критерию удельного потребления в модели «Власть-общество-экономика». Последняя модель вводится с помощью объединения модели «Власть-общество» с моделью Солоу и рассматривается как для базовой, так и для коррумпированной иерархии.

Вводится агрегированная, управляемая, нелинейная модель «Власть-общество-экономика», где неизвестными функциями являются объем власти в иерархии и удельная фондовооруженность, а управлением является норма накопления. Для этой модели проводится анализ устойчивости равновесий и находится приближенное решение задачи оптимального управления в виде линейного синтеза.

Приводится асимптотический анализ оптимальных решений в стационарных, нелинейных задачах оптимального управления, связанных с моделью «Власть-общество».

Рассматриваются возможные приложения:

- моделирование и прогнозирование результатов выборов на основе выявления областей притяжения к устойчивым профилям и формы предельного профиля;
- формирование рациональных стратегий проектирования и управления в социально-экономических системах.

Для гипотетических иерархий приводятся результаты численных расчетов.

1. Дмитриев М.Г., Жукова Г.С., Петров А.П. Асимптотический анализ модели "власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти// Математическое моделирование. 2004. Т.16, №5. стр. 23-34
2. Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. Оптимальный объем властных полномочий в социально-экономической иерархии по критерию удельного потребления//Информационные технологии и вычислительные системы. 2007. №4. С.4-11.
3. Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. Развитие модели «власть - общество - экономика» // В сб. «Математическое моделирование социальных процессов». Вып. 10. Под ред. А.П.Михайлова. М.: КДУ, 2009, с. 17-29.
4. Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. Учет действия коррупции в стационарной модели «власть-общество-экономика» //Социальная политика и социология, 2009, № 5, с. 378-387.
5. Павлов А.А. Линейный синтез управления ресурсами в нестационарной модели «власть-общество-экономика» //Социальная политика и социология, 2009, № 5, с. 210-219.

Дубук Василь Іванович, кандидат технічних наук, доцент,
Європейський університет, Львівська філія, Львів, Україна,
e-mail: postmaster@lviv.e-u.in.ua

ОСОБЛИВОСТІ АВТОМАТИЗАЦІЇ АНАЛІЗУ ДАНИХ ПІД УПРАВЛІННЯМ ОПЕРАЦІЙНИХ СИСТЕМ LINUX

Дубук В.І.

Для розв'язання задач автоматизації аналізу даних на практиці можуть використовуватися комп'ютерно-орієнтовані методи на основі прямого програмування, методи, основані на використанні можливостей табличних процесорів [1-4], а також методи, що використовують програмні засоби з апаратом штучних нейронних мереж (ШНМ)[5, 7].

Автоматизований аналіз даних під управлінням операційних систем Linux може грунтуватися на застосуванні вбудованих функцій табличного процесора Gnumeric [6]: обчислення трендів TREND, розрахунку прогнозних значень FORECAST, визначення коефіцієнтів апроксимації функціональних залежностей шляхом лінеаризації на основі методу найменших квадратів LINEST [2-4].

Разом з цим, для автоматизації аналізу даних, які визначають характеристики функціонування технічних пристроїв, а також економічних даних може використовуватися метод, оснований на використанні можливостей штучної нейронної мережі [5].

Метою даного наукового дослідження була розробка методу автоматизації аналізу даних технічного чи економічного характеру на основі використання програмного засобу з апаратом штучної нейронної мережі під управлінням операційних систем Linux.

Розроблений метод полягає у визначенні прогнозних значень функціональної залежності для досліджуваного часового ряду даних на основі визначеної множини даних попередніх значень функціональної залежності. На відміну від [5], де розроблена нейромережева система для прогнозування часових рядів передбачає використання програмного середовища MatLab, практична реалізація пропонованого методу успішно здійснена на основі програмного забезпечення SNNS v.4.2, особливостями якого є відкритість ліцензії на використання та орієнтованість на роботу під управлінням операційних систем сімейства Linux [7].

Розроблений метод підвищує ефективність аналізу даних і може успішно використовуватися на практиці для розв’язання задач автоматизації аналізу даних технічного та економічного характеру.

1. Гавриленко В.В., Пархоненко А.М. Решение задач аппроксимации средствами Excel // Компьютеры + программы, 2002.-№12.- С.42-47.

2. Дубук В.І. Автоматизований аналіз даних на персональних комп'ютерах // Науково-технічна інформація, № 3(37), 2008 р., с. 44-45.

3. Дубук В.І. Автоматизація прогнозного аналізу даних під управлінням операційних систем Linux // Технічні вісті, 2009/1(29), 2(30), с. 68 – 69.

4. Дубук В.І., Цюра Т.З. Особливості автоматизації прогнозного аналізу даних під управлінням операційних систем Linux // Науково-технічна інформація. – 2010. -№3.–С.36-40

5. Кондратенко Г., Гордієнко Є. Синтез та дослідження нейромережевої системи для прогнозування часових рядів // Технічні вісті, 2009/1(29), 2(30), с. 104 – 104.

6. Baudais E., Breit K., Custer A., Canty T., Dassen R., Goldberg J., Guelzow A.J., Hellan J.K., De Icaza M., Livonen J-P., Kirillov A., Klost S., Leblanc G., Luangkerson L., Miesbouer T., Schuller W., Tigelaar A.S., Twardy Ch., Weber A., Welinder M. The Gnumeric Manual. Ver.1.9.16 - The Gnumeric Team, Gnome Doc. Project, 1998-2009 // http:// www.gnumeric.org

7. SNNS v.4.2: Help File.- Stuttgart: University of Stuttgart, 1995. – 73 p.

Евдокимов Виктор Федорович, д-р техн. наук, профессор, чл.-корр. НАН Украины,
Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины, Киев, Украина
Кучаев Александр Андреевич, д-р техн. наук, ст. научн. сотрудник,
Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев, Украина
e-mail: alexander-kuchaev@svitonline.com
Петрушенко Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. научн. сотрудник,
ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины, Киев, Украина
Кучаев Виталий Александрович, аспирант,
ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины, Киев, Украина, e-mail: VitalKu07@yandex.ru

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УСИЛИЙ В КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ С ЯВНОПОЛЮСНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПЕРЕМЕШИВАТЕЛЕМ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Евдокимов В.Ф., Кучаев А.А., Петрушенко Е.И., Кучаев В.А.

При непрерывной разливке стали широкое применение нашли электромагнитные перемешиватели (ЭМП) с явными полюсами. В настоящей работе обобщается блочный алгоритм, разработанный для ЭМП с неявными полюсами на случай ЭМП с явными полюсами. Суть предлагаемого обобщения состоит в том, что сплошное сечение магнитной системы ЭМП с явными полюсами представляется в виде изолированных друг от друга элементов: ярма кольцевого сечения и шести полюсных наконечников.

В основе разработанного алгоритма лежит разложение электромагнитного поля в сечении системы на симметричные составляющие (СС). Показано, что результирующее распределение вихревых токов (ВТ) в сечении системы представляет собой сумму двух СС, для каждой СС получена система интегральных уравнений (СИУ), которая существенно проще исходной СИУ для результирующего распределения ВТ, поскольку областью определения в ней есть не все сечение, а его часть, лежащая в первом квадранте. Для каждой СС рассчитывается распределение ВТ, токов намагниченности (ТН), вектора магнитной индукции (ВМИ). Суммируя полученные ВТ, ТН и ВМИ находим результирующие распределение этих величин. По полученным ВТ и ВМИ в сечении заготовки находим электродинамические усилия (ЭДУ). При расчёте для каждой СС распределение ВТ, ТН и ВМИ учитывается то обстоятельство, что одна из составляющих сечения есть кольцо, внутренняя и наружная границы которого являются окружностями. Интегральное уравнение для плотности ТН в этом случае упрощается и имеет аналитическое решение равное правой части уравнения. При решении системы алгебраических уравнений (САУ), аппроксимирующей СИУ, предлагается предварительно упростить ее путем последовательного парного исключения вектор-столбцов плотностей ТН и к полученной САУ применить блочный метод Гаусса. Такой подход позволяет существенно уменьшить число операций для получения решения. Это объясняется тем, что матрица исходной САУ содержит много нулевых элементов. Исключить их из вычислительного процесса при применении стандартных программ, реализующих блочный метод Гаусса не представляется возможным. Существенно сократить число нулевых элементов в вычислительном процессе позволяет предварительное преобразование САУ путем последовательного парного исключения вектор-столбцов плотностей ТН. В результате блочный метод Гаусса применяется к САУ, матрица которой содержит четыре нулевых элемента (при общем числе элементов 16). Разработанная модель распределения синусоидальных ВТ и ЭДУ в системе кристаллизатор МНЛЗ–явнополюсный ЭМП может быть применена как для квадратных, так и для круглых заготовок.

АС Жохін
Інститут теоретичної фізики ім.М.М.Боголюбова НАН України
03680 Україна, Київ вул. Метрологічна 14-б, aszhokhin@bitp.kiev.ua

НЕСТАБІЛЬНІСТЬ ЦІН В ЕКОНОМІЧНІЙ ДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Жохін А.С.

На основі моделей з [1] вивчається еволюція цін товарів в ринковій економіці. Розглядається економічна система з m агентами, які є одночасно виробниками і споживачами n товарів. Ціна товарів описується вектором $p=(p_1,\dots,p_n)$. Ціни товарів в економічній системі без зовнішнього інвестування

$$p_1=(p_{11},\dots,p_{1n})$$

задовільняють систему рівнянь

$$\frac{dp_{1i}}{dt}=\sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ik}(p_1)D_k(p_1)-\Psi_i p_{1i}, i=1,\dots,n.$$

Вектор зовнішнього інвестування $M=(M_1,\dots,M_n)$ це кошти, які вводяться в економічну систему призводять до зміни (збільшення) виробництва товарів. Нехай вектор $\Psi_0=(\Psi_{01},\dots,\Psi_{0n})$ описує додаткове виробництво товарів за рахунок інвестицій. Тоді ціни економічної системи при умові інвестування $p_2=(p_{21},\dots,p_{2n})$ описуються рівняннями

$$\frac{dp_{2i}}{dt}=\sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ik}(p_2)(D_k(p_2)+M_k)-(\Psi_i+\Psi_{0i})p_{2i}, i=1,\dots,n.$$

Допустимо, що ми хочемо змінити випуски товарів при інвестуванні так, щоби рівноважні ціни залишилися такими, як і при відсутності інвестицій. Тоді якщо

$$p_1^0=p_2^0=p^0,$$

то

$$\sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ik}(p^0)M_k=\Psi_{0i}p_i^0, i=1,\dots,n.$$

Достатні умови нестійкості по Ляпунову [2] рівноважних цін можна записати через наступну нерівність:

$$M_k>\frac{\sum_l D_{kl}\sum_s(p_s^0-p_l^0)c_{sk}}{\sum_s c_{sk}}, k=1,\dots,m.$$

1. N.S. Gonchar, *Mathematical foundations of information economics* (BITP, Kiev, 2008).
2. Н.Г. Четаев, *Устойчивость движения* (Москва, 1955).

Іващенко Л.В., аспірантка
Київського національного економічного університету ім. В. Гетьмана, м. Київ, Україна,
e-mail: 3122311@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПІДКРІПЛЕННЯ БАНКОМАТІВ ГОТІВКОВИМИ КОШТАМИ

Іващенко Л.В.

Одним з найефективніших та одночасно економічних каналів продажу/надання роздрібних банківських послуг є банкомат (АТМ). Ідея створення апарата, який може у будь-який час видавати паперові гроші, прийшла Джону Шеппард–Баррону у середині 60-х років, коли він працював на компанію з виробництва цінних паперів.

Функціональність сучасних банкоматів значно ширша - з «механічного касира» банкомат перетворився на багатофункціональний пристрій самообслуговування, доступний клієнтам у режимі 24/7 (цілодобово 7 днів на тиждень). Проте, функція отримання готівки і на сьогодні є найбільш запитуваною. У зв'язку з цим, проблема достатнього підкріплення банкоматів готівкою за умови уникнення відволікання зайвих коштів є актуальною проблемою у банківській діяльності.

Оптимальна сума завантаження банкомата на практиці часто визначається «на око», спираючись на досвід відповідних працівників банку та плани чи прогнози. Програмні продукти, які покликані вирішувати це питання, часто досить громіздкі і дорогі, внаслідок чого їх впровадження у невеликій фінансово-кредитній установі є малоефективним.

Пропонується модель для прогнозування потреби завантаження банкомата готівкою шляхом аналізу найбільш значимих для задоволення потреб клієнта факторів, а саме:

ризик утворення дефіциту коштів (ресурсів);

обсяг поставок, при якому ризик дефіциту не перевищить задану величину α.

Витрати коштів у банкоматах мають випадковий характер з середньою інтенсивністю λ одиниць на день. Для покриття витрат здійснюються регулярні завантаження обсягу коштів β. Проміжок часу Т, впродовж якого витрати ресурсу виявляться рівними обсягу поставок β, є випадковою величиною, яка підпорядковується гамма-розподілу з параметрами β і λ.

З визначення функції розподілу величини Т маємо:

$$P(T < T_0) = F_\Gamma(T_0, \beta, \lambda)$$

Ця функція залежить від двох невід'ємних параметрів β і λ. Проте, ця функція не може бути табульована, оскільки потрібна таблиця з трьома входами. Тому, зручніше користуватися неповною гамма-функцією (функцією Пріма) двох змінних β і $z = \lambda t$: $F_\Gamma(t, \beta, \lambda) = \gamma(z, \beta)$

За відомими значеннями α і λ легко знаходимо β, тобто обсяг поставок, при якому ризик утворення дефіциту коштів у банкоматі буде меншим ніж α.

Капитанов Дмитрий Валерьевич, аспирант,
ННГУ имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: ocherk@list.ru;
Кузенков Олег Анатольевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
ННГУ имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: kuoa7@uic.nnov.ru

РАЗНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ОТБОРА

Капитанов Д.В., Кузенков О.А.

Объектом изучения являются математические модели процессов отбора, описывать которые наиболее целесообразно системами разностных уравнений [1]. Наличие процесса отбора можно интерпретировать как самоорганизацию системы, так как вещество или энергия, первоначально хаотически распределенные между всеми ее элементами, постепенно собираются на одном, в известном смысле самом лучшем. С точки зрения моделей принятия решений наличие отбора в системе означает, что вероятность выбора одного варианта поведения, стечением времени, стремится к единице, в то время как вероятности выбора всех остальных стремятся к нулю. К процессам отбора относятся любые процессы сортировки, процессы распознавания образов, процессы выбора оптимальной стратегии поведения. Условие отбора тесно связано с глобальной асимптотической устойчивостью состояния равновесия системы. При наличие отбора состояние равновесия может быть и неустойчивым, но, если оно устойчиво в малом, то выполнение условия отбора гарантирует глобальную асимптотическую устойчивость состояния равновесия.

Изучать процессы отбора наиболее целесообразно в системах, где сохраняется общая численность элементов, так как здесь исчезновение вида возможно только за счет увеличения численности других видов, а не за счет уменьшения общей численности [2]. С помощью перехода от исходных фазовых переменных к их удельным весам исследование таких систем можно свести к изучению систем разностных уравнений, решение которых принадлежит стандартному симплексу – подмножеству конечномерного евклидова пространства, состоящему из векторов с неотрицательными координатами, сумма которых равна единице. Системы, обладающие этим свойством, называются системами на стандартном симплексе.

В данной работе проведено систематизированное исследование процессов отбора, описываемых системами разностных уравнений. Получен ряд необходимых и достаточных условий отбора, а так же логарифмический критерий. Установлена связь понятий отбора в разностном случае с соответствующим дифференциальным аналогом.

1. Кузенков О.А., Капитанов Д.В. Системы разностных уравнений на стандартном симплексе // Вестник ННГУ. 2010. №5, С 178-184.
2. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора: Учебное пособие.-Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 324с.

Карпуша Марина Василівна, студент 5 курсу, факультет електроніки та інформаційних технологій,
Сумський державний університет, Суми, Україна,
e-mail: marina_karpusha@ukr.net;
Мартинов Олександр Сергійович, студент 5 курсу, факультет електроніки та інформаційних технологій,
Сумський державний університет, Суми, Україна,
e-mail: abdgirk@yandex.ru

ПРОГНОЗУВАННЯ ДОХОДНОСТЕЙ АКЦІЙ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ З МЕТОЮ ЙОГО СТАТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Карпуша М. В., Мартинов О. С.

Пропонується алгоритм побудови ефективного інвестиційного портфеля акцій з врахуванням їх прогнозних доходностей, які отримані за допомогою неперевно-дискретної моделі. Використання у якості очікуваних доходностей їх прогнозних значень при формуванні реальних інвестиційних портфелів дає можливість більш ефективно складати портфель і отримувати вищі доходності у порівнянні з класичним підходом [1].

На періоді ідентифікації модель будується таким чином, щоб забезпечити високі апроксимаційні властивості для цін акцій та їх доходностей. У якості неперервної складової пропонується використовувати таку функціональну форму, щоб дискретна частина моделі разом з випадковим збуренням являла собою стаціонарний часовий ряд [2]. У даній роботі у якості неперервної моделі використовується поліноміальний тренд, а дискретна складова будується ітераційним шляхом. На кожному кроці ітерації число змінних дискретної складової збільшується на одиницю до тих пір, поки не буде отримана висока якість апроксимації статистичних даних. При такому підході, як показують практичні дослідження, степінь полінома не перевищує трьох, а число ітерацій не перевищує чотирьох.

Та частина моделі, що відображає дискретні зміни, на кожному кроці визначається в залежності від напрямку відхилення оціненої регресійної моделі від статистичних даних. Однак таке введення фіктивних змінних приводить до неоднозначності при визначенні прогнозного значення регресанда. Для прогнозної точки кожна з фіктивних змінних може приймати два значення –1 або 1, тому збільшення кількості ітерацій приводить до збільшення варіантів, з яких необхідно вибрати оптимальне прогнозне значення. Ця проблема розв’язується за допомогою поліноміальної логіт – моделі [3].

Апробація запропонованого алгоритму проводилася на прикладі побудови оптимального інвестиційного портфеля, який складається з акцій шести підприємств: Алчевського металургійного заводу (ALMK), Дніпроенерго (DNEN) , Райфайзен Банку Аваль (BAVL), УкрНафти (UNAF), УкрТелекому (UTLM), Стаханівського вагонобудівного заводу (SVGZ). Були вибрані саме ці компанії, так як ціни на їх акції мають тенденцію до росту та є досить волатильними. Високі імітаційні та прогнозні властивості моделі вказують на можливість використання отриманих результатів при прийнятті інвестиційних рішень щодо формування ефективного портфеля акцій.

1. Markowitz H.M. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments / H.M. Markowitz. – Oxford; N.Y.: Blackwell, 1991. – 384 p.
2. Dickey D.A., Fuller W.A. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root / Journal of the American Statistical Association. – №74. – 1979. – p. 427-431
3. Давнис В. В. Прогнозные модели экспертных предпочтений. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. – 248с.

Касьянюк Веда Станиславовна, кандидат физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев, Украина
e-mail: veda.sia@mail.ru

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ ЧИСЛЕННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЯХ

Касьянюк В.С.

При рассмотрении задачи определения спектрального состава многокомпонентных смесей набор спектров смесей одинакового качественного, но различного количественного состава не обеспечивает единственности решения задачи нахождения спектров индивидуальных компонентов. Если оказывается возможным получить оценки относительных концентраций компонентов смеси, то эта задача сводится к оптимальной оценке решения системы линейных алгебраических уравнений со случайными погрешностями в данных и нестабильной матрицей

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX} + \nabla \qquad (1)$$

где $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 + \Gamma$, $\mathrm{M}(\nabla) = 0$, $\mathrm{M}(\nabla\nabla^*) = R$, $\mathrm{M}(\Gamma) = 0$, $\mathrm{M}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}_0$, $\mathrm{M}(\Gamma\Gamma^*) = Q$. Здесь $\mathrm{X}_{i,j=1}^{k,n}$ - матрица искомых спектров компонентов, $\mathrm{A}_{i,j=1}^{m,k}$ - матрица оценок относительных концентраций, $\mathrm{Y}_{i,j=1}^{m,n}$ - матрица измеренных спектров смесей, $\Gamma_{i,j=1}^{m,k}$ и $\nabla_{i,j=1}^{m,n}$ - случайные матрицы погрешностей оценок относительных концентраций компонентов и измеренных спектров, k - число компонентов, m - число смесей. Обычно при оценке относительных концентраций, например, из хроматографических данных, погрешности достигают 10%. Кроме того, при плохом разделении компонентов в смесях матрица A плохо обусловлена.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать метод парето-оптимального оценивания [1], согласно которому оценка матрицы $\hat{\mathrm{X}} = \mathrm{BY}$, $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{i,j=1}^{k,n}$ ищется в ходе решения двукритериальной задачи минимизации уровня шумового фона (дисперсии) $h(\mathrm{B})$ и величины операторной невязки $\varphi(\mathrm{B})$, характеризующей смещение искомой оценки

$$h(\mathrm{B}) = \mathrm{M}(\|\mathrm{B}\nabla\|^2) \to \min_{\mathrm{B}}$$

$$\varphi(\mathrm{B}) = \mathrm{M}(\|\mathrm{BA} - \mathrm{E}\|^2) \to \min_{\mathrm{B}} \qquad (2)$$

В ходе решения задачи (2) строится континуальное множество искомых оценок вида

$$\hat{\mathrm{X}} = \mathrm{A}_0^*(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_0^* + Q + \alpha R)^{-1}\mathrm{Y}\ ,\ \alpha \in (0,\infty), \qquad (3)$$

причем с точки зрения решения задачи (2) все оценки (3) равнозначны. Предлагаются и обосновываются различные варианты выбора конкретного значения параметра парето-оптимизации α. Показывется, что среди континуума оценок (3) содержатся традиционные решения поставленной задачи: псевдоинверсные, максимально-правдоподобные., а также полученные методом регуляризации А.Н.Тихонова,

1. Бєлов Ю.А., Касьянюк В.С. Математичні методи і алгоритми обробки в задачі інтерпретації непрямих вимірювань. – К.: Науковий світ, 2000. – 79 с.

Кибич Галина Петрівна, асистент кафедри економіко-математичного моделювання,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: Galunka.com@gmail.com.

МОДЕЛЬ ВИБОРУ РАЦІОНАЛЬНОГО МЕТОДУ ЦІНОУТВОРЕННЯ

Кибич Г.П.

Ціноутворення відіграє важливу роль у функціонуванні ринкового механізму, оскільки забезпечує перерозподіл вартостей між учасниками товарообмінних процесів. З теорії і практики розвитку економічних систем відомо, що економічні відносини в суспільстві формуються навколо ціни, яка визначає принципи і засади перерозподілу вартостей, а також рівень добробуту учасників економіки.

Провідне місце в процесі ціноутворення, який враховує як внутрішні, так і зовнішні фактори, належить визначенню методів формування ціни, які є найбільш адекватним відображенням реальних економічних процесів і виконують функцію регулятора виробництва та обігу товарів, активно впливають на суспільно необхідні витрати. Можна виділити такі основні групи методів ціноутворення:

1) витратні методи (підприємство орієнтується на витрати виробництва);
2) ринкові методи (підприємство орієнтується на кон'юнктуру ринку);
3) параметричні методи (підприємство орієнтується на нормативи витрат на техніко-економічний параметр продукції);
4) методи і моделі прогнозування кон'юнктури ринку і визначення цін.

Як відомо, за ринкових умов для кожного підприємства важливо раціонально використовувати і розподіляти кошти та ресурси різними методами з метою отримання прибутку, а також встановлювати максимально можливу ціну на ту чи іншу продукцію.

Тому, модель вибору раціонального методу ціноутворення продукції M_p, яка забезпечує найбільший прибуток підприємства [1], можна записати так:

$$M_p = < X, Y, I >,$$

де X – фактори, які характеризують потенціал підприємства і ринкові умови, визначені на основі експертних оцінок; Y – деталізовані чинники потенціалу підприємства і ринкових умов; I – інформація про потенціал підприємства і ринкові умови, на основі якої експерти визначають бали.

Для того, щоб обрати оптимальний метод ціноутворення варто скористатися системним аналізом, який складається з таких етапів: 1) створення структурної моделі системи; 2) побудова матриці відносних оцінок; 3) обчислення питомої ваги кожного із варіантів методу ціноутворення; 4) визначення пріоритетів.

Таким чином, практичне застосування моделі вибору раціонального методу ціноутворення для конкретного підприємства дає можливість прийняти раціональне управлінське рішення щодо визначення ціни на продукцію.

1. Герасименко В.В. Ценообразование: Учеб. Пособие. – М.: ИНФА-М, 2006. – 422 с.
2. Костенко О.П., Докучаєв О.А., Адєєва Т.О. Розробка економіко-математичної моделі оптимального вибору методу ціноутворення з використанням табличного процесору «MS EXCEL» // Держава та регіони. Серія: Економіка та підприємництво. – №2. – 2009. – с. 102-108.

Кіосак Володимир Анатолійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Одеський національний політехнічний університет , Одеса, Україна
e-mail:vkiosak@ukr.net
Чепурна Олена Євгенівна, викладач
Одеський державний економічний університет, Одеса, Україна
e-mail: culechova@ukr.net

ДИФЕОМОРФІЗМИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРІВ І МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Кіосак В.А., Чепурна О.Є.

Для моделювання динамічних систем застосовується теорія псевдоріманових просторів V_n ($n > 2$) з метричним тензором g_{ij}. Тензор

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}$$

називають тензором Ейнштейна V_n [1].

Тут $R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha}$ – тензор Річчі, R^{h}_{ijk} - тензор Рімана, $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ - скалярна кривина, g^{ij} - елементи оберненої матриці до g_{ij}.

Дифеоморфізм, тобто взаємнооднозначна відповідність між точками V_n та $\overline{V}_n$, при якому тензор Ейнштейна V_n переходить в тензор Ейнштейна $\overline{V}_n$, називається відображенням із збереженням тензора Ейнштейна.

Досліджуються конформні та геодезичні відображення із збереженням тензора Ейнштейна [2], [3]. Розв'язання задачі моделювання зведено до дослідження системи лінійних диференціальних рівнянь в коваріантних похідних типу Коші із коефіцієнтами, що визначаються метричним тензором V_n. Кількість нетривіальних моделей називають степеню мобільності V_n відносно заданого дифеоморфізму.

Доведено теорему

Теорема: Якщо степінь мобільності V_n відносно конформного або геодезичного відображення із збереженням тензора Ейнштейна більше двох, то V_n– простір сталої скалярної кривини.

Максимальну мобільність допускають простори сталої кривини і лише вони. Розподіл степені мобільності носить лакунарний характер. Використовуючи методи досліджень, розроблені в теорії диференціальних рівнянь в коваріантних похідних отримані тензорні ознаки псевдо ріманових просторів (необхідні і достатні умови) в залежності від їх мобільності відносно відображень із збереженням тензора Ейнштейна. Для малих розмірностей (n = 3, 4) описано повну картину розподілу вказаних степенів.

Отримані результати узагальнюють результати академіка А.З. Петрова [1] для просторів Ейнштейна, тобто просторів з нульовим тензором Ейнштейна.

1. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров – М.: Наука, 1966. – 496 с.
2. Mikes J., Kiosak V., Vanzurova A. Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection / J Mikes, V Kiosak, A Vanzurova – Olomouc: UP, – 2008. – 220 p.
3. Kiosak V., Mikes J., Chepurna O. Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor / V. Kiosak, J. Mikes, O. Chepurna // Journal of Applied Math., vol. III, №1, – 2010. – P. 253-258.

Кобильська Олена Борисівна, аспірант
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна
e-mail: leca91@ya.ru

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ

Кобильська О.Б.

У математичну модель температурного поля рухомого осесиметричного середовища, основою якої є початково-крайова задача для рівняння теплопровідності, доцільно увести інтегральну умову, що з фізичної точки зору, визначає баланс енергії зони нагрівання

$$\int_0^{r_0}\int_{0+}^{t_0}\int_0^{l}\frac{I(t)^2\rho_0+\beta I(t)^2\rho_0 T(r,z,t)}{r_0^4\pi^2}dzdtdz = c\rho_n\int_0^{r_0}\int_{0+}^{t_0}\int_0^{l}(T(r,z,t)-T_0)dzdtdr+$$

$$+r_0\alpha l\int_0^{r_0}\int_{0+}^{t_0}\int_0^{l}\frac{T(r,z,t)-T_c}{v(t)}dzdtdr\,, \qquad (1)$$

де $T(r,z,t)$ – функція температури, ρ_0, β –питомий опір і температурний коефіцієнт опору, λ,α – коефіцієнти теплопровідності та конвективної тепловіддачі з поверхні, r_0, l – геометричні розміри розглядуваної області[1]. Уведення такої умови у математичну модель дозволяє звести початково-крайову задачу до нелокальної. Нелокальні задачі більш точно відображають реальні температурні розподіли у рухомому середовищі[1]. Тому для визначення параметрів керування температурним полем доцільно застосовувати не розв'язки початково–крайових задач, а розв'язки нелокальних задач для рівняння теплопровідності. Якщо замість однієї із крайових умов задачі ввести нелокальну інтегральну умову (1), то з'являється можливість керувати температурним полем у будь-якій точці рухомої області. Параметром керування може виступати один із параметрів, що відображений у рівнянні теплопровідності або у крайовій умові, зокрема це може бути сила струму [2]. при нагріванні області внутрішніми джерелами тепла. Тобто маємо обернену коефіцієнтну задачу теплопровідності. Невідомими є функції $T(r,z,t)$ та $I(t)$. У якості додаткової умови виступає умова (1). Для пошуку параметру керування використовується метод дискретного суміщення [3]. Керування $I(t)$ проводиться згідно з вимогою мінімізації відхилень у рівності (1).

1. Ляшенко В.П. Дослідження температурних розподілів рухомого середовища з імпульсними джерелами тепла / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вісник Харківського національного університету, Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2010.– № 890. – вип.13.– С.115-120.
2. Кобильська О.Б. Исследование влияния импульсного действия тока на температурное распределение в движущейся проволоке/ О.Б.Кобильська, В.П. Ляшенко // Проблемы недропользования: сборник научных трудов международного форума-конкурса молодых учених, (Санкт-Петербург,2010 г.).- Санкт-Петербург: Санкт-Петербурский горный университет имени Г.В. Плеханова, 2010.– С.203 – 205
3. Никитенко Н.И. Теория тепломассопереноса. Киев, Наукова думка. 1983. – 352 с.

Коваль Ольга Іванівна, студентка 4 курсу,факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: webgirl2008@ukr.net (шрифт Times New Roman 11pt, вирівнювання по лівому краю);
Бичков Олексій Сергійович,кандидат фізико-математичних наук,доцент
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail:bos.knu@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ПРОВЕДЕННЯ ХІРУРГІЧНОГО ВТРУЧАННЯ ПРИ ЛІКУВАННІ ХВОРИХ З РІЗНИЦЕЮ ДОВЖИН КІНЦІВОК

Коваль О.І., Бичков О.С.

Для виправлення різниці довжин нижніх кінцівок у дітей протягом періоду фізичного розвитку існує декілька методів, з яких найбільшого вжитку у вітчизняній практиці набув метод подовження кінцівки за допомогою апарата Ілізарова, Костюка та ін. Однією з особливостей роботи ДУ „ІТО НАМНУ" є виконання операції в молодшому віці (починаючи з 1 року).

Всі інші методи лікування, на відміну від подовження, спрямовані не на подовження хворої кінцівки, а на вкорочення здорової, що некоректно як з косметичної, так і з клінічної точки зору, оскільки може викликати ускладнення на здоровій до втручання кінцівці. Але якщо різниця є досить великою та прийнято рішення про вирівнювання довжин, то інколи проведення такої операції є необхідним. Основою методики є використання декількох вимірів кінцівок з певними інтервалами, що дає можливість спрогнозувати кінцеві довжини та різницю довжин кінцівок.

В ДУ „ІТО НАМНУ" відомі світові випадки, коли внаслідок неправильного прийняття рішень пацієнти переносили по 30 операцій і більше (максимум - 52). Тому надзвичайно важливою задачею є прогнозування розвитку різниці довжин кінцівок та ефекту оперативного втручання.

Запропоновано моделюючий програмний комплекс для розв'язання таких задач:

1) на основі декількох спостережень пацієнта (зріст, вага, рентгенограми) та деяких індивідуальних даних (зріст батьків) спрогнозувати кінцевий ріст та кінцеву довжину кінцівок, що допоможе в прийнятті рішень щодо способу лікування.

2) отримати картину розвитку різниці довжин кінцівок при оперативному втручанні

Коляденко Максим Андрійович, аспірант кафедри інформаційних систем.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: mak_kol@ukr.net

ВИКОРИСТАННЯ ІНДИКАТОРА 52-WEEK HIGH ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ПОВЕДІНКИ ЦІНИ АКЦІЙ

Коляденко М. А.

Для моделювання поведінки акцій на фондовому ринку використовуються два підходи: фундаментальний та технічний аналіз. Існує також теорія випадкових блукань, відповідно до якої зміна вартості цінних паперів коливається випадковим чином навколо своєї об'єктивної ціни, тому застосування обох підходів – марна витрата часу. Мета даної роботи – зробити перший крок в комплексній перевірці гіпотез технічного аналізу на прикладі фондових бірж США.

Для розпізнавання найтиповіших моделей динаміки ціни акцій використовуються технічні індикатори, які з високою ймовірністю здатні виявляти тенденції та допомагають будувати якісні прогнози. Для дослідження вибраний найвідоміший індикатор 52-week high - вважається, що при досягненні найвищої ціни за останній рік (52 неділі) повинен початися стрімкий ріст акції. [1] Основні причини, які лежать в основі сильного імпульсу ціни фінансового активу вгору відразу після досягнення нового річного максимуму:

- Всі інвестори які володіють акціями компанії, отримують прибуток. Ситуація влаштовує всіх акціонерів, тому бажаючих продавати акції стає менше.
- З іншого боку, всі спекулянти, які грають на пониження курсу за допомогою коротких продажів, отримують збитки, тому відбувається покриття програшних позицій.
- Дуже часто, причиною виходу ціни акції з річного коридору стає деяка позитивна новина стосовно діяльності компанії. Тому до числа покупців приєднуються фундаментальні інвестори та інституційні фонди.
- В акції відкривається теоретично необмежений потенціал росту.

Для доведення доцільності використання індикатора 52-week high необхідно провести масштабне дослідження поведінки ціни різних акцій при однакових відправних умовах.

Дослідження проводилось серед акцій з середнім об'ємом торгівлі не менше 1 млн. акцій в день і ціною не менше 10$. За основу бралася прибутковість за один торговий день портфелю цінних паперів, який складався зі 100 акцій кожної компанії, ціна відкриття яких на початку торгової сесії в 9.30 була найвищою за останній рік, тобто задовольняла індикатор 52-week high. Збір інформації проводився кожного робочого дня з грудня 2009р. по листопад 2010р. Всього було зведено інформацію за 252 торгових дня. З них у 22 випадках портфель акцій з індикатором 52-week high був порожнім, у 2 випадках дохід дорівнював нулю, 120 днів виявилися прибутковими з середнім прибутком у 506,69 $ і 108 днів виявилися збитковими з середньою величиною втрат у -349,83 $. У прибуткові дні середня вартість портфелю була 78 247 $, а у збиткові – 62 513$. Середня ж відносна прибутковість за день склала 0,65%, а збитки неслися у розмірі 0,56% від задіяного капіталу. Таким чином при вкладенні коштів у непорожній портфель акцій з індикатором 52-week high отримуємо можливість отримати прибуток у 506,69$ з ймовірністю 52,17%, збитки у розмірі -349,83$ з ймовірністю 46,96% і залишити капітал без змін з ймовірністю 0,87%. На основі даної роботи можна розробляти автоматизовані торгові системи управління капіталом.

[1] John J. Murphy, Technical Analysis of the Financial Markets (New York Institute of Finance, 1999), pages 24-31.

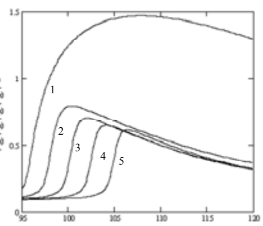
Кузьменко Борис Володимирович, доктор технічних наук, професор,
Інститут вугільних енерготехнологій, НАНУ, Київ Україна
e-mail: kuzmenko@gala.net
Мальчевський Ігор Анатолійович, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник ,
Президія Національної академії наук України
e-mail: mal@nas.gov.ua

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ САМОЗАЙМАННЯ ПИЛОВУГІЛЬНИХ СУМІШЕЙ З ВРАХУВАННЯМ РАДІАЦІЙНОЇ СКЛАДОВОЇ

Кузьменко Б.В., Мальчевський І.А.

В основу математичної моделі процесу самозаймання пиловугільних сумішей з врахуванням радіаційного теплообміну покладено: рівняння теплового балансу суміші, що реагує; рівняння матеріального балансу за витратою кисню; рівняння матеріального балансу за витратою вугільного пилу [1]. Для умов, коли враховується радіаційний теплообмін, порівняно з випадком, коли останній не враховується, змінюється тільки перша складова математичної моделі процесу самозаймання – рівняння теплового балансу суміші, що реагує, два інших рівняння залишаються такими ж, як і для випадку, коли радіаційний теплообмін не враховується. У випадку врахування радіаційного теплообміну рівняння теплового балансу суміші, що реагує має вигляд: $dQ_{хр} - dQ_{н} - dQ_{тв} - dQ_{нс} = 0$, де: $dQ_{хр}, dQ_{н}, dQ_{тв}, dQ_{нс}$, - величини теплоти, що: виділяється в процесі хімічного реагування, витрачається на: нагрівання суміші; теплове випромінювання, відводиться через стінки в навколишнє середовище. За умови рівномірного розподілу вугільного пилу в пиловугільній суміші в елементарному об'ємі на ділянці камери dx можна записати: рівняння теплового балансу запишеться у вигляді $\frac{d\overline{\theta}}{d\chi} = \frac{\overline{c}\overline{\mu}}{\overline{\theta}^2}\exp(-\frac{1}{\overline{\theta}}) - \Omega(\overline{\theta} - \overline{\theta}_1) - \varsigma(\overline{\theta}^4 - \overline{\theta}_1^4)$, а два рівняння матеріального балансу (за окислювачем та за вуглецем) - у вигляді: $\frac{d\overline{c}}{d\chi} = -\frac{\overline{c}\overline{\mu}}{\theta_{ад}\overline{\theta}^2}\exp(-\frac{1}{\overline{\theta}})$, та $\overline{\mu} = 1 - \alpha(1 - \overline{c})$.

На графіку подані графіки залежностей для динаміки безрозмірної температури $\overline{\theta}$ суміші, що розігрівається, за різних значень коефіцієнта ς біля складової, що визначає радіаційний теплообмін (крива: 1- ς=0; 2 - ς=0.5; 3 - ς=1.0; 4- ς=1.5; 5-ξ=2.0. Точка максимуму, на кожній із складових графіка, визначає точку можливого самозаймання за умов наявності теплового випромінювання. Для реалізації теплового самозаймання необхідний певний само розігрів, що визначається співвідношенням акад. Семенова М.М., [1]. Фазова траєкторія: $\frac{d\overline{\theta}}{d\overline{c}} = -\theta_{ад} + \theta_{ад}[\Omega(\overline{\theta} - \overline{\theta}_1) + \varsigma(\overline{\theta}^4 - \overline{\theta}_1^4)] \times \times \exp(\overline{\theta}^{-2}) / [\overline{\theta}\overline{c}(\alpha\overline{c} + 1 - \alpha)$, $\overline{c} = 1, \overline{\theta} = \overline{\theta}_1$ - основа моделі теорії катастроф для цього процесу.



1. Кузьменко Б.В., Мальчевський І.А. Теплове самозаймання пиловугільних сумішей. Монографія. - К.: Наукова думка, 2011.- 278 с.

Кузьминов Евгений Викторович, кандидат экономических наук,
Классический приватный университет,Запорожье, Украина,
e-mail: kuzminov@cupid.com

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ IT МЕТРИК

Кузьминов Е.В.

Бывают ситуации, когда существующий web-ресурс не отвечает тем задачам, которые он призван решать. Тогда требуется проведение тщательного всестороннего анализа проекта на предмет корректности работы, функциональности, совместимости графики, качества наполнения сайта и много другого, т.е. эффективности его работы. Основным аспектом такого анализа является оценка воронки продаж сайта.

Под воронкой будем понимать предопределённый «путь», по которому пользователь должен пройти, чтобы принести прибыль, которая является основной целью деятельности любой компании.

Модель воронки на сайте характеризуется метриками:

Reg-to-conf – процент пользователей подтвердивших регистрацию.

Conf-to-Paid – процент пользователей, по отношению ко всем подтвердивших регистрацию. При этом стоит заметить, что в качестве конфирмов в данной формуле выступают только те пользователи, которые гипотетически могли бы заплатить.

3dfirst-to-3drepeat – процент триал подписок, которые повторили платеж после своего окончания.

Revperconf – доход от одного конфирма.

Так как процессы регистрации и конфирма на виджете происходят большей частью автоматически, то для виджета коэффициенты Reg-to-conf и Conf-to-Paid не показательны и поэтому вместо них используются параметры Install-to-Siteaccess и Siteaccess-to-Paid.

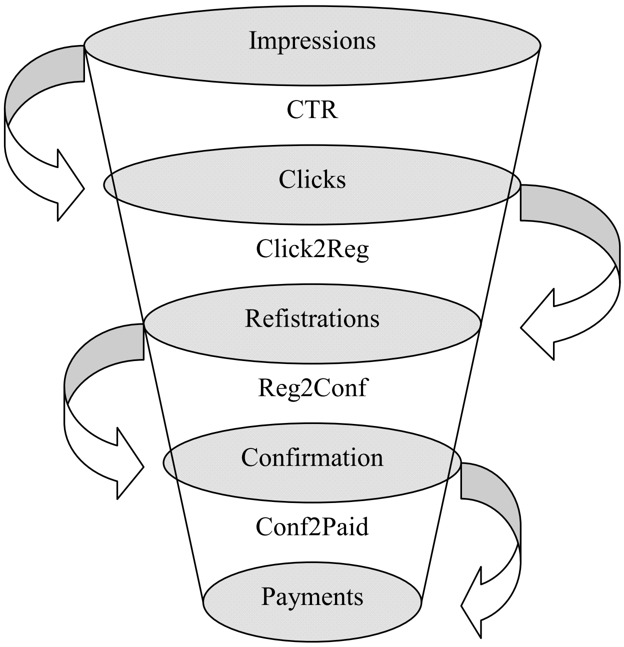


Рис. 1. Основные метрики, характеризующие воронку

Таким образом, рассмотренные параметры, характеризующие воронку, позволяют оценить не только эффективность ее работы и платежеспособность трафика, но и эффективность работы сайта в целом.

Куликов Анатолий Николаевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
Куликов Дмитрий Анатольевич, кандидат физ.-мат. наук,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия,
e-mail: kulikov_d_a@mail.ru
Рудый Александр Степанович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

ФОРМИРОВАНИЕ НАНОСТРУКТУР НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКИХ ПОДЛОЖЕК ПРИ ИОННОЙ БОМБАРДИРОВКЕ

Куликов А.Н., Куликов Д.А., Рудый А.С.

Математической моделью образования неоднородного рельефа на поверхности плоской подложки под воздействием ионной бомбардировки может служить следующая краевая задача [1,2]

$$u_t = -b_1 u_{xx} - b_2 u_{yy} - d_1 u_{xxxx} - d_2 u_{yyyy} - d_3 u_{xxyy} + c_1 (u_x)^2 + c_2 (u_y)^2, \tag{1}$$

$$u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y + 2\pi) = u(t, x, y). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно интерпретировать как обобщенное уравнение Курамото – Сивашинского [2]. Иногда его называют уравнением Брэдли – Харпера [1]. Краевая задача (1),(2) приведена уже в перенормированном виде и моделирует процесс образования наноструктур [2,3]. Пусть реализуется одно из трех условий: 1) $b_1 = d_1 + \varepsilon, b_2 < d_2$; 2) $b_2 = d_2 + \varepsilon, b_1 < d_1$; 3) $b_1 = d_1 + \varepsilon\alpha_1, b_2 = d_2 + \varepsilon\alpha_2$, где ε - малый параметр, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.

Теорема. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (1), (2) имеет семейства устойчивых пространственно неоднородных решений:

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \gamma_1 + (6\varepsilon\, \mathrm{sign}(c_1) + o(\varepsilon))t + 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2} \,|\, c_1 \,|^{-1} \cos(x + \nu_1) + \Theta_1(\varepsilon, x),$$

если реализуется первый вариант условий;

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \gamma_2 + (6\varepsilon\, \mathrm{sign}(c_2) + o(\varepsilon))t + 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2} \,|\, c_2 \,|^{-1} \cos(y + \nu_1) + \Theta_2(\varepsilon, y)$$

во –втором случае. Наконец, в третьем

$$u(t, x, \varepsilon) = \gamma_3 + [6\varepsilon(sign(c_1) + sign(c_2))] + 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2}[|\, c_1 \,|^{-1} \cos(x + \nu_1) + |\, c_2 \,|^{-1} \cos(y + \nu_2)] + \Theta_3(\varepsilon, x, y).$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \nu_1, \nu_2 \in R$, функции Θ_j имеют в нуле порядок $o(\varepsilon^{1/2})$.

Пусть: 1) $b_1 = m^2 d_1 + \varepsilon$; 2) $b_2 = d_2 p^2 + \varepsilon$; 3) $b_1 = d_1 m^2 + \varepsilon$, $b_2 = d_2 p^2 + \varepsilon$, то появляются семейства седловых (неустойчивых) пространственно неоднородных решений.

Методика исследований краевой задачи (1),(2) аналогична конструкциям работы [4].

1. Bradley R.M., Harper J.M.E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment / R.M. Bradley, J.M.E. Harper // J.Vac.Sci. Techol.- № 6.-1988.- P. 2390-2395.
2. Кудряшов Н.А., Рябов Н.П., Стриханов П.Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировки / Н.А. Кудряшов, Н.П. Рябов, П.Н. Стриханов // Ядерная физика и инженеринг. - Т.1. - № 2.-2010.- С. 151-158.
3. Makeev M., Cuerno R., Barabasi A. - L. Morphology of Ion-Sputtered Surfaces / M. Makeev, R. Cuerno, A. - L. Barabasi // arXiv: cond-mat/0007354v1.
4. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера / А.Н. Куликов, Д.А. Куликов // Дифференциальные уравнения. - Т. 46. - № 9.- С. 1290 - 1299.

Лебедев Валерий Викторович, доктор экономических наук, кандидат физ.-мат. наук, профессор,
Государственный университет управления, Москва, Россия,
e-mail: v.lebedev@etest.ru
Лебедев Константин Валерьевич, кандидат экономических наук,
Центр исследований и статистики науки, Москва, Россия,
e-mail: akvl72@gmail.com

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ ПРИ АНАЛИЗЕ РАЗВИТИЯ ОДНОПРОДУКТОВОЙ ФИРМЫ

Лебедев В.В., Лебедев К.В.

В том же 1838 г., когда А.-О. Курно издал основополагающую работу по математической экономике [1], П.-Ф. Ферхюльст опубликовал статью “Замечания о законе, согласно которому происходит рост населения”, в которой впервые была построена непрерывная модель для анализа социальных процессов [2]. Работа Ферхюльста, как и работа Курно, не была по достоинству оценена современниками. Позже, однако, выяснилось, что построенное Ферхюльстом дифференциальное уравнение логистического роста, которое называют также уравнением Ферхюльста, носит универсальный характер: оно описывает динамические процессы с насыщением в самых разных областях науки.

В XX веке в математической биологии были построены математические модели динамики биологических сообществ, развивающие идею Ферхюльста о снижении темпа прироста популяции вследствие конкуренции [3]. Позже было установлено, что многие модели экономики имеют формальное сходство с моделями популяционной динамики.

В докладе обсуждаются два варианта динамической модели однопродуктовой фирмы, отражающей производственные, инвестиционные и амортизационные процессы. Показано, что в одномерном случае динамика фирмы при определенных гипотезах определяется уравнением логистического типа

$$\frac{dQ}{dt} = (\lambda(p-n)-\mu)Q - \lambda m Q^2 - \lambda(c+H),$$

а в двумерном – уравнениями, которые в частном случае совпадают с уравнениями системы классической модели “хищник жертва”:

$$\frac{dw}{dt} = qw\frac{Q-Q_e}{Q_e}, \; \frac{dQ}{dt} = (\lambda(p-n)-\mu-\lambda bw)Q - \lambda(c+H) - \lambda awQ^2,$$

которые в частном случае совпадают с уравнениями системы классической модели “хищник жертва”. Здесь Q, $w-$ объем производства и ставка заработной платы соответственно, $t-$ время, а $\mu, \lambda, a, q, p, m, n, c, H, Q_e -$ параметры, имеющие экономический смысл.

Показано, что максимизация личного потребления может привести в одномерном случае к катастрофе (к потере устойчивости равновесного решения и полному сокращению производства), а в двумерном случае – к возникновению колебаний с увеличивающейся амплитудой, которые прекращаются при условии введения ограничений на пределы изменения ставки заработной платы (в этом случае возникает предельный цикл).

1. Cournot A. Recherches sur les principes Mathématiques de la théorie des Richesses. Paris: Chez L. Hachette, 1838. - 189 p.
2. Московкин В.М. Пьер-Франсуа Верхульст − забытый первооткрыватель закона логистического роста и один из основателей экономической динамики / В.М. Московкин, А.В. Журавка // Наука та наукознавство. №2. − Київ, 2003. − С. 75-84.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. − М.: Наука, 1976. − 286 с.

Ляшенко Яков Александрович, кандидат физ.-мат. наук,
Сумский государственный университет, Сумы, Украина,
e-mail: nabla04@ukr.net

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В УЛЬТРАТОНКОЙ ПЛЕНКЕ СМАЗКИ

Ляшенко Я.А.

В работе рассматривается трибологическая система, состоящая из двух гладких твердых поверхностей, нижняя из которых закреплена двумя пружинами и может двигаться под внешним воздействием, а верхняя приводится в периодическое движение по закону косинуса [1]. Работа посвящена исследованию трех случаев – сухое трение без смазки, гидродинамический режим трения со значительной толщиной смазочного материала, и граничное трение [2,3], когда толщина смазочного слоя не превышает несколько атомарных диаметров. В случае гидродинамического режима исследовано поведение смазок трех типов: ньютоновская жидкость, а также псевдопластическая и дилатантная неньютоновские жидкости. Показано, что в случае псевдопластических жидкостей (когда вязкость уменьшается с ростом скорости сдвига) в широком диапазоне параметров наблюдается прерывистый режим трения, который является одной из основных причиной разрушения трущихся деталей в микроэлектронике и достаточно плохо прогнозируется в реальных трибологических системах. Сухое трение (при отсутствии смазки) также демонстрирует прерывистый характер движения трущихся блоков.

Основная часть работы посвящена изучению режима граничной смазки, для которого свойственно аномальное поведение по отношению к системам с объемными смазками. Показано, что в граничном режиме также наблюдается прерывистое трение [1,2], которое исследуется экспериментально [3]. Этот режим рассмотрен в рамках двух моделей, базирующихся на термодинамических принципах [2,4]. Построена фазовая диаграмма с различными режимами трения, содержащая области сухого, жидкостного и прерывистого трения. Исследована кинетика системы и объяснен механизм, приводящий к прерывистому движению. Этот процесс происходит не для всех смазок, и его наличие зависит от уровня вклада вязкой компоненты силы трения в общую силу трения, которая содержит также и упругую компоненту [2]. Когда смазка плавится полностью, упругая компонента силы трения обращается в ноль.

Построены фазовые портреты в координатах положение поверхности трения – скорость ее движения. Показано, что при некоторых параметрах может реализоваться режим, в котором движения поверхностей в противоположных направлениях не эквивалентны. Эта ситуация отвечает проявлению эффектов памяти и подтверждается многочисленными экспериментами [3]. Исследованы кинетические зависимости главных параметров при повышении температуры, скорости движения, а также внешнего давления на поверхности. В рамках модели [2] найдены аналитические выражения для критических скоростей и температур, при которых смазка плавится и затвердевает. Поскольку рассматривается фазовый переход первого рода, эти величины имеют разные значения. Показано, что плавление одной и той же смазки при разных давлениях может происходить как по механизму фазового перехода первого, так и второго рода [4].

[1] Я.А. Ляшенко, ЖТФ **81**, №5, 115 (2011).
[2] Я.А. Ляшенко, ЖТФ **81**, №6, 125 (2011).
[3] H. Yoshizawa and J. Israelachvili, J. Phys. Chem. **97**, 11300 (1993).
[4] I.A. Lyashenko, A.V. Khomenko, L.S. Metlov, Tribol. Int. **44**, 476 (2011).

Ляшенко Яков Александрович, кандидат физ.-мат. наук,
Сумский государственный университет, Сумы, Украина,
e-mail: nabla04@ukr.net;
Хоменко Алексей Витальевич, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Сумский государственный университет, Сумы, Украина,
e-mail: khom@mss.sumdu.edu.ua;
Метлов Леонид Семенович, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины, Донецк, Украина,
e-mail: lsmet@fti.dn.ua;

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ РЕЖИМА ГРАНИЧНОГО ТРЕНИЯ

Ляшенко Я.А., Хоменко А.В., Метлов Л.С.

Рассматривается граничный режим трения, реализующийся в случае, когда две атомарно-гладкие поверхности из слюды разделены смазочным материалом толщиной в несколько атомарных диаметров. Ранее в многочисленных экспериментальных работах (например [1,2]) было показано, что такие системы характеризуются аномальным поведением по отношению к системам, работающим в гидродинамическом режиме. Одной из особенностей является наличие прерывистого режима трения, когда в процессе движения смазка периодически плавится и затвердевает. Такой режим прерывистого движения обычно характерен для сухого трения при отсутствии между поверхностями смазочного материала [3]. Поскольку указанный режим является одной из основных причин разрушения трущихся деталей, его детальное изучение приобретает все большую и большую актуальность.

Ранее в работе [4] построена детерминистическая теория плавления ультратонкой пленки смазки, зажатой между двумя атомарно-гладкими твердыми поверхностями. Для описания состояния смазки введен параметр избыточного объема, возникающий за счет хаотизации структуры твердого тела в процессе плавления. Согласованным образом описано термодинамическое и сдвиговое плавление. Проанализирована зависимость стационарной силы трения от температуры смазки и скорости сдвига трущихся поверхностей при их равномерном сдвиге с постоянной скоростью. Проанализировано влияние скорости, температуры и внешнего нормального давления на прерывистое трение. Проведено качественное сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Предлагаемая работа является продолжением [4], и посвящена исследованию неравновесных процессов, происходящих при плавлении. Для их учета введены температуры смазки и поверхностей трения, что позволяет учитывать как прямой поток энергии, направленный от поверхностей трения к смазке, так и обратный поток. Рассмотрены стационарные состояния системы, когда эти потоки скомпенсированы. Показано, что на поведение смазки критическое влияние оказывает нормальная компонента внешнего давления, действующего на трущиеся поверхности. Записана полная система кинетических уравнений, в которой управляющими параметрами являются относительная скорость сдвига трущихся поверхностей, их температура, а также внешнее нормальное давление. В стационарном случае построена фазовая диаграмма с областями различных режимов трения.

1. H. Yoshizawa and J. Israelachvili, J. Phys. Chem. **97**, 11300 (1993).
2. M. L. Gee, P.M. McGuiggan and J.N. Israelachvili, J. Chem. Phys. **93**, 1895 (1990).
3. B.N.J. Persson, Sliding friction. Physical principles and applications (Springer-Verlag, Berlin, 1998).
4. I.A. Lyashenko, A.V. Khomenko, L.S. Metlov, Tribol. Int. **44**, 476 (2011).

Максимук Олександр Васильович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Львівська державна фінансова академія, Львів, Україна,
e-mail: maks.o@ukr.net;
Марчук Марія Михайлівна, аспірант
Львівська державна фінансова академія, Львів, Україна,
e-mail: mariya13@ukr.net;
Григоренко Ніна Олександрівна, студентка 3 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
email: ayagrigorenko@yandex.ru

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ РИНКУ НЕРУХОМОСТІ УКРАЇНИ В УМОВАХ ВИХОДУ З КРИЗИ

Максимук О.В., Марчук М.М., Григоренко Н.О.

Фінансова-економічн криза спричинила різке падіння як активності, так і цін на ринку нерухомості України. Це стосується всіх його сегментів – від житлового будівництва до земельних ділянок. В даній роботі розглянуто сегмент лише житлової нерухомості, залишивши поза увагою не менш важливі: комерційну нерухомість та ринок землі.

Житлова нерухомість поділяється на два типи- первинну та вторинну. Вони в свою чергу складаються з трьох видів:

1. Економ- клас
2. Житло для середнього класу населення
3. Елітне житло**.**

Ввівши в розгляд величину швидкості зміни кількості операцій з кожним класом житла та ціни його одного квадратного метра до їх визначення будуємо системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [1]. В кожному конкретному випадку виду нерухомості враховується певна множина параметрів; платіжна спроможність населення; рівень іпотечного кредитування банками; вартості земельної ділянки під будівлею; рівень інфляції, і т.д.

Запропонована математична модель апробована шляхом порівняння отриманих з її допомогою розрахованих результатів з фактичними даними ринку нерухомості у місті Львові за 2010 рік.

1. Агапова Т. М., Динамические системы в экономике.:/ Бехренс Д., Курранд Д.- Донецьк: ДонГУ, 2000ю-140с.

Малько Александр Григорьевич, кандидат техн. наук, доцент,
Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа, Украина,
e-mail: malko@pochta.ru;
Малько Анастасия Александровна, аспирант,
Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа, Украина,
e-mail: kokakola@ukr.net.

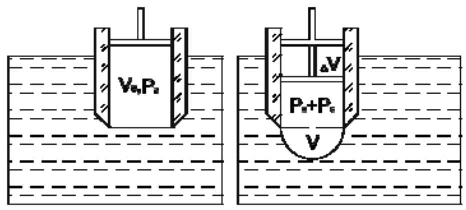
ГИСТЕРЕЗИС ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ ОБЪЁМА ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА ПРИ ФИКСИРОВАННОМ КОЛИЧЕСТВЕ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

Малько А.Г., Малько А.А.

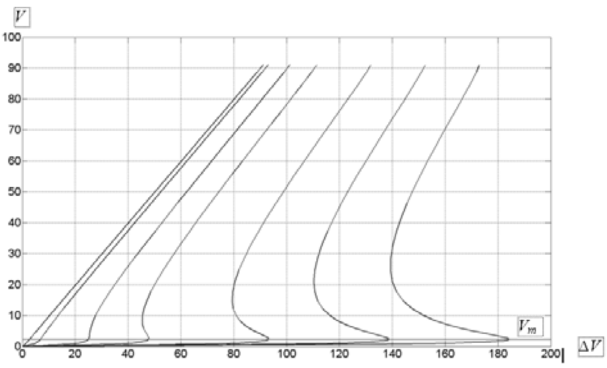
При исследованиях физико-химических характеристик поверхности раздела фаз, где в основу положено образование газового пузырька на торце капилляра, информационными являются зависимости изменения физических и геометрических характеристик мениска от подачи газовой фазы. Особый интерес представляет поведение пузырька при прохождении состояния максимально давления при прямом и обратном ходе.

Методика получения зависимости характеристик мениска от его объёма, для разных значений капиллярной постоянной детально описана в [1]. Она состоит в моделировании квазистатического процесса роста пузырька (набора последовательностей капиллярных поверхностей) путём числового интегрирования уравнения Юнга – Лапласа в дифференциальной форме.

Схематически процесс изменения объёма пузырька путём перемещения поршня представлен на рисунке, где: V_0 - исходный объём системы, P_a - исходное атмосферное давление, ΔV - выдавливаемый (втягиваемый) объем, P_σ - приращение давления, V - объем газового пузырька. При этом предполагается, что: жидкость не сжимаема, уровень жидкости неизменен, изменение порциального давления паров жидкости несущественно, процесс изотермический. Исходя из выше сказанного и считая, что количество газовой фазы в системе “камера – капиллярная поверхность” есть величина постоянная, согласно уравнению состояния идеального газа можно воспользоваться соотношением $PV = const$.



Типовые результаты моделирования (при $a_r^2 = 10$) процесса изменения объема мениска V от изменения объёма системы ΔV для разных значений исходного объёма $V_0 = kV_m$ (V_m - объёма пузырька в момент максимального давления в нём) для *k* = 100, 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 40000 представлены на графике. Видно, что при $k < 1000$ наблюдается монотонное увеличение объёма мениска со спокойным переходом через V_m. При увеличении *k* наблюдается все возрастающий резкий перегиб и при $k > 30000$ происходит срыв пузырька. Для промежуточных значений *k* очевидно явление гистерезиса.



1. О.Г. Малько, Кисіль І.С., Малько А.О. Характеристики меніска газової бульбашки в околі максимального тиску в ній. //Методи та прилади контролю якості. - 2008. -№21. - С.77-82.

Махорт Андрій Пилипович, кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАНУ, Київ, Україна,
e-mail: map@bitp.kiev.ua

ПРО ВПЛИВ ЗАЛЕЖНОСТІ КОЕФІЦІЄНТІВ СПОЖИВАННЯ ТОВАРІВ ВІД ЦІН НА РІВНОВАГУ У ВІДКРИТІЙ ЕКОНОМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Махорт А.П.

Залежність коефіцієнтів споживання товарів від ціни може істотно вплинути на встановлення рівноваги в економічній системі. Коефіцієнти споживання $\left\| \hat{c}_{ki} f_k^0(p) \right\|_{k=1,i=1}^{n,l}$ визначають той набір товарів суб'єктів економічної системи, який вони мають намір придбати. Кожен стан рівноваги економічної системи визначається зокрема і вектором цін. Таким чином, споживчий набір товарів кожного суб'єкта економічної системи буде різним для різних станів рівноваги. Також враховано, що суб'єкти економічної системи, як споживачі товарів, можуть витрачати не весь свій зароблений прибуток на придбання нових товарів. Все це призводить до коливань попиту на той чи інший товар, а власник цього товару може не отримати необхідної йому величини прибутку. В результаті може виявитись, що в економічній системі реалізується такий стан рівноваги, в якому певні її суб'єкти не зможуть функціонувати ефективно. Крім того передбачається, що в економічній системі можуть бути наявні монополісти, які можуть створювати додаткові негативні впливи як на всю економічну систему, так і на її окремих суб'єктів.

Метою дослідження було визначити найбільш прийнятний для всіх суб'єктів економічної системи стан рівноваги. Економічна система взаємодіє з зовнішнім оточенням. Умова рівноваги в цьому випадку задається системою нелінійних нерівностей

$$\sum_{j=1}^{l} \hat{c}_{kj} f_k^0(p) \frac{\widetilde{D}_j(p)}{\sum_{s=1}^{n} c_{sj} p_s} \le x_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ki} + \sum_{i=1}^{n} b_{ki}^1 - e_k + i_k, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

слід також враховувати умову прибутковості виробництва $\widetilde{D}_i(p) > 0, \quad i = \overline{1,n}$, наслідком якої є умова

$$x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k \right) - \sum_{k=1}^{n} b_{kj} p_k + \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^1 p_k \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Було запропоновано алгоритм розв'язання задачі (1), (2), за допомогою якого можна визначити той стан рівноваги економічної системи, в якому кожен її суб'єкт зможе отримати рівень прибутку, що забезпечить найбільше задоволення його потреб. Потреби визначаються максимальним споживчим набором товарів. Для кожного суб'єкта економічної системи його задають елементи матриці $\left\| c_{ki} \right\|_{k=1,i=1}^{n,l}$ і він не залежить від цін.

Було знайдено стратегії оподаткування, що забезпечують реалізацію саме цього оптимального стану рівноваги. Вибір стратегії оподаткування є цілком природнім елементом керування економічною системою.

Слід зауважити, що до функцій $\left\{ f_k^0(p) \right\}_{k=1}^{n}$ були висунуті досить загальні обмеження, які стосуються їх незростання за аргументом. Ці обмеження обумовлені економічною доцільністю, тому що не може той самий товар зі зростанням його ціни стати більш привабливішим для споживача.

Маценко Василь Григорович, к.ф.м.н.
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: vgm2006@mail.ru;

УЗАГАЛЬНЕННЯ МОДЕЛІ ФОЕРСТЕРА ДИНАМІКИ ВІКОВОЇ СТРУКТУРИ БІОЛОГІЧНИХ ПОПУЛЯЦІЙ

Маценко В.Г.

Врахування вікового складу біологічних популяцій обумовлено тим, що процеси народжування та виживання суттєвим чином залежать від віку особин і від співвідношення між різними віковими групами.

Простішим прикладом структурованої за віком моделі динаміки біологічних популяцій є лінійна модель фон Фоерстера вигляду [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mu(\tau)\rho(\tau,t), t, \tau > 0,$$

$$\rho(0,t) = \int_0^\infty b(\tau)\rho(\tau,t)d\tau, t > 0, \quad \rho(\tau,0) = \varphi(\tau), \tau \geq 0, \tag{1}$$

де $\rho(\tau,t)$ -- густина розподілу особин віку τ в момент часу t; $\mu(\tau)$, $b(\tau)$ -- функції, що описують природні процеси виживання та народжуваності, відповідно; $\varphi(\tau)$ -- початковий розподіл вікової структури. Поведінка розв'язків (1) визначається деяким системним параметром, що називається біологічним потенціалом популяції і має вигляд

$$H = \int_0^\infty b(\tau)\exp(-\int_0^\tau \mu(\xi)d\xi)d\tau.$$

Ця модель вивчалася при різних узагальненнях рівнянь народжуваності та вимирання. Наприклад, в [2] аналізується динаміка вікового складу, коли функції $\mu = \mu(\tau,\rho)$, $b = b(\tau,\rho)$; в [3] розглядається випадок $\mu = \mu(\tau,s)$, $b = b(\tau,s)$, де s -- деяка зважена чисельність особин: $s = \int_0^\infty \gamma(\tau)\rho(\tau,t)d\tau$.

В даній роботі вивчаються моделі процесів відбору в системах, в яких зберігається загальна кількість особин, тобто

$$\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \rho_i(\tau,t)d\tau = \text{const}. \tag{2}$$

Побудовані системи типу (2), які володіють властивістю (2), і показано, що виживають види, для яких досягається екстремум біологічного потенціалу. Розглянуто окремі гіпотетичні приклади.

1. Von Foerster H. Some remarks on changing populations // Kinetics of Cellular Prolifetarion. -- New York: Grune and Stratton, 1959. -- P. 382 - 407.

2. *Маценко В.Г.* Об одном классе уравнений математической физики, возникающих в динамике биологических макросистем // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. -- 1981. -- Т. 21, № 9. -- С. 69-71.

3. *Маценко В.Г.* Нелінійна модель динаміки вікової структури популяцій // Нелінійні коливання, 2003. -- Т. 6, № 3. -- С. 357-367.

Миргородська Наталія Андріївна, аспірантка1 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: schatz-nata@mail.ru ;

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ В ЗАЧАХ КОМП'ЮТЕРНОЇ БІОЛОГІЇ

Миргородська Н.А.

Робота присвячена дослідженню впровадження в комп'ютерну науку "біологічних" методів аналізу інформації та генетичних алгоритмів,а саме до задачі моделювання просторової структури білка. Розглядається функціонування алгоритму FASTA на послідовності взятій з електронної бібліотеки NCBI GenBank та основні алгоритмів множинного вирівнювання з використанням серверу CLUSTALW.

При біохімічному синтезі білків організму використовується генетична інформація, закодована в головному "спадковому матеріалі" - дезоксирибонуклеїновій кислоті (ДНК) [1], що є двонитковою спіраллю з послідовно зв'язаних нуклеотидів, кожен з яких містить одну із 4 азотистих основ — аденін (A), гуанін (G), цитозин (C) і тімін (T). Ці літери складають «алфавіт» генетичного коду. Можна визначити «генетичну мову» з наступним алфавітом X^D, де D умовне позначення ДНК.

$$X^D = \{A,C.G,T\} \text{ – алфавіт основ ДНК} \qquad (1)$$

Алфавіт основ ДНК (1) породжує алфавіт основ РНК виду, де R умовне позначення РНК :

$$X^R = \{A,C,G,U\} \text{ – алфавіт основ РНК} \qquad (2)$$

Відбувається процес транскрипції, тобто перенесення генетичної інформації на РНК з ДНК. Цей процес забезпечує "перекодування" інформації з перетворенням основ T → U. Словами в алфавітах є послідовності букв – кодони – це впорядковані трійки (триплети), що кодують деяку амінокислоту. Результатом цих операцій є речення:AGTCCATGGTAC, а фрагментом опису синтезованої РНК, за допомогою правила комплементарності - речення : AGUCCUGGUAC. Оскільки білки організмів складаються з 20 амінокислот, тому з них можна закодувати словами з алфавіту амінокислот: $X = \{a1,a2,...,a20\}$ (3).

Білок виконує метаболічні, структурні, або регуляторні функції в клітині, а 3-d структура визначає його функції. Для пророкування даних структур вирізняють [2] : *квантово-механічний метод розрахунку ab initio; напівемпіричний* та *методи класичної молекулярної механіки.* Для білка, структуру якого моделюють, існує гомологічний білок, для якого вже експериментально встановлено просторову структуру, то атомні координати останнього можна використати як просторову матрицю для моделювання за гомологією. Він включає етапи [1]: пошук у банках даних білків-матриць з експериментально визначеною просторовою структурою, які мають високий ступінь гомології з АК-послідовністю білка-мішені, для якого будується структурна модель; вирівнювання послідовності з однією чи декількома послідовностями-матрицями; корекція вирівнювання; генерація ковалентно-неперервного ланцюга (каркаса) моделі на основі вирівнювання";генерація "канонічних" поверхневих петель, отриманих з банків даних; "вбудова" бічних радикалів у каркас та їх оптимізаці ; добудова петель *ab initio*; мінімізація вільної енергії всієї моделі, іноді з використанням молекулярної динаміки; перевірка моделі вибірковим повторенням попередніх етапів. З даним алгоритмом проведені експерименти за результатами яких отримані білки CTRB2_HUMAN Q6GPI1 та CTRB1_HUMAN P17538 [3]. Виконаний пошук у головному всесвітньому репозиторії PDB (Protein Data Bank) та побудовані моделі даних білків.

1. Bradley P., Misura K.M.S., Baker D. (2005). Toward High-Resolution de Novo Structure Prediction for Small Proteins. Science 309, 1868-1871;
2. Advanced Computational Structural Genomics infection, http://cbcg.lbl.gov/ssi-csb/Meso.html
3. http://www.uniprot.org/uniprot/Q6GPI1.html

Михайлов Александр Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия,
e-mail: apmikhailov@yandex.ru ;
Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физ.-мат. наук,
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия,
e-mail: petrov.alexander.p@yandex.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АНТИКОРРУПЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ В СИСТЕМЕ «ВЛАСТЬ-ОБЩЕСТВО»

Михайлов А.П., Петров А.П.

В рамках динамической системы «Власть-Общество» [1-5] рассматривается властная иерархия, взаимодействующая с гражданским обществом. Под иерархией понимается упорядоченная по старшинству совокупность инстанций, наделенных властными полномочиями (иерархия может быть как цепочечной, так и иметь более сложную топологию). При достаточно большом количестве инстанций иерархию можно рассматривать как непрерывную; в этом случае положение инстанции в иерархии описывается переменной $x \in [0;1]$, при этом $x = 0$ соответствует высшей инстанции, $x = 1$ - низшей. В момент времени t инстанция x реализует количество власти $p(x,t)$. Уравнение для функции $p(x,t)$ для базового случая (т.е. для некоррумпированной иерархии) было получено в [1]. Для случая коррумпированной иерархии уравнение было получено в [5] и имеет вид

$$n(x)\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left[1 + \frac{c_+(x,t) - c_-(x,t)}{1 + c_+(x,t) + c_-(x,t)}\right]\kappa\left(p, \frac{\partial p}{\partial x}, x, t\right)n(x)\frac{\partial p}{\partial x}\right] + F\left(p, x, n(x), t\right) +$$
$$+\int_0^l \chi\left(p(x',t), p(x,t), n(x'), n(x)x', x\right)\left[p(x',t) - p(x,t)\right]dx'$$

Здесь $n(x)$ и $\kappa(...)$ характеризуют иерархию, функция $F(...)$ описывает реакцию гражданского общества на текущее распределение власти между инстанциями $p(x,t)$, а интегральный член описывает так называемый механизм передачи власти «через голову». Функции $c_+(x,t), c_-(x,t)$ описывают коррумпированность инстанций иерархии. Некоторые аспекты базовой модели рассматривались, в частности, в [1-4]. Предметом настоящего доклада является антикорупционных стратегий в системе «Власть-Общество».

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00332-а).

1. Михайлов А.П. Математическое моделирование власти в иерархических структурах // Матем. моделирование, 1994. Т.6, №6, стр. 108-138.
2. Михайлов А.П. Моделирование системы «власть-общество». М.: Физматлит, 2006. 144 с.
3. М. Г. Дмитриев, Г. С. Жукова, А. П. Петров. Асимптотический анализ модели "власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти // Математическое моделирование. 2004. Т.16, №5. С.23-34.
4. Петров А.П. О модели «власть-общество» с периодической функцией реакции гражданского общества // Математическое моделирование.Т.20. №11 (2008). С.80–88.
5. Михайлов А.П., Ланкин Д.Ф. Моделирование оптимальных стратегий ограничения коррупции // Математическое моделирование, 2006, т.18, № 12, с. 115-124.

Морозов Юрий Викторович, кандидат физ.-мат. наук,
Учреждение РАН Институт проблем управления им В.А. Трапезникова, Москва, Россия,
e-mail: yvmorozov@gmail.ru;

УПРАВЛЕНИЕ ГРУППОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЗАДАННОЕ ЧИСЛО НЕИНФОРМИРОВАННЫХ АГЕНТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЙ

Морозов Ю.В.

Бурное развитие робототехники и доступность вычислительных комплексов в последние годы вызвало огромный интерес к мульти-агентным системам среди исследователей, занимающихся различными областями науки. В связи с чем, появилось большое количество работ посвященных этой тематике.

В работе [1] Рейнольдс использует термин “флокинг” для определения процесса формирования “потока” из простейших элементов “бойдов” или агентов. Далее, под “потоком” будем понимать движение конечного числа агентов, которые удовлетворяют следующим трем правилам: все агенты в "потоке" достигают одинаковой скорости движения, расстояние между объектами сохраняется во время движения, не происходит столкновений между объектами.

В работе [2] предложен закон управления (протокол) позволяющий частный случай “потока”, агенты в котором обходят препятствия и следуют за лидером. Данный протокол состоит из трех частей: функция для притяжения или отталкивания между агентами, функция взаимодействия с препятствиями и функция, определяющая навигацию.

В работе [4] этот закон управления улучшен. Более точно доказана асимптотическая сходимость положения центра масс потока к целевой траектории при отсутствии ограничений на управление и при отсутствии препятствий. Это стало возможным сделать, введя дополнительный член в навигационную функцию. Он вычисляется в том случае, когда i-ый агент знает информацию о положении и скорости своих соседей, число которых определяется величиной. В частности для “альфа-сети” оно не превышает 6. Таким образом, в отличии от закона управления из [2], наличие препятствий не вызывает произвольные высоко-амплитудные переходные процессы и не увеличивает загрузку для каналов связи.

В работе [3] авторы вводят дополнительное состояние агента – “информированность”, которое позволяет ввести иерархию, основанную на знании информации о положении лидера. Моделирование этого свойства заключается в ведении некоторого дополнительного критерия, при синтезе закона управления предложенного в [2]. При такой модификации могут возникать “кластеры” (группы агентов двигающиеся в произвольном направлении), в которых нет ни одного информированного агента.

В настоящей работе предлагается использовать модификацию алгоритма управления [2,3,4] позволяющего уменьшить образование кластеров, при прохождении потока через препятствия. Основная идея, заключается в том, что каждый неинформированный агент воспринимает центр масс своего кластера как информированного агента.

1. Reynolds C. W. Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model. Computer Graphics (ACM SIGGRAPH ’87 Conf. Proc.), vol. 21, no. 4, July 1987. - P. 25–34.
2. Olfati-Saber R. Flocking for multi-Agent dynamic systems: algorithms and theory / R. Olfati-Saber // IEEE Trans. Autom. Control, vol. 51, no. 3, 2006. - P. 401-420.
3. Su H., Wang X., and Lin Z., Flocking of multi-agents with a virtual leader / H. Su, X. Wang, and Z. Lin // IEEE Trans. Autom. Control, vol. 54, no. 2, 2009. -P. 293-307.
4. La H. M., Sheng W. Flocking Control of a Mobile Sensor Network to Track and Observe a Moving Target / H. M. La, W. Sheng // Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation Kobe 2009, International Conference Center Kobe, Japan, May 12-17, 2009. - P. 3129-3134.

Мясниченко Владимир Сергеевич, аспирант,
Алтайский государственный технический университет им. И.И.Ползунова, Барнаул, Россия,
e-mail: viplabs@yandex.ru
Старостенков Михаил Дмитриевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Алтайский государственный технический университет им. И.И.Ползунова, Барнаул, Россия,
e-mail: genphys@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ И СТРУКТУРЫ БИНАРНЫХ НАНОСИСТЕМ ЗОЛОТО-МЕДЬ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КОНЦЕНТРАЦИЯХ КОМПОНЕНТ

Мясниченко В.С., Старостенков М.Д.

В работе методом молекулярной динамики с использованием многочастичного потенциала межатомного взаимодействия [1] изучена структура двухкомпонентных наносистем, кластеров вида CunAu144-n различного состава. Показано распределение атомов золота и меди в нанокластере, а также доля и распределение атомов с упаковками, соответствующими фазам ГЦК, ГПУ и Франка-Каспера.

Начальная конфигурация кластера задавалась в виде блока ГЦК кристалла в случае чистых металлов либо в виде элемента одного из типов сверхструктур, в зависимости от задаваемой концентрации компонент. Затем в течение 5 пс проводился разогрев модельной системы до температуры 1000 K. В результате нанокластер переходил в состояние расплава. Это фиксировалось по картине радиального распределения атомов и внешнему виду кластера. На следующем этапе выполнялось охлаждение системы с шагом ΔT равным 1.0K каждые 1 пс. Длительность данного этапа эксперимента составляла 1000 пс.

Сводная таблица представляет содержание упорядоченных фаз в ядрах кластеров различного состава после сверхбыстрого охлаждения. Величина энергии получена в пересчете на атом, при близких к нулю температурах.

Таблица 1. Сравнение состава ядра и энергии наносистем Cu_nAu_{144-n}

Кластер	Энергия, Эв/атом	ГЦК фаза	ГПУ фаза	Фаза Ф-К 12 атомов	Прочие атомы ядра
Cu_{144}	-3.1550	6	23	23	0
$Cu_{108}Au_{36}$	-3.2964	0	28	22	0
$Cu_{72}Au_{72}$	-3.4219	0	29	20	0
$Cu_{36}Au_{108}$	-3.5204	0	2	16	6
Au_{144}	-3.5769	4	21	13	5

Известно, что макроскопическая система Cu-Au образует неограниченные твердые растворы, а при концентрациях близких к эквиатомным, упорядочивается по типу сверхструктуры L10 на базе ГЦТ кристаллической решетки. При концентрациях компонент 75% на 25% и 25% на 75% образуются упорядоченные сверхструктуры L12 на основе ГЦК решетки [2]. Как можно видеть из таблицы, бинарные системы Cu-Au рассмотренного размера упорядочиваются без образования кристаллической ГЦК (ГЦТ) фазы.

1. Cleri F., Rosato V. Tight-binding potentials for transitions metals and alloys // Phys. Rev. B. 1993, V.№ 48. P.22-33.
2. Мясниченко В.С. Исследование энергетических и структурных характеристик упорядочивающихся сплавов системы Cu-Au // Перспективные материалы. – 2009, №7. – С. 228-234.

Недолюк Тетяна Олександрівна, студентка 5 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: pocahontas@ukr.net

СИМЕТРІЯ І ВЛАСТИВОСТІ ЗАПИСУ ГЕНЕТИЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ В ДНК

Недолюк Т.О.

ДНК має форму подвійної спіралі, інформація записується в чотирьох-літерному алфавіті азотистих основ: аденін (A), гуанін (G), тимін (T) та цитозин (C). Основи одного з ланцюжків сполучені з основами іншого ланцюжка зв'язками згідно принципу комплементарності: аденін з'єднується тільки з тиміном (A – T), гуанін – з цитозином (C – G). Симетрія у запису основ, підрахованим по ланцюгам ДНК, досліджувалась в роботах [1, 2]. Співвідношення симетрії наведено у вигляді коротких формул, що значно спрощує сприйняття цих результатів і є основою побудови математичного апарату для отримання нових результатів. Статистичний аналіз підтвердив виконання симетрії на геномах бактерій, рослин, вищих організмів, а також на ДНК людини.

Обчислення показали, що кількість основ A і T, а також C і G, які підраховані на одному ланцюзі ДНК практично співпадають на всіх хромосомах:

$$\mathrm{n(A)} = \mathrm{n(T)},\ \mathrm{n(C)} = \mathrm{n(G)}, \tag{1}$$

де $\mathrm{n(j)}$ – число основ j, $j \in \{A, C, G, T\}$.

З (1) за властивістю комплементарності слідує, що кількість кожної основи, підрахованої на обох ланцюгах ДНК, співпадає:

$$n(A,1) = n(A,2), \qquad n(C,1) = n(C,2),$$
$$n(G,1) = n(G,2), \qquad n(T,1) = n(T,2). \tag{2}$$

Таким чином, має місце симетрія відносно запису основ на кожному ланцюзі ДНК. Звідси випливає важливий висновок, що вага двох ланцюгів співпадає.

Обрахунки також показали, що для пар основ виконується наступне співвідношення:

$$n(ij) = n(\bar{j}\,\bar{i}), \tag{3}$$

де $i, j \in \{A, C, G, T\}$, $\bar{A} = T,\ \bar{C} = G,\ \bar{T} = A,\ \bar{G} = C$.

З (3) випливає симетрія для пар основ

$$n(ij,1) = n(ij,2); \quad i, j \in \{A, C, G, T\}, \tag{4}$$

а також для коротких послідовностей основ.

Доведено, що з симетрії послідовностей основ витікає симетрія коротких послідовностей, зокрема окремих основ. На базі моделі ланцюгів Маркова показано, що симетрія послідовностей основ витікає з симетрії пар основ [2].

На основі моделі ланцюгів Маркова легко генеруються випадкові послідовності, для яких виконується симетрія (2), (4). За допомогою оцінок перехідних ймовірностей і програми псевдовипадкових чисел будуються випадкові послідовності основ різної довжини. Чисельні обрахунки показали, що модель ланцюгів Маркова переконливо підтверджує симетрію коротких послідовностей основ.

1. Гупал А.М., И.В. Сергиенко. Оптимальные процедуры распознавания. – Киев: Нукова думка, 2008. – 232 с.
2. Сергиенко И.В., Гупал А. М., Вагис А.А. Комплементарность оснований в хромосомах ДНК // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 3. – С. 88–94.

Олійник Андрій Петрович, канд. техн. наук, доцент,
Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.
e-mail: andrij-olijnyk@rambler.ru

ОЦІНЮВАННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛОПАТОК ДІЮЧИХ ГАЗОПЕРЕКАЧУЮЧИХ АГРЕГАТІВ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ БЕЗВІДРИВНОГО ОБТІКАННЯ

Олійник А.П.

При аналізі роботи елементів конструкції газоперекачуючих агрегатів компресорних станцій виникає дві основні задачі - оцінка реального технічного стану лопаток та забезпечення оптимального режиму роботи агрегату шляхом аналізу впливу зміни геометричної конфігурації лопатки на її аеродинамічні характеристики як складової частини всього агрегату. При цьому для вивчення аеродинамічних характеристик використовується модель роцессу ю лельного обтікання крилових профілів , що базується на відомих підходах [1], що базуються на використанні апарату інтегральних рівнянь Фредгольма ІІ роду.

Після проведення всіх необхідних викладок встановлюється рівняння для знаходження дотичної компоненти швидкості течії по профілю лопатки , яке є рівнянням Фредгольма ІІ роду:

$$V_\theta(\theta_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(V_\theta(\theta)K(\theta;\theta_0))d\theta+2\frac{\partial\hat{O}}{\partial\theta}(\theta_0) \tag{1}$$

де V_θ - дотична компоненти вектора швидкості;

$$K(\theta;\theta_0)=\frac{[y(\theta)-y(\theta_0)]x'(\theta_0)-[x(\theta)-x(\theta_0)]y'(\theta_0)}{(y(\theta)-y(\theta_0))^2+(x(\theta)-x(\theta_0))^2} \tag{2}$$

де $x(\theta); y(\theta); x(\theta_0); y(\theta_0)$ - координати точки профілю в точках θ та θ_0 спеціально обраної криволінійної системи координат відповідно;

$$\Phi(\theta_0)=(x(\theta_0)\cos\alpha+y(\theta_0)\sin\alpha)V_\infty \quad , \tag{3}$$

де V_∞ - швидкість потоку, що набігає на лопатку, α - кут атаки профілю. Функція у(θ) задає координати точок профілю, вона може знаходитись шляхом прямого вимірювання координат лопатки, що експлуатується тривалий час, для її аналітичного задання необхідно використовувати певний роцесс інтерполяції. Після чисельного розв’язання рівняння (1) шляхом переходу до системи лінійних алгебраїчних рівнянь з урахуванням особливостей, що виникають в (2) при $\theta=\theta_0$, знаходяться аеродинамічні характеристики профілю - коефіцієнти індуктивного опору, підіймальної сили та моменту. За роцессу ю інформацією оцінюється характер та величина впливу зносу лопатки, зміни її просторової конфігурації на аеродинамічні характеристики, прогнозується швидкість зносу лопатки. Дослідження можуть бути продовжені шляхом використання більш складних моделей роцессу обтікання лопатки та вивчення впливу на точність розв’язання способів задання функції у(θ).

е. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. - /К. Флетчер. – М.: Мир, 1988. -352с.

ОЛІЙНИК Андрій Петрович, канд.техн.наук, доцент,
Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.
ШТАЄР Лідія Омелянівна, канд.техн.наук.
e-mail: andrij-olijnyk@rambler.ru

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ ОСЕЙ ДІЛЯНОК ТРУБОПРОВОДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ВАРІАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

Олійник А.П., Штаєр Л.О.

Задача оцінки напружено-деформованого стану магістральних трубопроводів є актуальною науково-технічною задачею, рішення якої дозволяє визначити діючі на трубопровід напруження, вона служить вихідною інформацією для визначення залишкового ресурсу досліджуваної ділянки. Зокрема, для опису деформацій трубопроводу використовується наступне подання для радіус-вектора його точки:

$$\vec{r}(s,\varphi,r,t) = \vec{r}_e(s) - R_2\vec{n}_e(s) + \left[\rho_1(s,\varphi,r,t) + u(r)\right]\times$$
$$\times\left[\cos\left(\varphi + \frac{M}{\frac{\pi\mu}{2} + (R_2^4 - R_1^4)}\right)\cdot\vec{b}_e(s) + \sin\left(\varphi + \frac{M}{\frac{\pi\mu}{2}(R_2^4 - R_1^4)}\right)\cdot\vec{n}_e(s)\right] + \psi(s,\varphi,r,t)\vec{\tau}_e(s). \quad (1)$$

$$0 \le s \le s_1, 0 \le \varphi \le 2\pi, R_{внут} \le r \le R_{внеш}$$

Використовуючи закон квазістаціонарного руху ділянки трубопроводу (1), створено методику оцінки напружено-деформованого стану трубопроводів різного призначення, яка передбачає розв’язок широкого классу задач [1]. При цьому важливого значення набуває визначення просторового положення деформованої осі, що дозволяє визначити вектори $\vec{r}, \vec{n}, \vec{b}, \vec{\tau}$. З цією метою вирішується варіаційна задача для функціоналу:

$$\hat{O}(x,U,U',U'') = \int_0^L \left[\frac{1}{2}E(x)I(x)U''^2(x) - \frac{1}{2}P(x)U'^2(x) - q(x)U(x)\right]dx, \quad (2)$$

де *U(x)* – лінія, що задає конфігурацію осі трубопроводу. Для інтерполяції осі трубопроводу використовуються многочлени Ерміта, що дозволяє оптимізувати (2) по конфігурації осі – з урахуванням координат точок, кутів нахилу осі до горизонталі та радіуси кривини осі. Застосування вказаної техніки дозволяє вирішити такі задачі:

- визначення оптимального кута нахилу осі ділянки трубопроводу;
- визначення оптимального розміру зони ремонтних робіт;
- визначення оптимальної конфігурації осі при заданих координатах контрольних точок. Задача знаходження екстремумів функціоналу (2) зводиться до задачі знаходження екстремуму функцій багатьох змінних:

$$\hat{O}(x,C_i) = \int_0^L \left[\frac{1}{2}E(x)I(x)H''_n(x,C_i) - \frac{1}{2}P(x)H'_n(x,C_i) - q(x)H_n(x,C_i)\right]dx, \quad (3)$$

де C_i - невідомі коефіцієнти многочленів Ерміта степеня *n*, яка визначається кількістю параметрів оптимізації – геометричних характеристик досліджуваних ділянок.

1. Олійник А.П. Математичне моделювання процесів деформування та напруженого стану ділянок трубопроводів в умовах експлуатації під дією комплексу силових факторів.- /А.П.Олійник. - International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation - “DSMSI-2009””. Вісник КНУ ім. Т. Г. Шевченка. Thesis of conference reports, May 27-29, 2009, Kyiv – 2009.- ст.235.

Онищенко Андрій Михайлович, к.е.н., доц., докторант кафедри математичної інформатики *Київського національного університету імені Тараса Шевченка*.
Адреса для листування – 03022, Україна, Київ, вул. Ломоносова 81, к. 407, тел. 0508588387, e-mail: onyshchenko@yandex.ru

ПОБУДОВА МАГІСТРАЛЬНИХ ТРАЄКТОРІЙ БАЛАНСОВОЇ МОДЕЛІ В УМОВАХ ОБМЕЖЕНЬ ЕМІСІЙ ПАРНИКОВИХ ГАЗІВ

Онищенко А.М.

Визнавши основною причиною глобальної зміни клімату антропогенний вплив, світова спільнота заснувала у 1988 році Міжурядову групу експертів зі зміни клімату. Результатом її діяльності стало створення міжнародної угоди з регулювання викидів парникових газів, як основної причини глобальної зміни клімату на Землі – Кіотського протоколу [1]. Враховуючи еколого-економічний характер Кіотського протоколу, наявність інтегрального еколого-економічного індикатора на макрорівні є ідеальним для осіб, які приймають рішення з точки зору врахування екологічного фактора в розвитку країни. За таким показником можна було б мати уявлення відносно ступеня стійкості країни, екологічності траєкторії розвитку. Зважаючи на складність досліджуваного об’єкту, необхідним є ефективний інструментарій вивчення розвитку економіки в умовах дії обмежень за Кіото.

Зручним інструментом дослідження еколого-економічної взаємодії є використання балансових моделей типу “витрати-випуск” [2].

З врахуванням витрат на реалізацію положень Кіотського протоколу, які включають як безпосередньо посилення діяльності виробництва зі знищення парникових газів, реалізацію механізмів гнучкості Кіотського протоколу, так і комбінацію зазначених заходів, можна запропонувати модель еколого-економічного динамічного балансу у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1\dfrac{dx_1}{dt} + B_2\dfrac{dx_2}{dt} + Cy_2 + y_1, \\ x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Перше рівняння моделі відображає баланс валового випуску продукції та розподіл її на проміжне споживання основного та допоміжного виробництв, ведення в дію основних виробничих фондів відповідних виробництв, витрати на Кіотський протокол та кінцеве споживання. Друге рівняння є балансом парникових газів, який складається з обсягів утилізованих речовин основного, допоміжного виробництв та незнищених об’ємів.

Розглядається задача побудови на основі моделі (1) та розгляду альтернативних до класичних гіпотез двоїстих моделей у вартісних показниках – моделей цін, які відображають вартісний склад міжгалузевого балансу. Наступною задачею є дослідження динаміки основних показників запропонованих моделей, а саме виділення серед траєкторій розвитку магістральних.

1. Киотский протокол к Конвенции об изменении климата / Секретариат Конвенции об изменении климата. – Бонн, 2000. – 33 с.
2. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К.: Вища школа, 1999. – 236 с.

Панасенко Анна Александровна, к.т.н.
Макеевский экономико-гуманитарный институт, Макеевка, Україна,
e-mail: lidvita@mail.ru;

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ БАНКОВСКИХ УЧРЕЖДЕНИЙ С ПОЗИЦИЙ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА

Панасенко А.А.

Современные тенденции в сфере моделирования конкурентоспособности банковских учреждений связаны с развитием проблемно-ориентированных систем, созданием встроенных способов для интеграции моделей в единый комплекс. Технологический уровень современных систем моделирования характеризуется большим выбором базовых концепций формализации и структуризации систем, развитыми графическими интерфейсами и анимационными выводами результатов [1]. Необходимо отметить, что под конкурентоспособностью банка понимается его возможность в существующих условиях предлагать и реализовывать услуги, которые по ценовым и неценовым характеристикам более привлекательны для потребителя, чем у конкурентов [2].

Проблемы моделирования конкурентоспособности финансовых учреждений и, в частности, банка исследуются в трудах таких ученых как: К.А. Аксенов, Г. Клейнер, П. Джексон, и др. Однако еще недостаточно проработаны вопросы разработки моделей конкурентоспособности кредитного учреждения через призму инструментов системного подхода.

Существует несколько способов разрешения задачи моделирования конкурентоспособности банка. Прежде всего, особого внимания заслуживает методика перехода системы в надсистему (обусловленная исчерпанием возможности функционирования и дальнейшего развития в рамках заданных границ). Убедительным доказательством жизнеспособности данной модели является огромный фактографический пласт примеров реального повышения конкурентоспособности учреждений за счет слияний и поглощений. Современным примером повышения конкурентоспособности банка за счет перехода системы в надсистему является аутсорсинг. Как доказывает практика, обратная комбинация реорганизации в подсистему обладает также значительным потенциалом эффективности. Трактуется она следующим образом: банк неконкурентоспособен в существующих рамках, но его часть, подсистема является (или может стать) конкурентоспособной. Альтернативной моделью конкурентоспособности является модель перехода к альтернативной системе – с такой же функцией, но другим принципом действия. Так, вместо «навязывания продуктов и услуг» клиенту внедряется стратегия «притягивания потребителя». Мицуаки Симагути считает, что надо бороться за клиента, повышая свои позиции, а не с конкурентом, пытаясь ухудшить его ситуацию на рынке.

1. Аксенов К.А. Комплексная модель предприятия и аппарат экспертных систем / Аксенов К.А., Клебанов Б.И. // Сборник статей. – Екатеринбург, ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2007. – Ч.1. – С. 296-298.
2. Лемик О.Я.Конкуренція: суть та фактори, що її формують / Лемик О.Я. // Інноваційна економіка. – 2010. - №1. – С. 89-91.

Перелыгина Елена Сергеевна, студентка 5 курса, факультет Фундаментальные Науки,
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Москва, Россия,
e-mail: siringa14@mail.ru

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДИАГРАММОЙ σ~ε

Перелыгина Е.С.

В опубликованной литературе [1], [2], [3], рассматривается стержень из упруго-пластического материала с линейным упрочнением, концы которого закреплены шарнирно. Исследуются случаи, когда напряжение, соответствующее пределу текучести σ^*, не превышает напряжения касательного модуля $\sigma_Ш$, которое, в свою очередь, не превышает напряжения Кармана и Эйлера ($\sigma^* \le \sigma_Ш \le \sigma_К \le \sigma_Э$).

Основной результат, сформулированный в этих работах, состоит в том, что при рассмотрении безразмерных величин ($P/P_э$, $\sigma/\sigma_э$, $\varepsilon/\varepsilon_э$, где $P_э, \sigma_э, \varepsilon_э$ – соответственно эйлеровы сила, напряжение и деформация) квазистатическая постановка непротиворечива, т. е. $0 < \Delta v < \infty$ (Δv – приращение прогиба), если при возрастающей силе приложенная безразмерная сила не превосходит жесткость в срединном сечении, отнесенную к жесткости упругого стержня ($P \le I^{ср}$) [2].

В настоящей работе обобщаются результаты приведенных выше работ: рассматривается произвольная диаграмма σ~ε при произвольных неравенствах между σ^* и $\sigma_Ш$ и при разных видах закрепления концевых сечений стержня.

Рассматривается поведение сплошного стержня прямоугольного сечения. Записываем систему уравнений равновесия и решаем ее численно с помощью метода конечных разностей.

Сделаны выводы о том, что при $\sigma_Ш \le \sigma^*$ (в том числе для упруго-идеально-пластического материала, т.е. когда напряжение касательного модуля не имеет смысла: $\sigma_Ш = 0$) основным критерием сохранения несущей способности стержня остается требование: приложенная сила не превышает жесткости наиболее напряженного по внутреннему моменту сечения. Построены графики прогиб ~ нагрузка и жесткость ~ нагрузка для разных начальных данных, а так же графики распространения пластичности по глубине стержня.

1. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М., Физматгиз. – 1962. – 456с.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 1948. – 377с.
3. Лепик Ю.Р. О влиянии начальной кривизны и эксцентричного нагружения на прогибы сжатого стержня за пределом упругости. // Труды естественно-математического факультета. – 1958, №62. – 14с.
4. Ванько В.И. Упруго-пластический продольный изгиб: эволюция концепции Эйлера. // Вестник ХНТУ. – 2007, №2. – 8с.

Печук Евгений Дмитриевич, аспирант, отдел вихревых движений,
Інститут гидромеханики НАНУ, Киев, Украина,
e-mail: uzuzun@i.ua

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ВЫХОДНОМУ СИГНАЛУ

Печук Е.Д.

Работа посвящена апробации и дальнейшей разработке двух вычислительных методов построения динамических систем по временному ряду выходного сигнала. Целью работы является реконструкция детерминированных систем, решения которых представляют собой периодические, квазипериодические и хаотические установившиеся процессы [1,2,3].

Пусть, в результате эксперимента имеется зависимость наблюдаемой переменной $a = a(t)$ от времени, заданная на конечном промежутке времени t_0 с шагом (дискретизацией) Δt. Существует два наиболее известных метода реконструкции [1,2]. Первый – метод последовательного дифференцирования заключается в том, что задание недостающих координат системы производится путем многократного дифференцирования выходного сигнала: $\vec{x}(t) = (x_1, x_2, x_3) = \left(a(t), \dot{a}(t), \ddot{a}(t)\right)$. Математическая модель, в трехмерном случае, записывается в следующем виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \frac{dx_2}{dt} = x_3; \frac{dx_3}{dt} = F_3(x_1, x_2, x_3),$$

где $F_3(x_1, x_2, x_3)$ – неизвестная нелинейная функция. Для получения конкретного вида системы, функция F представляется в виде разложения по некоторому базису функций с количеством слагаемых, зависящим от необходимой точности аппроксимации. Второй метод реконструкции называется методом задержки, при его применении недостающие пространственные переменные строятся при помощи выбора некоторого фиксированного временного промежутка $\tau < t_0$: $\vec{x}(t) = \left(a(t), a(t+\tau), a(t+2\tau)\right)$. Соответствующая математическая модель восстанавливается в виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, x_3); \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, x_3); \frac{dx_3}{dt} = F_3(x_1, x_2, x_3),$$

где $F_i(x_1, x_2, x_3)$ – неизвестные нелинейные функции. Основной сложностью этого метода реконструкции является выбор значения времени задержки $\tau = n\Delta t$. Учитывая то, что реальные системы неконсервативны и, следовательно, их дивергенция отрицательна, время задержки τ нужно выбирать в промежутке, где значение дивергенции реконструированной системы в установившемся режиме отрицательно.

1. Crutchfield J.P. Equations of Motion from a Data Series / J.P. Crutchfield, B.S. McNamara // Complex Systems. – 1987. – P.417-452.
2. Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой / В. С. Анищенко. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 142 с.
3. Краснопольская Т. С. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением / Т. С. Краснопольская, А. Ю. Швец. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. – 278 с.

Пигнастый Олег Михайлович, кандидат технических наук, доцент
НТУ «ХПИ», Харьков, Украина
e-mail: pom7@bk.ru

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Пигнастый О.М.

В докладе сформулированы теоретические основы построения статистической модели технологического процесса. В соответствии с концепцией статистического моделирования состояние макропараметров технологического процесса определяется состоянием микропараметров большого количества предметов труда, распределенных в межоперационных заделах по технологическому маршруту [1]. Продемонстрировано, что при достаточно большом количестве предметов труда, находящихся в межоперационных заделах, появляются особого типа закономерности, характеризующие состояние макропараметров технологического процесса. Характер этих закономерностей не зависит от поведения микропараметров, определяющих состояние отдельного предмета труда. Связь микроуровня (предметно-технологическое представление) и макроуровня (потоковое представление) описания технологического процесса осуществлена через кинетическое уравнение технологического процесса, характеризующее эволюцию функции распределения предметов труда по состояниям [2]. Макроскопические характеристики технологического процесса представлены моментами функции распределения предметов труда по состояниям, определены через модельные представления о стохастическом характере воздействия технологического оборудования на предмет труда и коллективном взаимодействии предметов труда между собой [3]. Статистическое распределение находящихся в технологическом процессе предметов труда по микросостояниям найдено без решения динамической системы уравнений, описывающей изменения состояния их параметров. Это позволило рассмотреть задачи управления технологическим процессом, в которых малая устойчивость исходных данных усложняет использование метода имитационного моделирования технологических явлений. Исследована устойчивость макропараметров технологического процесса. Получены условия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость динамического поведения макропараметров технологического процесса. Записаны критерии подобия, использование которых позволило определить общие закономерности поведения параметров различных технологических процессов. Определены достаточные условия разрешимости задачи об оперативном управлении макропараметрами технологического процесса. Установлены условия, при которых задача об оптимальном управлении макропараметрам имеет единственное решение.

1. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –N7– С.66-71
2. Азаренков Н.А., Пигнастый О.М., Ходусов В.Д. К вопросу подобия технологических процессов производственно-технических систем – Доповіді Національної академії наук України, 2011. –N02– С.29-35
3. Пигнастый О.М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции– Доповіді Національної академії наук України, 2006.

Пономаренко Валерий Павлович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: povp@uic.nnov.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Пономаренко В.П.

В докладе обсуждаются проблемы математического моделирования динамического поведения связанных автогенераторных систем с фазовым управлением, в основе функционирования которых лежит принцип синхронизации входного сигнала и синтезируемого в системах опорного сигнала. Такие системы могут демонстрировать большое разнообразие режимов поведения и бифуркационных переходов, которые представляют большой интерес, как с точки зрения нелинейной динамики, так и в связи с перспективами использования в современных технологиях при решении задач формирования, передачи и обработки сигналов.

Математические модели рассматриваемых систем представляются нелинейными динамическими системами с цилиндрическим фазовым пространством. Основное содержание исследований динамики этих моделей составляют: определение стационарных движений; выделение области значений параметров, соответствующих установлению в системах синхронного режима; исследование сценариев эволюции несинхронных режимов, изучение их бифуркаций и построение параметрических портретов; исследование механизмов перехода к хаотическому поведению и процессов дехаотизации движений. При исследовании применяются методы теории бифуркаций динамических систем и численные методы и алгоритмы исследования нелинейной динамики.

Приведены результаты исследования режимов и процессов динамики в моделях связанных систем с фазовым управлением с двумя с половиной и тремя степенями свободы в случаях, когда парциальные системы автономно демонстрируют как регулярные, так и хаотические режимы поведения [1,2]. Выяснены динамические состояния и нелинейные явления, свойственные исследуемым связанным системам: синхронный режим, определяемый устойчивым состоянием равновесия; потеря устойчивости синхронного режима и возникновение квазисинхронных периодических и хаотических режимов, определяемых в фазовых пространствах моделей предельными циклами, притягивающими торами и хаотическими аттракторами колебательного типа; асинхронные регулярные и хаотические режимы, соответствующие предельным циклам, притягивающим торам и хаотическим аттракторам вращательного и колебательно-вращательного типов. Изучены сценарии эволюции динамических состояний при изменении параметров моделей, выявлена возможность при помощи изменения параметров переходить от несинхронных режимов к синхронному режиму или, наоборот, стимулировать возбуждение несинхронных режимов, отвечающих различным аттракторам в фазовых пространствах, и решать на этой основе задачи генерации разнообразных сложных, в том числе случайноподобных колебаний.

1. Пономаренко В.П. Особенности сложной динамики и переходы к хаотическим режимам в модели двух взаимодействующих систем с фазовым управлением / В.П. Пономаренко // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. Изд. Саратовского университета. – Т.14, №5. – 2006. – С.73-93.

2. Пономаренко В.П. Синхронизация и сложные колебания в двухкольцевой системе с фазовым управлением / В.П. Пономаренко // Радиотехника и электроника. Изд. МАИК, Москва. – Т.52, №2. – 2007. – С.165-175.

Приходько Сергій Борисович, кандидат техн. наук, доцент
НУК імені адмірала Макарова, Миколаїв, Україна
e-mail: sprikhodko@nuos.edu.ua

ЗАСТОСУВАННЯ НОРМАЛІЗУЮЧИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ ПОБУДОВИ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕГАУСІВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Приходько С.Б.

Багато різноманітних фізичних процесів є негаусівськими випадковими процесами і їх математичні моделі часто повинні бути представлені у вигляді стохастичних диференціальних рівнянь (СДР). Прикладом таких процесів є екстремальне морське хвилювання, в якому можуть з'являтися так звані хвилі-вбивці (killer waves) – це одиночні або групи хвиль які значно вище за оточуючі їх хвилі морського хвилювання. А для моделювання, наприклад, поведінки судна в умовах екстремального морського хвилювання використовують, в тому числі, і СДР його хитавиці. Все це приводе до необхідності побудови СДР негаусівських випадкових процесів і екстремального морського хвилювання зокрема.

Для побудови СДР негаусівських випадкових процесів на основі нормалізуючих перетворень автором було запропоновано відповідний метод – метод структурної ідентифікації нелінійних стохастичних диференціальних систем (СДС) – таких систем, поведінка яких описується СДР. Суть цього методу полягає у наступному. Спочатку використовуючи нормалізуючи перетворення будуємо СДР для нормалізованих випадкових сигналів нелінійної СДС. Для цього за реалізацією негаусівського випадкового сигналу нелінійної СДС знаходимо взаємно-однозначне нормалізуюче перетворення, за яким отримуємо реалізацію нормалізованого сигналу; оцінюємо його спектральну щільність; апроксимуємо її дробово-раціональною функцією і застосовуючи метод формуючих фільтрів отримуємо СДР для нормалізованого сигналу. Далі використовуючи зворотне перетворення до відповідного нормалізуючого перетворення і формулу для стохастичного диференціалу (формулу Іто у разі, якщо СДР розглядається у розумінні Іто), із СДР для нормалізованих випадкових сигналів (нормалізованого СДР) отримуємо СДР для негаусівських випадкових сигналів (процесів) нелінійної СДС [1, 2].

В роботі розглянуто метод структурної ідентифікації нелінійних СДС, нормалізуючи перетворення – Джонсона (Johnson), Бокса-Кокса (Box-Cox), Іео-Джонсона (Yeo-Johnson) і інши, які дозволяють перетворити ординати негаусовського випадкового процесу у такі, що мають гаусовський розподіл або наближений до нього. Отримано формули для побудови нормалізуючого перетворення, яке дозволяє за певних умов перейти від нелінійного СДР до нормалізованого СДР. Наводяться приклади побудови СДР негаусівських випадкових процесів за їх реалізаціями на основі нормалізуючих перетворень. У якості таких процесів розглядаються екстремальне морське хвилювання, мовний сигнал, інформаційний сигнал створений за маніпуляцією випадкового процесу (stochastic process shift keying).

1. Приходько С.Б. Структурная идентификация нелинейных стохастических дифференциальных систем на основе математических моделей для нормализованных входных и выходных сигналов / С. Б. Приходько // Труды VIII международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'09. Москва, 26-30 января 2009 г. ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН. – М.: ИПУ, 2009. – С.73-87. – ISBN 5-201-14948-0.
2. Приходько С.Б. Структурна ідентифікація нелінійних стохастичних диференціальних систем на основі математичних моделей нормалізованих сигналів / С. Б. Приходько // Вісник ВПІ. – 2009. – № 3 (84). – С.86-92. – ISSN 1997-9266.

Ройбул П.А., инженер *«Укрзализныця»*.
Адрес для переписки - 69071, Запорожье, ул. Чаривная, д. 131, кв.36, тел. (0612) 67-59-31

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЛЕВИТАЦИИ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМОЙ ТОКОНЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ройбул П. А.

Для частного случая электродинамической левитации исследована задача зависимости сил отталкивания и торможения от количества и геометрической формы токонесущих витков.
Физическая постановка задачи сводится к следующему. Токовый виток 1 движется прямолинейно относительно путепровода, созданного бесконечным набором витков путепровода. Все витки магнитно связаны между собой, причем витки путепровода находится в одной плоскости под витком 1. Все витки прямоугольной формы одинакового размера. Математическая модель электродинамической левитации разработана на основе теории Уайта – Вудсона [1], которая, по сути, является инструментом лагранжевого подхода в исследовании систем взаимного преобразования магнитной и механической энергий. В частном случае линейных магнитных систем, магнитные потокосцепления витка 1 с произвольным витком путепровода определяются как сумма произведений токов, наводимых в каждом витке системы, и взаимных индуктивностей. В предположении большой скорости движущегося витка неподвижные витки путепровода эквивалентны сверхпроводящим виткам нулевого потокосцепления, что позволяет найти токи каждого витка путепровода и магнитной силы отталкивания и торможения. Используя данный метод исследования и известные формулы [2, 3], была создана компьютерная программа в математической оболочке Math CAD Professional 2001, благодаря которой были найдены распределения сил торможения и отталкивания, в случае n=10 витков, для определенного координатного размещения витка 1 относительно путепровода. Построены графические зависимости соответствующих сил при движении 1 витка прямоугольной формы относительно ряда витков.
Исходя из полученных данных, можно сделать важный вывод, что без ущерба точности инженерных расчетов можно ограничиваться всего тремя витками. Также проведя исследования для прямоугольной геометрической формы витка и для колец. В случае одинаковых радиуса кольца и сторон прямоугольника силы отталкивания и торможения имеют практически одинаковую зависимость от координат, что позволяет варьировать формой витков.

1. Уайт Давид С., Вудсон Герберт Х. Электромеханическое преобразование энергии, перев. с англ., М.-Л., Издательство "Энергия", 1964, 528 с.
2. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. - 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отделение, 1986.-488 с.
3. Высокоскоростной наземный транспорт с линейным приводом и магнитным подвесом/В. И. Бочаров, В. А. Винокуров, В. Д. Нагорский и др.; Под ред. В. И. Бочарова и В. Д. Нагорского. - М.: Транспорт, 1985, 279 с.

Саблина Маргарита Владимировна, аспирант, Горного факультета,
Санкт-Петербургский Государственный Горный Университет, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: mig_sab@rambler.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО МАССИВА С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ХАРАКТЕРА ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Саблина М.В.

Объектом исследования является массив горных пород и механические процессы, протекающие в нем, связанные с проведением подземных горных выработок. Высокая степень неоднородности, многообразие форм и характера проявления различных процессов механики горных пород являются особенностями любого горного массива. Проведение горных подземных работ, продолжающийся рост глубины разработки ставят вопрос о безопасности, как для человека, экономики, так и окружающей среды. Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) горного массива необходимо для разработки способов рационального использования месторождений полезных ископаемых, которые обеспечат, в первую очередь, максимальную безопасность, что включает в себя высокую надежность и предотвращение (либо предвидение) и локализацию разрушительных проявлений горного давления [1].

Использование для решения задач механики деформируемого твердого тела вычислительных комплексов, таких как FLAC, ANSYS, ABAQUS и другие, приводит к тому, что оказывается трудно рационально выбрать схему расчета, а также правильно оценить достоверность полученных результатов [2].

При математическом моделировании данной задачи учитывается физическая нелинейность процесса деформирования массива горных пород. Рассматривается плоская задача – одиночная незакрепленная выработка, имеющая форму окружности или прямоугольника. Соотношение, определяющее зависимость между напряжениями и деформациями определяется из данных натурных измерений. Для определения компонент тензора напряжений и деформаций используется итерационный метод Ньютона-Рафсона и модифицированный метод Ньютона-Рафсона [3,4].

Анализ методов исследования НДС массива позволяет сделать вывод о том, что на сегодня не существует универсальных методов и универсальных вычислительных комплексов для решения задач этого класса, которые могли бы иметь практическое значение и необходимую точность. В связи с этим, необходим индивидуальный подход к решению каждой отдельной задачи. В этом случае возможно применение комбинированного метода исследования, который будет включать натурные наблюдения, аналитические и численные методы для достижения наилучшего результата.

1. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. – Л.: Недра, 1989.
2. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998.
3. The finite element method. Fifth edition. Volume 2: Solid Mechanics. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, 2000.
4. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987.

Сафина Гульнара Фриловна К.ф.м.н.
Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета, Нефтекамск, Россия,
e-mail: safinagf@mail.ru;

О СОХРАНЕНИИ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА

Сафина Г.Ф.

В продолжение иследований работ [1, 2] рассмотрим задачу определения закреплений трубопровода, сохраняющих собственные частоты его изгибных колебаний при изменениях параметров жидкости. Уравнение малых изгибных колебаний трубы с несжимаемой жидкостью имеет вид [1]:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(m+\tilde{m}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\tilde{m}V_0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\tilde{m}\left(\frac{p_0}{\rho_0}+V_0^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \quad (1)$$

Здесь I --- момент инерции трубчатого сечения, EI --- жесткость трубы, p_0 --- внутреннее давление, m и $\tilde{m}$ --- массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу l длины трубы, V_0, ρ_0 --- скорость и плотность жидкости. В работе [2] с помощью безразмерных переменных $\tilde{x}=x/l$, $\tilde{w}=w/r$, $\tilde{t}=t/\tau$ и прогиба $\tilde{w}(\tilde{x},\tilde{t})=X(\tilde{x})e^{i\omega\tilde{t}}$, где ω --- частота колебаний, уравнение ((1)) приведено к виду

$$X^{(4)}+aX''+2bi\omega X'-\omega^2 X=0, \quad (2)$$

в котором коэффициенты a и b зависят от физических параметров трубопровода. Поставимим к задаче ((2)) краевые условия:

$$\begin{aligned} &U_1(X)=a_1X(0)-a_2X'''(0)=0, \quad U_2(X)=X''(0)=0,\\ &U_3(X)=b_1X(1)+b_2X'''(1)=0, \quad U_4(X)=X''(1)=0, \end{aligned} \quad (3)$$

которые в зависимости от значений коэффициентов a_1, a_2 и b_1, b_2 характеризуют упругие закрепления, соответственно, на правом и левом концах трубопровода. Общее решение уравнения ((2)) имеет вид $X_j(\tilde{x},\omega)=\sum C_j e^{\lambda_j\tilde{x}}$, где $\lambda_j=\lambda_j(\omega)$ --- различные корни характеристического уравнения. Частотное уравнение для задачи примет вид:

$$\Delta(\lambda_j(\omega))\equiv a_1b_1\cdot f_1(\lambda_j)+a_1b_2\cdot f_2(\lambda_j)-a_2b_1\cdot f_3(\lambda_j)-a_2b_2\cdot f_4(\lambda_j), \quad (4)$$

в котором функции $f_j(\lambda_j)$ зависят от частоты изгибных колебаний трубопровода. Для математической постановки задачи сохранения собственных частот введем в рассмотрение матрицу

$$A=\left\|\begin{matrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{matrix}\right\|.$$

В таких обозначениях определение закреплений, сохранящих частоты колебаний трубы при изменениях параметров жидкости, равносильно нахождению линейной оболочки $<a,b>$, построенной на векторах $a=\left(a_1,a_2,0,0\right)^{\mathrm{T}}$ и $b=\left(0,0,b_1,b_2\right)^{\mathrm{T}}$. Доказана теорема о единственности решения поставленной задачи. Найден метод определения закреплений, сохраняющих первые собственные частоты колебаний трубы с жидкостью при изменениях параметров жидкости. Поставленные задачи решались аналитически на основе спектральной теории дифференциальных уравнений, обратных задач математической физики с применением вычислений на ЭВМ.

1. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, -- 1969. 184 с. 2. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика.-- 2008. Т.49, ч. 1.-- с. 139 - 147.

Сороцька Оксана Василівна, аспірантка 2 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: oksana.sorotska@mail.ru

ПРО ІДЕНТИФІКАЦІЮ СІТКИ ТА ПЕРЕРІЗІВ ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Сороцька О.В.

Викладені в [1] підходи до розв'язання прямих та обернених задач динаміки розподілених просторово-часових систем дозволяють змоделювати функцію стану останніх за умов неповноти інформації про початково-крайові зовнішньо-динамічні збурення системи та виконати оптимальне за середньоквадратичним критерієм керування нею. Базовою для розв'язання цих задач є лінійна інтегральна модель системи, на побудові якої ми зупинялися в [2].

Нижче, на відміну від [2], де інтегральна модель системи будувалася в результаті обернення її диференціального прообразу, інтегральна модель лінійної динамічної системи будується на основі дискретних та дискретно-неперервних спостережень за станом системи та функцією зовнішньо-динамічних збурень, яка цей стан викликає.

В доповіді на основі методів псевдоінверсної алгебри та їх узагальнень на системи інтегральних та функціональних рівнянь за середньоквадратичним критерієм будуються математичні моделі вигляду

$$Ax = y, \qquad (1)$$

$$\int_0^T A(t)x(t)dt = y, \qquad (2)$$

$$B(t)x = y(t) \;\; t \in [0,T], \qquad (3)$$

де $x(t)$ та $y(t)$ – вектор-функції входу-виходу системи, а x та y – вектори значень цих функцій. Моделі (1)–(3), будучи частинним випадком інтегральної моделі $\int_0^T G(t-t')x(t')dt' = y(t)$, в поєднанні з результатами роботи [1] дозволяють змоделювати функцію $y(t)$ стану динамічної системи, яка, будучи недовизначеною за початково-крайовими спостереженнями, не піддається і точній математичній формалізації.

Досліджуються умови точності та однозначності ідентифікації математичних моделей (1)–(3) на системі спостережень

$$x^{(i)}, y^{(i)} \;\; (i = \overline{1,n}), \qquad (1)$$

$$x^{(i)}(t), y^{(i)} \;\; (i = \overline{1,n}), \qquad (2)$$

$$x^{(i)}, y^{(i)}(t) \;\; (i = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

за нею. Пропонуються методи квазілінійної модифікації моделей (1)–(3) за наявності лінійної залежності спостережень (4)–(6). Розглядаються варіанти побудови оптимально нелінійних модифікацій математичних моделей (1)–(3).

Реалізація запропонованої методики побудови перетворюючих матриці A та матричних функцій $A(t)$, $B(t)$ досить проста і доступна для програмування, оскільки всі технічні проблеми практичної реалізації обмежуються чисельними методами інтегрування, методами обернення квадратних матриць та простими алгоритмами лінійної алгебри.

1. Скопецький В.В. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів / В.В. Скопецький, В.А. Стоян, В.Б. Зваридчук. – К.: Сталь, 2009. – 316 с.
2. Стоян В.А. Про інтегральне представлення лінійно-диференціальних рівнянь динаміки просторово-розподілених процесів / В.А. Стоян, О.В. Когут, Я.В. Крисак // Вісник Київ. нац. ун-ту. ім. Т. Шевченка. Сер. «Кибернетика». – 2010. – №1. – С. 28–30.

Стеля Олег Борисович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: oleg.stelya@gmail.com;
Стеля Ігор Олегович, кандидат технічних. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: igor.stelia@gmail.com;
Ляшко Володимир Іванович, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна,
e-mail: lyashko_vi@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ В ЕЛЕМЕНТАХ ПАМ'ЯТІ ЗІ ЗМІНОЮ ФАЗОВОГО СТАНУ

Стеля О.Б., Стеля І.О., Ляшко В.І.

Інтенсивний розвиток інформаційних технологій поставив завдання створення енергонезалежної пам'яті нового покоління, що за своїми параметрами відповідає сучасним вимогам [1-2]. Одним з принципів, які можуть лежати в основі створення енергонезалежної пам'яті з високою щільністю запису інформації, є структурно-фазова зміна поверхні тонких плівок напівпровідників. Матеріали, в яких можливе оборотне протікання фазових перетворень, наприклад, перемикання між кристалічним і аморфним станами за рахунок нагрівання джоулевим теплом, можуть бути успішно використані для створення пристроїв зберігання інформації високої щільності (phase-change material memory або PCM). Матеріалом, який може стати основою для PCM-елементів пам'яті, є халькогенідне скло (наприклад $Ge_2Sb_2Te_5$) [3]. Принцип роботи таких пристроїв суттєво відрізняється від традиційних напівпровідникових елементів пам'яті. Запис інформації заснована на зміні опору матеріалу, а не на маніпуляції з електричними зарядами. Також можливе використання різниці оптичних характеристик у двох станах. PCM-пам'ять володіє наступними перевагами над традиційними видами пам'яті:

- більш висока щільність пам'яті в порівнянні з сучасною флеш-пам'яттю;
- можливість створення багаторівневої комірки (до 4 біт на комірку);
- висока радіаційна стійкість, масштабованість (розмір комірки менше 50 нм).

Все це робить пам'ять на основі зміни фазового стану речовини дуже перспективною для застосування.

Зниження споживання енергії в елементах PCM залишається одним із ключових завдань, зокрема із-за високого струму (~ 0,5 мА), який в даний час потрібний для переходу з кристалічного до аморфного стану. Для оптимізації програмуючого PCM-пам’ять струму та ефективного використання електроенергії, а також кращого розуміння поведінки структур на основі халькогенідів проведене моделювання розподілу температури в елементах пам’яті.

В роботі було проведене дослідження залежності програмуючого струму від геометрії елементу, властивості матеріалів, і теплового опору у місці контакту. Отримані результати порівняні з даними, наведеними в літературі.

1. Phase-change random access memory: A scalable technology / Raoux, G. W. Burr, M. J. Breitwisch, C. T. Rettner, Y.-C. Chen, R. M. Shelby, M. Salinga, D. Krebs, S.-H. Chen, H.-L. Lung, and C. H. Lam // *IBM J. Res. Develop.* – Jul. 2008. – Vol. 52, No. 4/5. – pp. 465-479.

2. Scaling analysis of phase-change memory technology / A. Pirovano, A. L. Lacaita, A. Benvenuti, F. Pellizzer, S. Hudgens, and R. Bez, // in *Proc.IEDM Tech. Dig.*, – 2003. – pp. 29.6.1-29.6.4.

3. Rapidphase transitions of GeTe − Sb2Te3 pseudobinary amorphous thin films for an optical disk memory / N. Yamada, E. Ohno, K. Nishiuchi, N. Akahira, and M. Takao, // *J. Appl. Phys.* – Mar. 1991. – Vol. 69, No. 5. – pp. 2849-2856.

Стефанишин Дмитро Володимирович, доктор техн. наук, пров. н. с.,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна,
E-mail: dvstefanyshyn@yahoo.com
Олінійчук Валентина Вікторівна, аспірант,
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
E-mail: tina.korol@gmail.com

ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ФІЛЬТРАЦІЇ В ТІЛІ ЗЕМЛЯНОЇ ГРЕБЛІ ЗА ДАНИМИ П'ЄЗОМЕТРИЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Стефанишин Д.В., Олінійчук В.В.

Під параметричною ідентифікацією математичної моделі системи розуміється визначення параметрів (коефіцієнтів) моделі, структура якої відома, з використанням даних спостережень, на основі розв'язання оберненої задачі.

За образним виразом Л. Л'юнга, моделювання за даними спостережень, або, в загальному випадку – вирішення задачі структурно-параметричної ідентифікації моделі, це скоріше мистецтво, аніж наука [1], оскільки потребує уміння дослідника за інформацією, що неявно міститься у вибірці даних, а також на основі апріорних знань сформулювати вимоги до моделі, адекватної меті моделювання.

Дослідження проводилися на прикладі однорідної земляної греблі Хмельницької АЕС, тіло і основа якої складені пісками. На основі аналізу даних п'єзометричних спостережень, зокрема аналізу еволюцій зміни осереднених перепадів напору в характерних зонах тіла греблі, встановлених на різних часових інтервалах, було встановлено, що коефіцієнт фільтрації k в різних зонах тіла греблі є функцією координати x і часу t.

При ідентифікації коефіцієнта фільтрації розглядалася математична модель плоскої задачі фільтрації у вибраних створах п'єзометричних спостережень у вигляді [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial H}{\partial x}\right)=\frac{\partial H}{\partial t};$$

$$H(x,0)=H_0(x),\ 0\le x\le l;$$

$$H(0,t)=H_1(t),\ 0\le t\le t_1;\ H(l,t)=H_2(t),\ 0\le t\le t_1. \qquad (1)$$

де $H(x,t)$ – напір в точці x області фільтрації в момент часу t; $k(x,t)$ – коефіцієнт фільтрації; l – гранична координата розрахункової області фільтрації.

Було використано метод «підстановки» з розв'язанням серії прямих задач при варіюванні значень коефіцієнта фільтрації в різних зонах тіла греблі. Чисельний розв'язок прямої задачі при цьому шукався методом скінчених різниць на основі неявної різницевої схеми. Область фільтрації покривалася апроксимуючою сіткою з кусково-лінійною апроксимацією функції, що відображає зміну п'єзометричних напорів по фільтраційній області з достатньо малим кроком, щоб врахувати відмінності у відстанях між п'єзометрами.

1. Льюнг Л. Идентификация систем. – М.: Наука, 1991. – 431 с.

2. Король В.В., Стефанишин Д.В. Параметрична ідентифікація математичних моделей процесів в гідротехнічних спорудах// Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць/ Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. –Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. – Вип. 1. С.100-109.

Стоян Володимир Антонович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, e-mail: v_a_stoyan@ukr.net;
Голодюк Дмитро Андрійович, аспірант,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, e-mail: dimanngo@hotmail.com

ДО ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІКИ ОДНОГО КЛАСУ РОЗПОДІЛЕНИХ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВИХ СИСТЕМ

Стоян В.А., Голодюк Д.А.

Розглядається динамічний процес, розподілений у просторово-часовій області S_0^T. Спостереження за станом $y(s)$ проводиться у дискретно визначених точках $s_1,\ldots,s_L$. Залежність значень $y_l = y(s_l)$ $(l=\overline{1,L})$ від зовнішньо розподіленого просторово-часового збурення $u(s)$ $(s \in S_0^T)$ визначається співвідношенням

$$y_l = \int_{S_0^T} G(s_l - s')u(s')ds' \quad (l=\overline{1,L}). \tag{1}$$

Ставиться задача побудови вектор-функції $\overline{G}(s') = col(G(s_l - s'),\ \ l=\overline{1,L})$, яка дозволяє значення y_l функції стану $y(s)$ в точках $s_l \in S_0^T$ $(l=\overline{1,L})$ визначити через розподілені зовнішньо-динамічні збурення $u(s)$. Нульове наближення $\overline{G}_0(s)$ вектор-функції $\overline{G}(s)$ будується в умовах тимчасово необмеженої області. Наступні ж $\overline{G}_k(s)$ $(k=1,2,\ldots)$ наближення шукаються з врахуванням впливу початково-крайових зовнішньо-динамічних збурюючих факторів, які моделюються за середньоквадратичним критерієм згідно (1). З використанням попередньо знайденої вектор-функції $\overline{G}_{k-1}(s)$ та визначених в областях $S^0 = S_0 \times (-\infty,0]$ та $S^\Gamma = (R^\nu \setminus S_0)\times[0,T]$ моделюючих функцій $u_0^{(i)}(s)$, $u_\Gamma^{(i)}(s)$ $(i=\overline{1,n})$ пропонується ітераційний алгоритм побудови k-го наближення вектор-функції $\overline{G}(s')$ за спостереженнями $y^{(i)} = col(y_l^{(i)},\ l=\overline{1,L})$ і $u^{(i)}(s)$ $(i=\overline{1,n})$.

Точність розв’язання задачі залежить від: 1) точності ε_{ik}^2, з якою моделюючі функції $u_0^{(i)}(s)$ та $u_\Gamma^{(i)}(s)$ $(i=\overline{1,n})$ на k-ій ітерації за середньоквадратичним критерієм відповідають початково-крайовим зовнішньо-динамічним збуренням, які мають місце в i-ому $(i=\overline{1,n})$ спостереженні за системою; 2) середньоквадратичної точності δ_{kl}^2 $(l=\overline{1,L})$, з якою компоненти вектор-функції $\overline{G}_k(s)$ $(k=1,2,...)$ на k-ій ітерації узгоджуються із спостереженням $y^{(i)}$ та $u^{(i)}(s)$ $(i=\overline{1,n})$ за системою.

Ітераційний алгоритм ***лінійної ідентифікації*** ядер визначеної вище інтегральної моделі розглядуваного процесу дає точний розв’язок, якщо на деякій k-ій ітерації величини ε_{ik}^2 і δ_{kl}^2 будуть нульовими для $i=\overline{1,n},\ l=\overline{1,L}.$ У випадку невиконання таких умов розв’язується одна з двох наступних задач. **Задача 1.** Випадок побудови інтегральної математичної моделі, коли k-те наближення $g_{k\tau}(s)$ $g_\tau(s)$- елемента $(\tau \in \{\overline{1,\mathrm{L}}\})$ вектор-функції $\overline{G}(s)$ знаходиться з недостатньо хорошою точністю $\delta_{k\tau}^2 > 0.$ **Задача 2.** Випадок побудови інтегральної математичної моделі, для випадку, коли на k-ій ітерації для $i=\xi \in \{\overline{1,\mathrm{n}}\}$ спостереження точність $\varepsilon_{\xi k}^2 > 0$ є недостатньою. Обидві задачі розв’язуються шляхом проведення ***нелінійної модифікація*** моделі (1).

Фурасов Владислав Дмитриевич, доктор технических. наук, профессор,
Государственный Университет Управления, Москва, Россия,
e-mail: furasov@mail.ru

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ

Фурасов В.Д.

Рассматриваются общие вопросы, связанные с построением совместимых с результатами наблюдения динамических моделей в условиях ограниченной реально доступной статистической информации. В рамках развиваемого подхода [1 - 3] каждому процессу социально-экономического развития $y(k)$, наблюдаемому на промежутке времени $k \in [k_0, k_1]$, вместе с дискретной динамической моделью

$$x(k+1) = A(k)x[k],$$

где

$$A(k) = [a_1(k),...,a_n(k)] = y(k+1)y^{\mathrm{T}}[k]/\|y[k]\|^2, \quad x_j[k] = [x_j(k),\dots,x_j(k-n+1)]^{\mathrm{T}}, \quad n = k_1 - k_0,$$

ставится в соответствие эволюционный индекс

$$ei(k_0, k_1) = a_1(k) + ... + a_n(k).$$

Введение $ei(k_0, k_1)$ позволяет, отталкиваясь от теоремы Перрона, говорить об эволюционном спаде моделируемого процесса социально-экономического развития на наблюдаемом промежутке времени, если $ei(k_0, k_1) < 1$, и - о подъеме, если $ei(k_0, k_1) > 1$. Вместе с эволюционными индексами в рассмотрение вводятся табели о рангах – таблицы, в которых каждый процесс (показатель) развития и, следовательно, регион или страна занимает место в соответствии со своим эволюционным индексом. Направление упорядочивания эволюционных индексов по убыванию или возрастанию определяется направленностью, позитивной или негативной, рассматриваемой группы показателей развития. На основе эволюционных индексов и базисных темпов роста рассчитываются также векторы развития моделируемых процессов. В основе проводимых исследований лежит статистика международных сравнений 2000-2008 гг.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-06-00225).

1. Фурасов В.Д. Моделирование плохоформализуемых процессов. М.: "Academia", 1997. – 224 с.
2. Фурасов В.Д. Динамика развития: модели, индексы, оценки. М.: "Academia", 1998. – 224 с.
3. Фурасов В.Д., Фурасов Д.В. Динамический анализ показателей социально-демографической статистики // Государственное управление в XXI веке: традиции и инновации. Материалы 5-й ежегодной международной конференции факультета государственного управления МГУ им. М. В. Ломоносова (31 мая – 2 июня 2007 г.): Ч.2 - М.: Российская политическая энциклопедия (РОССПЭН). 2007. С. 170-179.

Харченко Ігор Іванович, кандидат техн. наук, доцент кафедри моделювання складних систем *факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка*,
Удовенко Андрій Анатолійович, студент факультету кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
Адреса для листування – (044) 253-09-54, e-mail: ihar@unicyb.kiev.ua

ОСОБЛИВОСТІ ПРОВЕДЕННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОГО ПРИСКОРЮВАЧА

Харченко І.І., Удовенко А.А.

У монографії [1] описані особливості моделювання руху пучків заряджених частинок та методи оптимізації структури лінійних прискорювачів (ЛУ) з використанням тогочасної обчислювальної техніки. Використання сучасних комп‘ютерів та відповідного програмного забезпечення дозволяє по-новому підійти до постановки задач моделювання динаміки пучків заряджених частинок. Мета роботи – дослідити динаміку пучка заряджених частинок для запропонованої математичної моделі, розробити програмне забезпечення для проведення необхідних розрахунків повздовжнього руху заряджених частинок у прискорювачі та виконати візуалізацію динаміки пучка.

Запропонована методика проведення обчислювального експерименту, яка ґрунтується на комбінації різних декомпозиційних прийомів та подальшої чисельної оптимізації ітераційними процедурами [2].

Використання ітераційних процедур градієнтного типу дозволяє здійснити оптимізацію параметрів, які задають структуру прискорювача, а саме довжини зазорів та трубок дрейфу. Особливість програмного забезпечення полягає в тому, що воно дає можливість порівняти розвиток динаміки пучка на різних наборах параметрів та при зміні вхідних характеристик пучка в інтерактивному режимі.

Для тестових задач розглядалась модель, що описує лише повздовжній рух частинок у прискорювачі для медичних цілей потужністю 3 Мев. Модель динаміки таких систем у загальному випадку можна описати рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x,t,\alpha\right),\ t\in\left[t_0,T\right],$$

де x – вектор фазових координат, α – вектор параметрів, який визначає конструктивні характеристики системи.

При проектуванні систем такого класу важливе місце займають проблеми, пов‘язані зі зручністю представлення інформації, як окремий випадок розробників цікавлять засоби ведення діалогу та візуалізація динаміки пучка частинок. Саме тому спосіб представлення інформації з використанням сучасних програмних засобів зараз має надзвичайну важливість, оскільки це дозволяє швидко проаналізувати набір параметрів, які характеризують як динаміку пучка, так і конструктивні особливості ЛУ. Робота в інтерактивному режимі дозволяє прослідкувати в динаміці зміну форми згустку частинок в наперед вибраній системі координат, простежити за їх траєкторіями, що вже навіть на перших етапах моделювання руху пучка дозволяє здійснити аналіз динаміки процесу прискорення.

Обчислювальний експеримент був реалізований сучасними програмними засобами мовою C# , враховуючи її універсальність та наявність ефективних реалізацій стандарту.

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
2. Розвиток методів і технологій моделювання та оптимізації складних систем: Монографія. – К.: Вид-во «Сталь», 2009. – 668 с.

Ходневич Ярослав Васильович, аспірант,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна,
e-mail: hodnevych_jaroslav@ukr.net, jaroslavv@mail.ru

ПРО СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕЙНОЛЬДСА ПРИ ЧИСЕЛЬНОМУ МОДЕЛЮВАННІ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОДНОГО ПОТОКУ, ЩО ОБТІКАЄ РУСЛОВУ ГРЯДУ

Ходневич Я.В.

Розв'язується задача чисельного моделювання динаміки турбулентного потоку в природному руслі при обтіканні гряди наносів. Руслова гряда розміщена під гострим кутом до берега та відхилена вниз за течією. Обчислення кінематичних характеристик потоку проводиться в локальній тривимірній області, що має форму паралелепіпеда та знаходиться за грядою наносів.

Для моделювання руху реальної турбулентної рідини використовуються рівняння Рейнольдса для квазіламінарного потоку (неявна схема обчислень) та рівняння Рейнольдса у дивергентній формі, які доповнюються рівняннями *k-ε* моделі (явна схема обчислень) [1]. Такий підхід дозволяє вирішити проблему стійкості розв'язків при обчисленні кінематичних характеристик водного потоку.

Задача розв'язується в два прийоми. Спочатку розв'язується рівняння Рейнольдса для квазіламінарного потоку на розрідженій сітці. Шляхом заміни частинних похідних скінченними різницями здійснюється перехід від системи диференційних рівнянь до системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду $Ax=b$. Отримана система алгебраїчних рівнянь розв'язується з використанням LU-алгоритму. Оскільки визначник семидіагональної розрідженої матриці A в цьому випадку є відмінним від нуля, робиться висновок, що отримані прямим методом наближені чисельні розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь будуть стійкими.

На наступному кроці значення кінематичних характеристик потоку, що обчислені за неявною схемою, використовуються як початкове наближення для розв'язання більш складної задачі - системи рівнянь Рейнольдса, яка доповнена рівняннями *k-ε* моделі. При цьому здійснюється перевірка інтегральної умови нерозривності потоку, згущується розрахункова сітка та виконується сплайнова апроксимація наближених кінематичних характеристик.

Для побудови звичайно-різницевого аналога системи рівнянь Рейнольдса у дивергентній формі використовується метод розщеплення. Після кожного часового кроку чисельного розв'язання системи рівнянь за явною схемою Мак-Кормака на згущеній рівномірній сітці обчислюються поля осереднених швидкостей та знаходяться розподіли осереднених значень кінетичної енергії турбулентності k, швидкості її дисипації ε і коефіцієнта турбулентної в'язкості.

Виконано ряд чисельних експериментів, результати яких показують, що обчислені значення кінематичних характеристик потоку наближаються до натурних даних [2].

1. Ходневич Я.В. Моделювання кінематичних характеристик руслового потоку та аналіз факторів руслових деформацій// Вісник НУВГП. Зб. наукових праць. Вип. 3 (47), Ч. 1. – Рівне: НУВГП, 2009. С. 551-556.
2. Ходневич Я.В., Щодро О.Є, Корбутяк В.М. Методика чисельного моделювання турбулентних течій у відривних зонах при оцінці розмиваючої здатності потоку гірських рік// Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Зб. наукових праць. Вип. 33. – Рівне: НУВГП, 2008. С. 81-86.

Хусаінов Ділюс Яхьєвич, кандидат географічних наук, доцент кафедри розміщення продуктивних сил *Київського національного економічного університету ім. Вадима Гетьмана*
Адреса для листування – 03252, м. Києв, вул. Пугачева, 6, кв.8, тел. 483-56-23.

МОДЕЛІ ТРАНСФОРМАЦІЇ ГАЛУЗЕВОЇ ТА ТЕРИТОРІАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ НАРОДНОГО ГОСПОДАРСТВА УКРАЇНИ НА СУЧАСНОМУ ЕТАПІ

Хусаінов Діл.Я.

Серед структурних характеристик економічної системи провідне місце займає галузева структура, яка формується під впливом суспільного поділу праці і відображає основні пропорції і систему взаємозв'язків між галузями. На її основі здійснюється аналіз міжгалузевих пропорцій та зв'язків , оцінюється економічна ефективність виробництва, реалізується управління економікою.

Галузева структура господарства України характеризується такими особливостями:

- високою часткою галузей, що виробляють проміжний продукт;
- перевантаженням екологонебезпечними, ресурсомісткими галузями;
- низьким рівнем розвитку галузей, які визначають темпи інвестиційного оновлення виробництва;
- технологічною неконкурентноспроможністю значної кількості виробництв;
- низьким рівнем розвитку трансформаційної, енергетичної, інформаційної інфраструктури.

Територіальна структура господарства відображає територіальні форми існування його економічної системи та взаємозв'язку її складових, а також значно зумовлює специфіку управління господарською системою.

Головними елементами територіальної системи господарства виступають: економічні райони, підрайони, промислові вузли, центри, пункти. Особливе місце посідають територіально-виробничі комплекси.

Основні напрями вдосконалення територіальної структури полягають у наступному:

- зростанні питомої ваги прогресивних галузей;
- трансформації структурних характеристик на користь соціально-орієнтованих галузей; енергозберігаючих виробництв;
- формуванні нових структурних елементів іноваційної спрямованості (технопарки, технополіси);
- підвищенні адаптивних можливостей територіальних структур щодо зміни кон'юктури товарного ринку.

Чабаненко Аліна Миколаївна, аспірантка кафедри економічної кібернетики
Черкаський національний університет імені Б. Хмельницького, Черкаси, Україна
e-mail: aln7chab@mail.ru

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ СИСТЕМ З МІЖКОМПОНЕНТНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Чабаненко А.М.

Моделювання складних систем з між компонентною взаємодією здійснюється двома шляхами. Один зв'язаний зі створенням програмних, алгоритмічних моделей сутностей та створення середовища їх взаємодії (молекулярна динаміка, агентно-орієнтоване моделювання). Інший шлях пов'язаний з побудовою моделей динаміки показників даної системи (наприклад, моделі динаміки популяцій) здебільшого за допомогою диференціальних рівнянь.

Детальне дослідження динаміки диференціальних економіко-математичних моделей неможливе без чисельних експериментів з використанням дискретних моделей та комп'ютерних засобів. З появою комп'ютерів стало можливим створювати моделі, в яких будуть враховуватися властивості кожного, навіть незначного об'єкта, що приймає участь в процесі. Поєднуючи аналітичні методи та комп'ютерну симуляцію, можна отримати результати, недосяжні аналітичними методами. Багатокомпонентні системи демонструють різноманітну динамічну поведінку навіть для відносно простих за структурою систем.

Не зменшуючи значущості першого напрямку, дана робота розвиває другий напрям дослідження складних систем. Пропонується модель, особливості поведінки якої пов'язані з дискретністю часу та явищами так званого детермінованого хаосу. Це багатовимірний аналог відомої моделі Ферхюльста, заданої наступним чином:

$$x_i^{(n+1)} = \begin{cases} x_i^{(n)}\left(1+\alpha_i+\alpha_i\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}x_j^{(n)}\right)-\gamma_i \equiv f_i\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},...x_m^{(n)},\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right); \\ 0, \quad якщо \quad f_i\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},...x_m^{(n)},\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)<0; \end{cases}, \qquad (1)$$

де $x_i^{(n)} > 0$ – значення компонентів (показників) системи, $\vec{\alpha},=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\right)$- коефіцієнти мультиплікації, $B=\{\beta_{ij}\}$ – матриця міжкомпонентних взаємодій, γ_i – транзакційні витрати. Матриця B, може бути представлена у вигляді орієнтованого графу міжкомпонентних взаємодій, на основі чого можна виокремити класи систем виду (1) як класи ізоморфних графів.

Окремими випадками даної моделі є відома модель Ферхюльста при $m = 1$, модель Вольтерра-Лотки при $m = 2$ та модель Лоренца при $m = 3$. Ціллю даного дослідження є виявлення динамічних властивостей моделі (1) у просторі можливих значень параметрів ($\vec{\alpha},B,\vec{\gamma}$) в критичних точках. При таких значеннях параметрів спостерігається хаотична динаміка, але на значення компонентів накладаються умови додатності та обмеженості значень, що дозволяє використовувати властивості моделі для дослідження реальних фінансово-економічних систем під час кризових явищ. Досліджується життєздатність певних структур міжкомпонентної взаємодії в реальних системах.

1. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем.// Дербенцев В.Д., Сердюк О.А., Соловйов В.М., Шарапов О.Д. - Монографія. - Черкаси: Брама-Україна, 2010. - 287 с.

Чабаненко Дмитро Миколайович, аспірант кафедри економічної кібернетики
Черкаський національний університет імені Б. Хмельницького, Черкаси, Україна
e-mail: chdn6026@mail.ru

МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ НА ОСНОВІ СКЛАДНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

Чабаненко Д.М.

Прогнозування індексів фондових ринків є надзвичайно актуальною задачею в дослідженні складних фінансово-економічних систем. Специфіка фінансових часових рядів полягає в наявності стилізованих фактів: негаусівський розподіл прибутковостей, кластеризація волатильності та ін, що є результатом складності досліджуваних систем. Такі часові ряди не завжди адекватно відтворюються сучасними методами прогнозування.

Нехай процес заданий послідовністю дискретних станів і матрицею імовірностей переходу між станами. Складним ланцюгом Маркова порядку r будемо вважати модель випадкового процесу, у якому ймовірності наступного стану залежать від послідовності r попередніх станів (передісторії).

Пропонується технологія прогнозування часового ряду на основі складних ланцюгів Маркова, яка базується на концепціях детермінованого хаосу, генетичних алгоритмів та нейронних мереж [1]. Алгоритм передбачає обробку часового ряду на різних частотних рівнях за допомогою вибору ієрархії рівнів дискретизації та процедури „склеювання" та включає наступні етапи: 1) знаходження початкового наближення у вигляді аналітичної функції виду $y=ae^{bx}(1+c\cdot\sin(dx+e))$ та знаходження залишків як відношення значень ряду та значень початкового наближення; 2) обчислення приростів залишків ряду ($t_{\min} \le t \le t_{\max}$), які відповідають ієрархії часових кроків $\Delta t_k = 2^k$, або більш складної ієрархії виду $\Delta t = \prod_{i=1}^{n} c_i^{k_i} \cdot$, де c_i – n перших простих чисел, $1 \le k_i \le k_{\max}$; 3) вибір кількості рівнів квантування s та рівномірне квантування (дискретизація) приростів; 4) оцінка при кожному Δt та числі рівнів квантування s ймовірностей переходів для ланцюгів Маркова порядку r; 5) обчислення тестової прогнозної залежності для трійки Δt, r, s та початкового значення $t_{поч}$, ($t_{поч} \le t_{\max}-\Delta t$), приймаючи на кожному кроці приріст з максимальною ймовірністю; 6) складання тестової прогнозної залежності для даних Δt та $t_{поч}$ з використанням відповідних тестових прогнозних залежностей для кроків часу Δt , $2\Delta t$,… $\Delta t_{\max}$ та процедур «склеювання»; 7) пошук оптимальних s и r для кожного Δt, з використанням відповідних «склеєних» тестових прогнозних залежностей; 8) прогнозування при $t > t_{\max}$ з використанням описаних вище процедур, при знайдених значеннях параметрів s та r для кожного Δt; 9) відновлення значень ряду з прогнозованих залишків.

Проведено апробацію алгоритму при прогнозуванні світових фондових індексів Dow Jones, S&P 500, DAX, CAC40, RTS, PFTS. Показано, що прогнозування часового ряду з різними кроками дискретизації Δt дозволяє збільшити інформативність початкового стану складного ланцюгу Маркова та побудувати більш інформативні прогнози для заданого частотного рівню. Процедура склеювання дозволяє поєднати прогнози з різними інтервалами дискретизації Δt у єдиний прогнозний ряд, який містить усю важливу інформацію, здобуту при прогнозуванні на усіх рівнях ієрархії приростів часу Δt.

1. Soloviev V. Financial time series prediction with the technology of complex Markov chains / V. Soloviev, V. Saptsin, D. Chabanenko // Computer Modelling and New Technologies.- 2010.- Vol. 14, № 3.- P. 63-67.

Швець Ольга Федорівна, кандидат фіз-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: olgasv@univ.kiev.ua;
Дегтяр Ольга Сергіївна, студентка 2 курсу магістратури,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: olga.degtiar@gmail.com

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ ВИБОРУ ПАРАМЕТРІВ В ЗАДАЧАХ АПРОКСИМАЦІЇ ВЕКТОРНИХ СИГНАЛІВ

Швець О.Ф., Дегтяр О.С.

В багатьох прикладних задач прогнозування виникає необхідність апроксимувати дані, що надходять в режимі реального часу. У зв'язку з тим фактом, що при прогнозуванні часто розглядається декілька показників, доцільним видається представляти дані у вигляді векторного сигналу. Для розв'язування задач класифікації та розпізнавання ефективно використовуються адаптивні алгоритми, що базуються на методах структурно-параметричної оптимізації [1,2].

В даній роботі описується адаптивний алгоритм апроксимації векторного сигналу $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}) = (\xi^{(1)}(t), \xi^{(2)}(t), ..., \xi^{(m)}(t)), t_0 \le t \le T$. Задача полягає в знаходженні векторів параметрів $\alpha^{(k)} = \left(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, ..., \alpha_n^{(k)}\right)^T, k = 1,2,...,m,$ для визначення апроксимації у вигляді параметрично заданого сімейства

$$x^{(k)}(t) \approx \psi^{(k)}\left(t, \alpha^{(k)}\right) = \psi^{(k)}\left(t, \alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, ..., \alpha_n^{(k)}\right), k = 1,2,...,m. \tag{1}$$

Функції $\psi^{(k)}\left(t, \alpha^{(k)}\right), k = 1,2,...m$ часто вибирають у вигляді лінійної комбінації

$$\psi^{(k)}\left(t, \alpha^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} \varphi_j(t), k = 1,2,...,m, \tag{2}$$

де $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ - система базисних функцій. Зокрема, в якості базисних функцій можна взяти такі, які найкращим чином апроксимують експериментальні дані [1-3].

Для корекції вектора параметрів з метою мінімізації нев'язки записується неперервна ітераційна процедура у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь з деякими початковими даними [1,2].

1. Гаращенко Ф.Г., Кириченко М.Ф., Крак Ю.В. та ін. Сучасні методи та інформаційні технології математичного моделювання, аналізу і оптимізації складних систем. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. – 200 с.
2. Швець О.Ф. Використання методу структурно-параметричної оптимізації в задачах цифрової обробки інформації // Вісник Київського університету. – Сер. фізико-математичні науки. – 2005. – № 4. – С. 249 – 255.
3. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985.– 304с.

Шостка Наталья Владимировна, аспирант кафедры общей физики физического факультета.
Таврический национальный университет им.В.И. Вернадского,г.Симферополь, пр.Вернадского 4., 95007
E:mail: *nataliya_shostka@mail.ru*

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПРИ ФОКУСИРОВКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ

Шостка Н.В.

В предлагаемой работе применен простой метод получения цилиндрически-поляризованных пучков, распространяющихся вдоль оптической оси одноосного кристалла. В таких пучках при фокусировке апертурной линзой получаются два фокуса с выраженными распределениями поляризации, состояния которых определяются не только топологическим зарядом l, спином s, но и параметрами кристалла и оптических элементов. Возникает вопрос, возможно ли управлять необходимыми свойствами поляризации в таких пучках.

Целью данной работы является формирование и исследование цилиндрически-поляризованных пучков после прохождения через систему, состоящую из одноосного кристалла и линзы, лазерных пучков с различными состояниями начальной поляризации.

В работе были рассмотрены два основных случая:

1. на кристалл падает правоциркулярно поляризованный сингулярный пучок с зарядом $l=-1$
2. на кристалл падает левоциркулярно поляризованный сингулярный пучок с зарядом $l=-1$

Предположим, что правоциркулярно поляризованный параксиальный пучок фокусируется в одноосный кристалл, где он разделяется на два, обыкновенный и необыкновенный, распространяющиеся вдоль оптической оси. Представим поперечную компоненту пучка с топологическим зарядом $l=-1$ (для первого случая), т.е. с первоначальным состоянием $\left|1 \quad -1\right\rangle$ в форме:

$$E_{+,\nu}^{1,+}=\left\{\left(\frac{r}{\omega_0\sigma_0}\right)\Psi_0+\left(\frac{r}{\omega_0\sigma_e}\right)\Psi_e\right\}exp(-i\varphi) \qquad (1)$$

$$E_{-,\nu}^{1,+}=\left\{\left(\frac{r}{\omega_0\sigma_0}\right)\Psi_0-\left(\frac{r}{\omega_0\sigma_e}\right)\Psi_e\right\}exp(-i\varphi)$$

где $\Psi_{o,e}=\left(z_0 r/q_{o,e}^2\right)exp\left[-ikn_1r^2/(2q_{o,e})\right]$, $q_{o,e}=S+f_2q_2^{(o,e)}/(f_2-q_2^{(o,e)})$,
$q_1=h+d+(L+iz_0)f_1/(f_1+L+iz_0)$, $q_2^{(o,e)}=q_1+(n_1/n_{o,e})z$, $z_0=kn_1\omega_0^2/2$

При этом E_+ компонента переносит единичный оптический вихрь с топологическим зарядом $l=-1$, и E_- компонента - оптический вихрь с топологическим зарядом $l=1$.

Изменим первоначальное состояние поляризации в падающем пучке следующим образом: $\left|1 \quad -1\right\rangle \to \left|-1 \quad -1\right\rangle$. Структура поля на выходе из кристалла изменится. При этом компоненты нового поля будут определяться как:

$$E_+=e^{-i3\varphi}\sum_{j=0}^{2}(iz_0)^{j-2}(2/j!)(r/\omega_0)^{2(j-2)}\left[\Psi_o/q_o^{j-2}-\Psi_e/q_e^{j-2}\right],$$

$$E_-=(\Psi_o+\Psi_e)e^{-i\varphi} \qquad (2)$$

Таким образом, в данном случае E_+ компонента переносит единичный оптический вихрь с топологическим зарядом $l=-3$, и E_- компонента - оптический вихрь с топологическим зарядом $l=-1$.

Шуклін Герман Вікторович, здобувач, старший викладач.
Кафедра вищої математики факультету інформаційних систем і технологій державного навчального закладу Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана.
e-mail: mathacadem-Kiev@ukr.net

ПОБУДОВА ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ, ЩО МАЄ НЕ МАРКОВСЬКУ ВЛАСТИВІСТЬ

Шуклін Г.В.

Розглядається стохастичне диференціальне ризикового інвестування, що описує вартість акції $c_i(t)$ в момент часу t:

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = (a_i + \alpha_i \xi_i) c_i(t), \tag{1}$$

з початковими умовами

$$c_i(t) = c_i(t_0), \tag{2}$$

при $t = t_0$, де $a_i > 0, \alpha_i = const, \xi_i -$ випадкова величина, яка розподілена за деяким законом і приймає три можливих значення $\xi_i \in \{-1;0;1\}$.

Тоді закони розподілу випадкової величини з рівняння (1), є розв'язками системи рівнянь

$$\frac{dp(t)}{dt} = \mu_- \lambda_+ \tau\, p_{\xi_-}(t-\tau) p_{\xi_-}(t) p_{\xi_+}(t) + \mu_+ \lambda_- \tau\, p_{\xi_+}(t-\tau) p_{\xi+}(t) p_{\xi_-}(t)\ . \tag{3}$$

$$\frac{dp_{\xi_0}(t)}{dt} = (\lambda_- + \lambda_+) p_{\xi_0}(t-\tau) - (\lambda_- + \lambda_+) p_{\xi_0}(t)$$

при початкових умовах $p(t) \equiv \phi(t), -\tau \le t \le 0$ і $\int_{-\tau}^{\infty} p(t)dt = 1,$ де λ_-, λ_+ - середня кількість падінь і зростан вартості акції відповідно за одиницю часу; $\frac{1}{\mu_-}$ - середній інтервал часу падіння вартості, $\frac{1}{\mu_+}$ - середній інтервал часу зростання вартості акції.

1. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения, введение в теорию и приложения: Пер. с англ.- М.:Мир, 000 «Издательство АСТ», 2003.-408 с.
2. Завельский М.Г.,Пекарский А.В.(2008): Методы повышения эффективности инвестиционных решений на фондовом рынке// Экономика и математические методы,2008,том 44,№2,с.25-36.
3. Кравченко Ю.Я. Фондовый рынок, учебное пособие.-Киев,Дакор,КНТ,2008.
4. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения, введение в теорию и приложения.- М.: Мир, 2003.
5. Завельский М.Г., Пекарский А.В.(2008). Методы повышения эффективности инвестиционных решений на фондовом рынке// Экономика и математические методы,2008,том 44,№2,с.25-36.

Шульженко Николай Григорьевич, доктор техн. наук, профессор, заведующий отделом вибрационных и термопрочностных исследований,
Руденко Елена Константиновна, кандидат техн. наук, научный сотрудник;
Пантелят Михаил Гарриевич, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник;
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина,
e-mail: shulzh@ipmach.kharkov.ua

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ РОТОРА ТУРБОГЕНЕРАТОРА В ТРЁХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Шульженко Н.Г., Руденко Е.К., Пантелят М.Г.

Описывается разработанная методика компьютерного моделирования методом конечных элементов связанных нестационарных трёхмерных электромагнитных и тепловых полей в электрических машинах на аварийных и переходных режимах эксплуатации.

Математическая модель электромагнитных процессов представляется системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме без учёта токов смещения, дополненной уравнениями, определяющими электрофизические свойства материалов. Полученная система уравнений решается в терминах векторного магнитного потенциала [1].

Температурное поле конструкции определяется путем решения нестационарного уравнения теплопроводности с использованием в качестве правой части добавочных потерь (внутренних источников тепла), полученных в результате расчета пространственно-временнóго распределения электромагнитного поля [2]. При этом используются граничные условия, описывающие водородное либо воздушное охлаждение рассматриваемого фрагмента конструкции электрической машины.

Решение задач электродинамики и теплопроводности осуществляется методом конечных элементов с использованием пространственных 8-узловых конечных элементов в виде произвольных шестигранников. Для интегрирования нестационарных процессов по времени используется неявная конечно-разностная схема Крэнка-Николсона. Методика совместного решения нестационарных уравнений электромагнитного поля и теплопроводности описана в [2].

Приводятся результаты численного анализ электромагнитного и температурного поля ротора синхронного турбогенератора ТГВ-300 при коротком замыкании в обмотках статора. При этом уравнения электромагнитного поля и теплопроводности решались в системе координат, вращающейся синхронно с ротором. Исследовано влияние различных видов водородного и воздушного охлаждения ротора на температурное поле его основных конструктивных элементов (обмотки возбуждения и пазовые клинья, удерживающие обмотки в пазах ротора).

Полученные результаты могут быть использованы для оценки термомеханического состояния и срабатывания ресурса роторов синхронных турбогенераторов ТЭС и АЭС.

1. Математическое моделирование нестационарных электромагнитных полей в фрагментах ротора синхронного турбогенератора / Пантелят М.Г., Сафонов А.Н., Руденко Е.К., Шульженко Н.Г. // Проблемы машиностроения. – 2010, т. 13, № 2. – С. 51 – 60.
2. Методика расчета электромагнитных и термомеханических процессов в роторах турбогенераторов при переходных режимах / Н.Г. Шульженко, М.Г. Пантелят, Н.Г. Гармаш, А.Н. Сафонов // Вестник НТУ "ХПИ".– 2008.– № 36. – С. 175 – 184.

Щетинина Елена Константиновна, доктор физ.-мат. наук, доцент;
Гарбуз Валерия Андреевна;
Яковченко Максим Сергеевич
ДонНУЭТ имени Михаила Туган-Барановского, Донецк, Украина
e-mail: elenaschetinina@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ЗАПАСАМИ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Щетинина Е.К., Гарбуз В.А., Яковченко М.С.

Основные затраты по обеспечению производства предприятия несут на приобретение, перемещение и обслуживание производственных запасов. Подавляющее большинство экзогенных переменных задачи по управлению производственными запасами не имеет конкретной количественной формулировки в силу их лингвистического характера. Поэтому решение проблемы неопределенности является весьма важной задачей для обеспечения эффективного процесса оптимизации производственных запасов.

Предлагаемая модель предусматривает учет влияния на процесс управления производственными запасами факторов не только количественного (цена, спрос и т.д.), но и вербального (возможность замены, интенсивность потребности товара и т.д.) содержания, которые учитываются для повышения адекватности принимаемого решения.

В основе первого этапа реализации модели по управлению производственными запасами лежит принцип обобщения по формуле Уилсона. Минимальный объем информации о входящих параметрах выбранной формулы заключается в определении двух интервалов значения параметра A: $A_1 = \left[\underline{a}_1; \overline{a}_1\right]$ и $A_0 = \left[\underline{a}_0; \overline{a}_0\right]$, где $\underline{a}_1$ и $\overline{a}_1$ представляют реперные точки, минимум и максимум интервала значений, имеющих наивысшую степень достоверности данных; соответственно значения $\underline{a}_0$ и $\overline{a}_0$ – границы интервала, вне которого все данные не имеют достоверности.

Для получения конкретного численного значение над итоговым нечетким множеством производят операцию дефазификации по формуле: $D(A) = \sum_{\alpha\in[0,1]} \alpha \cdot A_\alpha \Big/ \sum_{\alpha\in[0,1]} \alpha$, где $D(A)$ – операция преобразования нечеткого множества A в четкое число; $\alpha-$ уровни достоверности, на которых по нечеткому множеству A известны интервалы значений; $A_\alpha-$ четкие множества $\alpha-$уровня. При необходимости производят переход к нечетким множествам 2-го уровня, поскольку гипернетические множества помогают учитывать полный объем информации об оценке параметров.

На втором этапе реализация модели предусматривает учет влияние лингвистических переменных в уже имеющемся нечетком решении задачи с помощью использования композиционного правила вывода modus ponens, т.е. построение системы правил вида «если …, то», посредством которой в дальнейшем задача управления производственными запасами получает окончательное решение, включающее в себя сведения о показателях вербального характера. В итоге модель дает нечеткий результат, которым исследователь может воспользоваться в чистом виде, либо преобразовать в действительное число методом дефазификации.

Таким образом, на выходе спроектированной в данной работе модели системы управления производственными запасами получаем некоторое нечеткое значение, которое на основе широко известной модели управления запасами, учитывает как нечеткость входящих в модель параметров, так и лингвистические переменные, существенно влияющие на процесс, которыми исследователи пренебрегали во всех предыдущих исследованиях по управлению запасами.

Юнькова Олена Олександрівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
КНЕУ імені Вадима Гетьмана, Київ, Україна
Рутицька Владислава Валеріївна, кандидат технічних наук, молодший науковий співробітник
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: vlarut@mail.ru

ПРО ДИНАМІЧНУ МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ

Юнькова О.О., Рутицька В.В.

Для того, щоб сформулювати задачу оптимального керування параметрами портфеля акцій, побудуємо його модель на основі моделі окремої акції [1].
На інтервалі часу $t \in [t_0, t_1]$ рівняння, що описує прибутковість портфеля акцій r_p, має вигляд

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t) r_i(t),$$

де x_i – частка акцій і-того виду у портфелі; r_i – очікувана прибутковість акцій і-того виду. Продиференціювавши обидві його частини за t, отримаємо

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = \sum_i \left(r_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t)\frac{dr_i(t)}{dt}\right).$$

Уведемо нормуючі співвідношення, що враховують особливості такого роду інвестиційних операцій

$$\sum_i \frac{\dot{r}_i(t)}{r_i(t)} = 1, \quad \sum_i \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = 1, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Можна показати, що для $i \neq j$ мають місце співвідношення

$$\sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_i}{r_i(t)} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t)\; r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)},$$

$$\sum_i \frac{x_i(t) r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t)\; r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}.$$

У наведеному вище рівнянні функція f є правою частиною математичної моделі формування ціни акції [1]. Тоді динамічне рівняння формування ринкової вартості портфеля акцій матиме такий вигляд

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)}\; \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}\right).$$

Останнє співвідношення, при припущеннях, зроблених вище, описує динаміку поведінки портфеля ризикованих цінних паперів. Більш детальний його аналіз вказує на дві важливі властивості, які характеризують ринкову вартість портфеля і полягають в тому, що ця динаміка залежить від динаміки як очікуваної прибутковості акцій, так і зміни структури портфеля.

1. Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В.В. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента// Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – 148. – с. 279-285.

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION

MODELLING

&

STABILITY

Section 3

MODELLING AND INVESTIGATION OF MECHANICAL SYSTEMS

Grygor’yeva Lyudmyla Vitaliyivna, Ph. D. (Tech.sc.),
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: lgrigoryeva@univ.kiev.ua, l.v.grigoryeva@gmail.com;

DYNAMICS AND STABILITY OF MAGNETIC SYSTEMS WITH SUPERCONDUCTING ELEMENTS

Grygor’yeva L.

In this talk, we focus on magnetic systems with Magnetic Potential Well (MPW) phenomenon manifestation [1]. The MPW is based on perfect electrical conductivity, depends neither on diamagnetism nor control. With certain geometrical restrictions on current carrying geometry of the MPW-based system being imposed, the said phenomenon makes magnetic levitation in the free rest or movement with “zero” electric losses possible. The MPW-definition for two constantly oriented coaxial closed superconducting loops signifies the following: their magnetic attractive force does not increase due to shortening the distance but decreases, becomes zero and changes into the repulsive magnetic force before the distance equals zero. A similar picture can be observed in a permanent magnet-closed zero resistant loop pair, as well as in multi-magnet systems.

The obtained mathematical models for dynamic magnetic systems based on the Magnetic Potential Well (MPW) phenomenon are discussed. These are the results of modeling for: (i) dynamic problem of magnetic pendulum, (ii) levitation problem of the system with magnetic interaction of the “ring-dipole” type, (iii) dynamic problem of magnetic multibody “garland”-type system in the gravitational field, etc. [2]. The approach for construction of mathematical model is based on analytical electromechanics, taking into account magnetic interaction, gravity forces, constancy of full magnetic fluxes coupled with superconducting elements, six degrees of freedom of free rigid magnetically interacting bodies, Newton-Euler or Lagrange methods for deriving equations of motion. Static and dynamic stability problems are investigated. The stability sufficient conditions are derived. The last can be satisfied by the MPW phenomenon manifestation and relevant selection of geometrical and magnetic parameters of the system.

The derived dynamic equations of motion for systems (i)-(iii) are essentially nonlinear. We review the numerical solutions of these nonlinear systems that are obtained and plotted along with phase portraits. Dynamic behavior of the said systems demonstrates features that have not been discussed before.

From the practical point of view the considered physical systems with electrodynamic superconducting phenomenon being observed are perspective for application in different engineering spheres as well. They proved to be efficiently applicable to development of scientific instruments (detectors, measuring elements) of high precision, systems with magnetic suspension, flywheel energy storage (FES) systems, etc. One may consider superconductive magnetic bearings (SMBs) [3] operating on the basis of the Magnetic Potential Well (MPW) phenomenon that can be effectively used to hold a high-speed flywheel yielding incomparably high energy storage. The essential increase of radial stiffness of such the magnetic bearing based on the MPW is observed in comparative study with other passive SMBs.

1. Kozorez V.V. Dynamic Systems of Free Magnetically Interacting Bodies / V.V. Kozorez. – Kiev: Naukova dumka, 1981. – 140 p.(in Russian)
2. Grygor’yeva L.V. Thesis Manuscript: Computer Technologies in Modeling of Free Magnets Dynamics. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2009. – 232 p. (in Ukrainian)
3. Grygor’yeva L.V. Maple-exploring of a Free Flywheel Suspended by Superconductive Bearing. / L.V. Grygor’yeva, V.V. Kozoriz // Maglev 2008: Proceedings of the 20th International Conference on Magnetically Levitated Systems and Linear Drives, San-Diego, USA, 2008.

Kozorez Vasyl Vasylyovych, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: vasyl.kozoriz@gmail.com;
Bhan Katherine, Ph.D.,
Kozoriz-Franklin California Maglev Inc.,USA,
e-mail: katyabhan@gmail.com
Halyna Franklin, Ph.D.,
Kozoriz-Franklin California Maglev Inc.,USA,
e-mail: mrs_halyna_franklin@yahoo.com

MAGNETIC POTENTIAL WELL AND LEVITATION

Kozorez V.V., Bhan K., Franklin H.

A new magnetic force phenomenon and how it assists magnetic levitation are represented.

The monotone decrease and its rate bring influence on the existence problem for static or dynamic configurations formed by corresponding kind of forces. In mathematical aspect this leads to the stability problem. In accordance with Earnshaw's theorem (see e.g. [1]), the stable free equilibrium by gravity or electric forces is unachievable because potential energies of these interactions vary inversely as the distance. This law satisfies the Laplace equation, and three second partial Cartesian derivatives cannot be positive as required for the equilibrium stability. Therefore, in order to achieve the stable free equilibrium one must search for a phenomenon excluding instability at least in one linear direction which is entailed by the Earnshaw's theorem manifestation. Two well-known concepts in this connection are reduced to automation and diamagnetism of a substance. In regard to the dynamic stability problem not covered by the Earnshaw's theorem, gravitational and electric forces allow the stable conservative dynamic configurations existence.

A relatively new result is the minimum of a pairwise magnetic potential energy as function of a distance or Magnetic Potential Well (MPW) phenomenon [2]. It is possible for two closed current-carrying zero resistance loops.

For two zero resistance loops, the necessary and sufficient conditions of the MPW existence are reduced to the equality between two ratios of magnetic loops linkages and mutual inductance at the MPW-position and self-inductance of a loop that magnetic linkage is greater. To be physically realizable, loops linkages must be non-zero and unequal by value.

As a levitation phenomenon, MPW assists yet does not guarantee the free body equilibrium or some motion stability. The free body stability problem cannot be investigated in the general case of loops current carrying configurations and mass geometry of a free body. Some known and new results about parameter space for thin superconducting rings, squares and rectilinear current carrying configuration for bodies mass center of which is shifted relative to a loop center are represented. They are based on the using Rumjantsev theorem [3] and software Maple allowing obtaining the Taylor series as Ljapunov function, and solutions of the complicated transcendental inequality systems that are equivalent to the free body equilibrium stability.

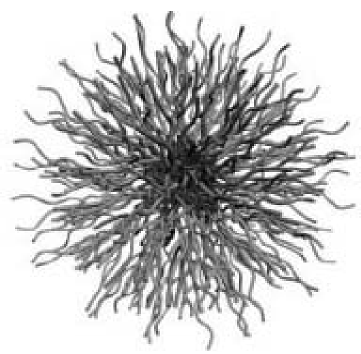
1. Смайт В. Электростатика и электродинамика. / В. Смайт. – М: Изд-во иностр. лит., 1959. – 604 с.
2. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. / В.В. Козорез. – Киев: Наукова думка, 1981. – 140 с.
3. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных / В.В. Румянцев // Вестн. Моск. ун–та (Серия «Математика»), №4, 1957. – с. 9-16.

Rushchitsky Jeremiah, Dr.Sci.(Phys.-Math.), Prof., Head of Department, Timoshenko Institute of Mechanics
e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

TO MODELING THE NANOCOMPOSITES "POLYMERIC MATRIX – BRISTLED KNEDEL-LIKE NANOGRANULES"

Rushchitsky J.J.

The paper is devoted to nanocomposites with fillers of unusual shape – the sphere-like nanogranules, which are covered densely by the long nanohairlets and are likewise the bristled balls [1,2]. The pioneer study of this topic is stated in the book [3] (section 4.3), where the structural model and procedures of evaluation of averaged elastic constants of such composites are offered. The present paper continues in some sense this study accenting the attention on numerical modeling and its comments. The nanoparticle in hand is called also in [2] the micelle. The term micelle was proposed in chemistry in 1913. Actually the micelle is marking in nanochemistry the type of colloid nanoclasters.



The picture shows the real polymeric micelle (*shell cross-linked knedel-like micelle* in terms of [2]), which consists of mixture of (50%-50% in weight) polymers PEG-*g*-PAA-*b*-(PPF-co-PS) and PFCE. The diameter of micelle is 22-26 nm.

The structural scheme of such a nanogranule is based on idealization of its geometrical and mechanical properties. Geometrically the granule is meant as the sphere of radius R_a, densely covered symmetrically thin fibers, diameter of which $2r_c$ is a few tens less of sphere radius and length l_c of which a few times exceeds the sphere radius.

When the nanocomposite being forming, the space among nanohairlets is filled by the matrix material. Owing to interaction among hairlets and matrix, the space between the sphere and matrix in the form of hollow sphere is filled by new material with intermediate properties. This hollow sphere is treated as the non-thin covering the granule core. As a result, the composite is assumed to be consist of 3 components. To evaluate the averaged volume k and shear μ moduli, the generalized on the case of three-component composite Christensen's scheme [3] is utilized.

The numerical modeling is carried out for the case, when the matrix material is the epoxy rosin EPON828 with following properties: $k = 4{,}47$ GPa, $\mu = 0{,}96$ GPa. It is assumed also that the hairlet length exceeds two times the radius of spherical granule-core and the elastic characteristics of core exceed the corresponding characteristics of matrix 30 or 100 times $k_a / k_m = \mu_a / \mu_m = 30;100$.

The feature of comments of numerical modeling is that both the fact of reinforcing the matrix by nanogranules, and increasing the volume fraction of nanogranules don't improve essentially the elastic properties of composite. But the fact of existence of big transient zone and thereby the better adhesion is interesting because it draws together the real situation with theoretical prediction.

Thus, the main advantage of polymer based composites reinforced by the bristled knedel-like nanogranules should be searched in the significant improvement of adhesion between the matrix and nanogranule, because the contact surface of bristled granule exceeds a few orders the contact surface of smooth granule.

1. Ladden S. Knedel-Like Nanoparticles//Math.-Wiss. und Werkstofftechnik. – 2009 – **40**,N3–P.45
2. Nystrom A.M., Bartels J.W., Du W.-J., Wooley K.I. Perfluorocarbon-Loaded Shell Cross-links Knedel-Like Nanoparticles: Lessons regarding Polymer Mobility and Self-Assembly // J. Poly mer Science: Part A: Polymer Chemistry. – 2009. – **47**. – P.1023-1037.
3. Guz A.N., Rushchitsky J.J., Guz I.A. Introduction to Mechanics of Nanocomposites. – Kiev: SP Timoshenko Institute of Mechanics, Akademperiodika, 2010. – 398p.

Semkiv Mykhailo Yaroslavovych Student
Taras Shevchenkon National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
e-mail: mishasemkiv@gmail.com;

WAVE PROPAGATION IN ELASTIC WAVEGUIDES WITH A FINITE LENGTH CRACK

Semkiv M. Y

In the presented work the propagation of SH-wave in elastic waveguides with infinite length crack in the case of free boundaries is considered. The complete analysis of diffraction of elastic waves on cracks of infinite length is performed. This problem was solved by the method of partial regions. Matching procedure reduce to the infinite system of algebraic equations for unknown amplitudes. This system is solved by the use of method of residues of analytical function. Residues method is based on calculating of integral as the sums of residues of analytical function $f(w)$ in the complex plane. Properties of function $f(w)$ determined by state of poles and zeros which are chosen so that the residue series coincide with the consideration system of equations. It is possible identify the unknown in the system of equations with the residues of function. A finite crack in elastic waveguides makes it necessary to solve additional infinite system of algebraic equations caused by shift of zeroes of function. Shift of function are solutions of an additional system. A displacement components of diffraction fields is obtained. The exact analytical solution on the base of the analytical functions methods is built. The reflection coefficient (the ratio of power flux of incident wave to the power flux of reflected wave) as well as transmission coefficient (the ration of power flux of incident wave to the power flux of transmission wave) are calculated. All of that was obtained for different wavelengths of incident wave. The graphs of reflection and transmission coefficients depending of dimensionless frequency were built. Number of members in the infinite products, which are includes in defined amplitudes, to ensure energy conversation law is defined.

Shyshkanova Ganna Anatolievna, Ph.D. (Phys.–Math.), Docent,
Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine,
e-mail: shganna@mail.ru

NONLINEAR DEFORMATION LAW OF ROUGHNESS IN THREE-DIMENSIONAL CONTACT INTERACTION OF CONVEX ANNULAR-RING PUNCHES

Shyshkanova G.A.

Contact problems in classical formulation are posed for smooth surfaces. In fact, contact between solids is discrete due to deviations of the surface geometry and roughness. Roughness is defined as a conglomeration of asperities with a small pitch relative to the base length. It forms a surface microgeometry which has a complex statistical character. The roughness influences contact characteristics: real pressure distribution, shape and sizes of contact domain, penetration value, internal stresses in subsurface layers, etc. To estimate these effects it is possible to consider power law of micro asperities deformation [1].

There are well-known solutions for smooth annular-ring [2] and circle parabolic punch [1]. However, three-dimensional contact interaction problems of convex ring punches with rough elastic half-space are not enough studied.

Numeric-analytical method is developed to solve contact problems of the convex annular-ring punches limited by different types of cylindrical, conic and parabolic surfaces with rough elastic half-space taking into account nonlinear roughness and friction laws. Unknown in advance functions of normal pressure distribution, sizes of contact domain and penetrations are obtained.

The problem reduced to the solution of the equilibrium equations system and an equation containing integrals with weak singularity, which is transformed to one-dimensional by the proposed in [2, 3] method for the annular domain. We come to the Hammerstein type integral equation in the case of nonlinear law of the roughness deformation. The direct method of successive iterations is used.

Computational method for the integral and the norm of the operator is used to specify parameter change interval, conditions of existence and unique solution. The convergence is proved and done on the boundaries also.

The consideration of additional displacement caused by the asperity penetration leads to disappearance of the singularity of the contact pressure at the cylindrical contour of the contact domain which occurs for the problem formulation neglecting the surface roughness. Taking into account power law of micro asperities deformation leads to more uniform definition of the normal pressure and increasing of the size of the contact domain.

1. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology / I.G. Goryacheva // Kluwer Academic Publishers, Dordecht/ Boston/London. - 1998. – 347 p.
2. Шишканова С.Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой / С.Ф. Шишканова // Прикладная механика. – 1990. – т.26. - №5. – С. 9-15.
3. Шишканова Г. А., Мелешко В. В. Розв'язання двовимірного інтегрального рівняння зі слабкою особливістю для двозв'язних областей / Г.А. Шишканова, В.В. Мелешко // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2007. –Вип. 5. – С. 178-185.

Smetankina Natalya Volodymyrivna, Cand. Tech. Sci., Senior Researcher of Department of Strength and Optimal Design of Structures
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, National Academy of Sciences of Ukraine, 2/10 Dm. Pozharsky St., Kharkiv, 61046, Ukraine
e-mail: nsmetankina@yandex.ru
Smetankin Volodymyr Oleksandrovych, Cand. Tech. Sci., Professor of Chair of Higher Mathematics and Physicss
Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, 44 Artem St., Kharkiv, 61002, Ukraine
e-mail: vsmetankin@yandex.ru

VIBRATION AND OPTIMAL SYNTHESIS OF LAMINATED SHELLS AT IMPULSE LOADING

Smetankin V.O., Smetankina N.V.

Laminated composite plates and shells are widely used in modern aerospace, naval and other fields of engineering. Theories of laminated composite plates and shells are constructed more often on hypotheses for a whole package as to classical Kirchhoff hypotheses, that at investigation of dynamic behavior of structural composite elements results in significant inaccuracies [1]. The present work offers a method for investigation of non-stationary vibrations of laminated cylindrical composite shells with the complex plan form based on the kinematical hypotheses taking into account in each layer transverse shear strains and rotary inertia of a normal element. The equations of motion of shells and boundary conditions are obtained from the Hamilton's variational principle. The technique of a solution of the problem is founded on the immersion method [2]. The initial shell is immersed into an auxiliary simply supported shell with the rectangular plan form and the same composition of the layers. This shell is loaded by the same way as an initial shell. The given boundary conditions are implemented by an application to the auxiliary shell of additional compensatory loadings. The sought-for functions of the problem are expanded into trigonometrical series in domain of the auxiliary shell and along the contour of the given shell. As a numerical result, simply supported cross-ply shells at an impulse loading are examined. The contour of shells is described by equations of quadratic curves. Results of calculation are compared with the data obtained by other methods. The problem of the mass minimization of cylindrical laminated cross-ply shells at impulse loading is solved. As an optimization method, the hybrid search optimization method with adaptive control of computing process is used [3]. Effect of a radius of curvature on the optimum design of a shell is investigated.

1. *Carrera E.* Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev. -- 2003. -- **56**, № 3. -- P. 287-308.

2. *Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G.* A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. -- 2008. -- **75**, № 5. -- P. 051004-1-051004-9.

3. *Шупиков А.Н., Бузько Я.П., Сметанкина Н.В., Угримов С.В.* Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. -- Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004. -- 252 с.

Анпилогов Дмитрий Игоревич,
Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина,
e-mail: anpilogov@ua.fm

АНАЛИЗ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В КОЛЬЦЕВОМ СЕКТОРЕ

Анпилогов Д.И.

Актуальной задачей остаётся анализ напряжённо-деформированного состояния (НДС) различных элементов механических конструкций с повреждениями. НДС цилиндрической оболочки при равномерном распределении внешних изгибающих моментов вдоль образующих можно получить, решая плоскую задачу теории упругости для сечений оболочки – кольцевых секторов. Такая задача может быть решена методом конформных отображений, изложенным в [1]. Функции, совершающие требуемые конформные отображения, построены в [2]. Поле перемещений, полученное с использованием этих функций, проанализировано в [3]. Однако, поле напряжений не исследовано.

В настоящей работе построено поле напряжений. Проанализировано распределение напряжений вдоль радиального сечения кольцевого сектора. Показано, что напряжения в радиальных направлениях малы по сравнению с напряжениями в окружных направлениях. Найдено положения нейтрального слоя. В качестве критерия нейтральности слоя принято равенство нулю напряжений в окружных направлениях. Установлено, что радиус нейтрального слоя меньше срединного радиуса кольцевого сектора. Построена зависимость положения нейтрального слоя от относительной толщины кольцевого сектора. Показано, что полученные результаты находятся в соответствии с аналогичными результатами, получаемыми методами сопротивления материалов при исследовании чистого изгиба криволинейного бруса.

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости: [изд. 5-е, испр. и доп.] / Н.И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
2. Анпилогов Д.И. Построение конформного отображения кольцевых секторов на единичный круг / Д.И. Анпилогов // Вестн. Харьк. нац. ун-та. Сер. «Матем., прикл. матем. и мех.». – 2007. – № 790, вып. 57. – С. 146-157.
3. Анпилогов Д.И. Расчёт относительного уменьшения жёсткости повреждённого кольцевого сектора на основе анализа поля перемещений/ Д.И. Анпилогов // Прикладная механика. – 2010. – № 8. – С. 90-105.

Бабаев Арташес Эдуардович, д-р техн. наук,
Янчевский Игорь Владиславович, канд. техн. наук,
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, Киев, Украина,
e-mail: artashes@i.com.ua

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СЕКЦИОНИРОВАННЫМ ТОКОПРОВОДЯЩИМ ПОКРЫТИЕМ

Бабаев А.Э., Янчевский И.В.

В последние годы большое внимание уделяется развитию методов управления, основанных на использовании конструктивных элементов, обладающих электроупругими свойствами. Обзор достижений по данной проблематике можно найти в ряде монографий, в частности [4]. В настоящем докладе изложен подход к управлению неосесимметричными колебаниями упругой бесконечно длинной оболочки с помощью дополнительного пьезокерамического слоя, на внешнюю поверхность которого нанесены секционированные токопроводящие покрытия, равномерно распределенные по сечению оболочки. Использование электродированных секций пьезослоя в качестве актуаторов позволяет оказывать непосредственное механическое воздействие электрическим путем и управлять колебаниями исследуемой оболочки. Постановка задачи состоит в определении конфигурации электрического сигнала, который требуется подвести к внешним электродам для обеспечения радиальных перемещений некоторой точки оболочки по наперед заданному закону. При этом считается, что сплошное внутреннее покрытие поддерживается на нулевом потенциале. Управление нестационарными колебаниями одномодового цилиндрического пьезопреобразователя (со сплошными электродными покрытиями), в частности для формирования волны давления заданного профиля, рассмотрено в работе [1].

В предположении справедливости классических гипотез Кирхгофа-Лява, обобщенных на случай электромеханики, получены система дифференциальных уравнений относительно перемещений точек поверхности приведения биморфной оболочки и электрические граничные условия.

При решении задачи применяется интегральное преобразование Лапласа по временной переменной. В пространстве изображений неизвестные функции ищутся в виде рядов по собственным формам колебаний. После решения исходных уравнений движения относительно искомых коэффициентов разложения и удовлетворения граничным условиям аналитически выполнен переход в пространство оригиналов. В результате рассматриваемая задача сведена к решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра. Ее решение выполнено численно с использованием итерационного метода последовательных приближений [2] и регуляризирующего алгоритма А.Н. Тихонова [3]. Проведены оценки влияния геометрических параметров оболочки и угловых размеров секционированных электродов на качество управления.

1. Бабаев А.Э. Излучение акустических импульсов заданного профиля электроупругой цилиндрической оболочкой / А.Э. Бабаев, В.Г. Савин, Ю.В. Кожемяка // Теор. и прикл. мех. – 2001. – Вып. 33. – С. 186–191.
2. Кубенко В.Д. Осесимметричная задача удара затупленного твердого тела о поверхность сжимаемой жидкости с учетом отлипания / В.Д. Кубенко, В.В. Гавриленко // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 9–16.
3. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
4. Choi S.-B. Piezoelectric actuators: control applications of smart materials / S.-B. Choi, Y.-M. Han. – N.-Y.: CRC Press, 2010. – 280 p.

Баранова Полина Николаевна, аспирант,
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.
e–mail: karibsk@birmir.net

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ В ТОНКОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ ОДНООСНОМ СИММЕТРИЧНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

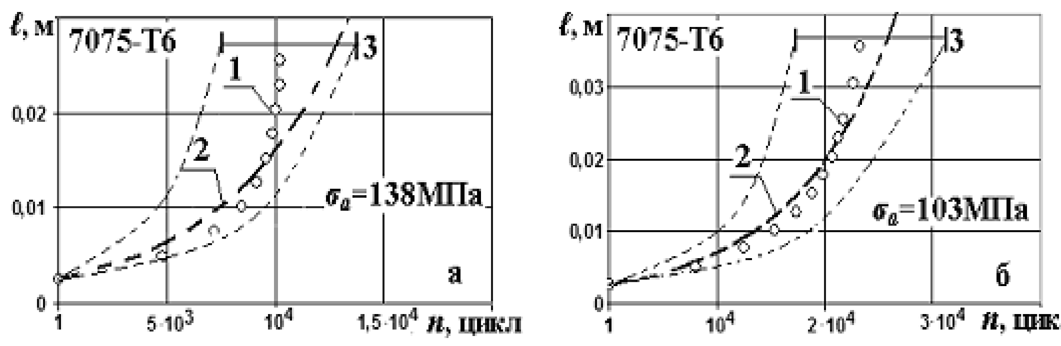
Баранова П.Н.

Строится модель роста усталостной трещины в тонкой изотропной пластине конечных размеров при одноосном симметричном многоцикловом растяжении-сжатии виде зависимости числа циклов нагружения n от длины усталостной трещины ℓ. Основные уравнения модели, полученные из совместного решения краевой задачи теории упругости с подвижной границей и эволюционного уравнения накопления усталостных повреждений, имеют вид [1]

$$\begin{cases} \dfrac{d\ell}{dn} = \left(1+\dfrac{1}{q}\right) D \left(\dfrac{4\sigma_Y}{\pi}\right)^{q-2} \left[\sigma_a \cdot f\left(h/W, \ell/W\right)\right]^2 \ell \\ n_* = \dfrac{1}{(1+q)D}\left(\dfrac{\pi}{4\sigma_Y}\right)^q \end{cases}, \qquad (1)$$

где n_* - длительность инкубационного периода; ℓ_0 - начальная полудлина трещины; σ_a - амплитудное напряжение; σ_Y - предел текучести материала; материальные константы D и q, определяемые из стандартных испытаний на усталость гладких цилиндрических образцов; W - ширина; h - длина пластины; $f(h/W;\ell/W)$ корректирующая функция, учитывающая конечные размеры пластины.

Результаты расчетов (рис.1), выполненные по модели (1) входят в доверительные интервалы, построенные по экспериментальным данным, с 90% вероятностью. Экспериментальные данные заимствованы из [2].



а

Рис. 1. Зависимость длины трещины от числа циклов нагружения в алюминиевом сплаве 7075-T6 при напряжениях σ_a =103 МПа (а), 69 МПа (б) (кривые (1(○)) - экспериментальные данные, (2(− −)) - расчет, (3(·−·)) - доверительный интервал).

1. Golub V.P., Plashchynska A.V. A Phenomenological model of fatigue crack growth in perfectly-plastic infinite plates under completely reversed uniaxial loading// Прикладная механика, 2005, Том 41, №12 с.116-127.

2. Hudson C.M. Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 and 2024-T3 aluminum-alloy specimens // NASA TN D-5390, 1969- P.34.

Барсегян Ваня Рафаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения,
e-mail: barseghyan@sci.am; barsegh@ysu.am

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОГИБА УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В НЕПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Барсегян В.Р.

Теория оптимального управления и наблюдения системами с распределенными параметрами непрерывно расширяет область приложения. Для осуществления оптимального управления динамическими системами необходимо знать текущее состояние процесса, которое с помощью непосредственных измерений точно определить невозможно. Так как, во первых, не все переменные возможно измерять и, во вторых, кроме полезного сигнала измеряемые переменные содержат погрешности. В таких случаях возникает необходимость восстановления характеристик движения системы с наибольшей точностью.

В настоящей работе рассматривается поперечное колебательное движение пластинки-полосы со связанной задачей теплопроводности, уравнения, которого берется на основании классической постановке [1,2]. Предполагается, что наблюдаемый реальный сигнал связан с температурой пластинки-полосы и погрешностью (ошибки) измерения [3].

Требуется по известному наблюдаемому сигналу восстановить прогиб пластинки-полосы в любой момент времени для всех точек, каковым бы не было реализовавшееся в процессе движения значение прогиба пластинки-полосы.

Методом разделения переменных решение задачи оптимального восстановления прогиба управляемого движения термоупругой пластинки-полосы (связанная задача) при наличии погрешностей в измерениях температуры приводится к решению задачи наблюдения движением с реальным сигналом бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для каждой гармоники, специальным образом усиливая поступающий сигнал [3], строится универсальная оптимальная операция, позволяющая восстановить прогиб всех точек пластинки-полосы в любой момент времени. Показан сходимость полученных рядов.

1. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. -Москва: Мир, 1970. - 256 с.
2. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Об одной задаче управления движением термоупругой пластинки-полосы. //Изв. НАН РА, Механика. -1995. т. 48, N 3, с.15-22.
3. Барсегян В.Р. Задача оптимального восстановления состояния систем с распределенными параметрами при наличии погрешностей в неполных измерениях. //Изв. НАН РА, Механика. -2004. т. 57, N1, с.70-75.

Безымянная Эллина Николаевна, аспирант,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: e.bezymyana@gmail.com

АДВЕКЦИЯ ЖИДКОСТИ ЭЛЕКТРО-ОСМОТИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ В СОВРЕМЕННЫХ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

Безымянная Э.Н.

Развитие микроэлектронных систем в химической промышленности сформировало повышенный интерес многих исследователей к проблемам переноса жидкостей в микроканалах. Примером перспективной разработки в современных технологиях является химический микропроцессор, предназначенных для электронной поддержки реакции полимеризации при производстве новых материалов с улучшенными физическими свойствами. Важным процессом в таких устройствах является перемешивание растворов жидкостей, которое осуществляется за счет внешнего электрического поля [1]. При этом в прилегающем к электродам слое (Дебаевский слой), возникает наведенное электрическое поле, направленное по касательной к границе. Оно приводит к образованию объемной силы, действующей на прилегающую к электродам жидкость.

Принимая во внимание аналогию между электро-осмотичними и гидродинамическими течениями [1], данную задачу можно свести к двумерной задаче о течении вязкой несжимаемой жидкости внутри прямоугольной полости с подвижными границами (рис.1). Анализ масштабов течения показывает, что диффузионные эффекты являются незначительными и, при условии одинаковости физических свойств перемешивающихся растворов, решение задачи к анализу процесса деформации выделенных объемов пассивной жидкости в заданном поле скорости. Такая задача в современной литературе получила название "задача об адвекции" [2].

Целью работы является изучение основных закономерностей процесса адвекции пассивной примеси двумерном течении, сформированном при периодическом движении частей верхней и нижней границ прямоугольной полости в приближении Стокса ($Re \to 0$).

В работе получены аналитические выражения для функции тока в виде суперпозиции четырех задач с симметричным и несимметричным распределением поля скорости течения по обоим направлениям границ методом улучшенной редукции [3].

Анализ траекторий движения пассивной жидкости и сечения Пуанкаре показывает, что периодическое движение границ приводит к хаотизации течения в полости и, как следствие, к интенсивным режимам адвекции. В докладе показано, что наиболее интенсивными зонами адвекции являются области течения, прилегающие к гиперболическим периодическим точкам течения разного порядка. Сравнение результатов численного моделирования процесса адвекции выделенной жидкости с данными лабораторных экспериментов находятся в хорошем соответствии.

1. Stone H.A., Stroock A.D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2004. – **36**. – P.381-411.
2. Ottino J.M. The kinematics of mixing: Stretching, chaos and transport. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 364 p.
3. Мелешко В.В., Гуржій О.А., Безим'янна Е.М. Електро-осмотичні течії в'язкої рідини в прямокутній порожнині // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – **50**, № 1. – С.107-116.

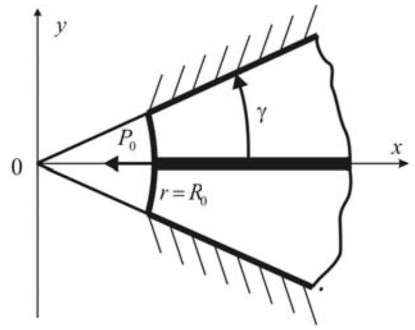
Белова Оксана Викторовна, ассистент
Национальная Металлургическая Академия Украины, Днепропетровск, Украина
e-mail: okbelova@rambler.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ И СТЕРЖНЯ

Белова О.В.

Методы малого параметра не теряют своей значимости на фоне бурного развития численных методов, так как часто являются основой для разработки последних. Контактные задачи для ортотропных тел с криволинейной анизотропией (из-за математических сложностей их решения) на сегодняшний день еще мало исследованы. А применение асимптотических методов позволяет получить обоснованные приближенные уравнения, выяснить качественные закономерности и получить аналитические решения задач.

На применении одного из таких методов основано решение задачи о передаче нагрузки упругим одномерным стержнем ортотропной пластине с криволинейной анизотропией.



Упругая пластина $R_0 \le r < \infty, -\gamma \le \theta \le \gamma$ закреплена по кромкам $\theta = \pm\gamma$. Граница $r = R_0$ остается свободной, на бесконечности напряжения и перемещения отсутствуют. Вдоль серединного радиуса ($\theta = 0$) пластина усилена стержнем, который в граничной точке $r = R_0$ нагружен продольным усилием P_0. Материал пластины является ортотропным, главные направления анизотропии совпадают с полярными координатами r, θ. Требуется определить законы изменения усилия в стержне, усилия взаимодействия между стержнем и пластиной, а также напряжений в пластине.

Вопрос о напряженно-деформированном состоянии упругой анизотропной пластинки сводится к интегрированию уравнений равновесия пластины при соответствующих граничных условиях. Асимптотический метод, разработанный авторами [1,2] на основе метода возмущений, позволяет расчленить напряженно-деформированное состояние пластины на две составляющие, причем каждая из них находится при последовательном решении краевых задач теории потенциала. Связь между состояниями первого и второго типов осуществляется через граничные условия. Решение исходной задачи определяется как суперпозиция указанных составляющих.

1.Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела/ // Киев-Донецк: Вища школа. – 1982.

2.Павленко А.В., Кагадий Т.С. О напряженном состоянии волокнистого композита с трещиной// Проблеми механіки міцності конструкцій–Д., 1999,Т.5, с.151-160.

Бернакевич Ірина Євстахіївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
ЛНУ імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: ibernakevych@gmail.com;
Вагін Петро Петрович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
ЛНУ імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: vahin@franko.lviv.ua;
Шот Ірина Ярославівна, аспірант,
ЛНУ імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: ira_shot@yahoo.com

ПРО СТІЙКІСТЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА СТИСНЕННЯ

Бернакевич І.Є., Вагін П.П., Шот І.Я.

Розвиток сучасних технологій машинобудування та обчислювальної техніки призвів до появи нових моделей розрахунку складних оболонкових конструкцій. Підходи до розрахунків таких конструкцій на даний момент в основному базуються на чисельних методах, заснованих, зокрема, на варіаційних постановках розглядуваних задач.

Виходячи із співвідношень геометрично нелінійної теорії тонких оболонок податливих на зсув та стиснення (шестимодальний варіант), записано ключові співвідношення для визначення початкового післякритичного стану гнучких оболонок методом скінченних елементів. Основна особливість застосованого підходу полягає в тому, що за основу взята гіпотеза оболонок типу Тимошенка, згідно якої нормальний елемент недеформованої оболонки після її навантаження залишається прямолінійним, і узагальнена в тому сенсі, що цей елемент може змінювати свою довжину і може не бути ортогональним до деформованої серединної поверхні.

Результуючі співвідношення моделі містять невідомі компоненти вектора узагальнених переміщень серединної поверхні $u=(u_1,u_2,u_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$. Деформаційні співвідношення даної теорії оболонок пов’язують переміщення серединної поверхні оболонки з тангенціальними та згинними компонентами тензора деформацій Гріна. Варіаційним методом отримані рівняння рівноваги гнучких оболонок податливих на зсув та стиснення та відповідні природні крайові умови. Щоб отримати замкнену систему, яка описує процес нелінійного деформування оболонки, додаються співвідношення, що пов’язують деформації з внутрішніми зусиллями і моментами.

У випадку деформування оболонок під дією зовнішніх навантажень, пропорційних одному параметру λ, повні переміщення в початковому післякритичному стані u_* визначаються у вигляді суми переміщень початкового (докритичного) стану u_0 і збурених переміщень u:

$$u_* = u_0 + \alpha u, \quad 0 < \alpha \ll 1. \tag{1}$$

Рівняння стійкості записуються у вигляді

$$K_u(0) + \lambda G(q_0) = 0. \tag{2}$$

Тут $K_u(q_i)$ – матриця переміщень, $G(q_i)$ – геометрична матриця жорсткості або матриця початкових напружень, q – матриця-стовбець невідомих вузлових переміщень і поворотів.

Найменше власне значення рівняння (2) визначає критичний параметр навантаження λ^*, при якому оболонка з початкового стану рівноваги переходить у суміжний.

Чисельно розв’язана задача про стійкість затисненої по контуру круглої пластини, яка знаходиться під дією радіальних рівномірно розподілених уздовж контуру стискувальних зусиль. Проведено порівняльний аналіз отриманих чисельних розв’язків з розв’язками, наведеними в літературі.

Богун Роман Игоревич, младший научный сотрудник,
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: r.bogun@i.ua

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНЫХ КОНТЕЙНЕРАХ, СВОБОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КОТОРОЙ ПОКРЫТА УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Богун Р.И.

Доклад посвящен исследованию взаимодействия идеальной и несжимаемой жидкости в подвижных полостях с конструктивными устройствами в виде плоских упругих пластин или гибких мембран, покрывающих свободную поверхность жидкости и жестко закрепленных на стенках контейнера.

На основе основных положений линейной теории движения тел с полостями построена общая линейная математическая модель движения системы, которая формализована в виде некоторой системы дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат, характеризующих движение жидкости, упругого элемента и твердого тела. Определение коэффициентов уравнений движения связано с решениями однородной граничной задачи о собственных колебаниях системы "жидкость-упругий элемент" и неоднородной задачи для потенциала Стокса-Жуковского. Для построения приближенных решений неоднородной задачи широкое применение получил метод, основанный на ее эквивалентной вариационной постановке с последующим применением метода Трефтца.

Для определения решений задачи гидроупругости о собственные колебания жидкости в осесимметричном резервуаре с рассматриваемыми конструктивными устройствами предложено два подхода. Первый подход базируется на построении приближенного решения задачи с использованием решений вспомогательно введенной последовательности неоднородных граничных задач Неймана для уравнения Лапласа в области, которую занимает жидкость. Второй подход основан на использовании разложения по собственным функциям вспомогательно введенной спектральной задачи с параметром в граничном условии. В результате в обоих случаях исходная задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению относительно прогиба упругого элемента, для решения которого используется обобщенный метод Бубнова-Галеркина, после применения которого исходная задача гидроупругости сводится к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения.

Для нахождения необходимого количества собственных функций и собственных значений вспомогательно введенной спектральной задачи предложено модификацию метода В.П. Шмакова. По физическому содержанию эта задача связана с исследованием несимметричных колебаний жидкости со свободной поверхностью в рассматриваемом резервуаре.

Для случая резервуара в форме прямого кругового цилиндра с произвольным осесимметричным дном построено точное решение полученного выше интегро-дифференциального уравнения. В результате исходная задача сведена к решению трансцендентного уравнения.

Все предложенные подходы для случая осесиметричного резервуара распространены на случай длинного канала с произвольным симметричным поперечным сечением.

На основе полученных результатов решены конкретные задачи, на которых проанализирована сходимость предложенных алгоритмов, а также выявлены основные закономерности влияния рассматриваемых конструктивных устройств на динамическое поведение жидкости в подвижных и неподвижных резервуарах.

Бойчук Олена Володимирівна, кандидат фіз. – мат. наук, старший викладач
Миколаївський державний університет ім. В.О.Сухомлинського, Миколаїв, Україна,
e-mail: boychuklena@rambler.ru;
Оксенчук Ніна Дмитрівна, аспірант відділу термопружності,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: term@inmech.kiev.ua;

РОЗРАХУНОК ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ В ПІВПРОСТОРІ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ ТЕРМОМЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Бойчук О.В., Оксенчук Н.Д.

Розглядається динамічна задача про навантаження півпростору $z \geq 0$ імпульсами теплового потоку і тиску. Непружна механічна поведінка матеріалу описується уніфікованою моделлю течії Боднера-Партома, в якій враховується ізотропне зміцнення і залежність властивостей матеріалу від температури. Задача для півпростору зводиться до осесиметричної задачі для пів скінченного кругового циліндра з гладкими умовами на бічній поверхні. Задача розв'язується кроковим методом за часом в поєднанні з ітераційним процесом на кожному часовому кроці і методом скінченного елемента. Використовується чотирикутний ізопараметричний скінченний елемент. Еволюційні рівняння моделі течії інтегруються за часом неявним методом Ейлера другого порядку, а рівняння руху і теплопровідності–неявним методом Ньюмарка. В якості матеріалу півпростору розглядається сталь 35ХМА. Параметри моделі течії визначаються на основі експериментальних даних. Використовувались діаграми ізотермічного розтягу в інтервалі температур $20^0 C \leq \theta \leq 1000^0 C$

Параметри навантаження визначаються максимальними значеннями теплового потоку $q_{\max} = 2 \cdot 10^{11}$ кВт/м^2 и тиску $p_{\max} = 8$ ГПа в імпульсі тривалістю $t_p = 10^{-8}$ с.

Процеси зумовлені такими параметрами навантаження супроводжуються генерацією хвиль напружень. Залишкові напруження виявляються після проходження хвиль вглиб півпростору. Встановлено, що при дії тільки термічного імпульсу в при поверхневому шарі півпростору товщиною $\delta_\theta = 10^{-6}$ м формуються залишкові колові і радіальні напруження розтягу із значеннями біля 1,6 ГПа. При дії імпульсу тиску вказані напруження є стискаючими і діють в шарі товщиною $\delta_p = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м і дорівнюють –1,5 ГПа. Розподіл напружень при одночасній дії термічного і механічного імпульсів відображає їх суперпозицію і має двомасштабну структуру, в якій в шарі $0 \leq z \leq \delta_\theta$ мають місце напруження 0,3 ГПа, а в шарі $\delta_\theta \leq z \leq \delta_p$ діють напруження стискання –1,5 ГПа.

Розвинуті методики розрахунку і отримані результати можуть бути використані для моделювання процесів лазерної імпульсної поверхневої обробки деталей машин, зокрема наклепі.

Ванько Вячеслав Иванович, д.т.н.,
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Москва, Россия,
e-mail: vvanko@mail.ru

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПОД ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ: НЕКЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Ванько В.И.

В статьях [1,2] решалась задача о больших перемещениях точек срединной поверхности бесконечно длинной круглоцилиндрической оболочки (кольца) под действием внешнего гидростатического давления. Процесс деформирования удалось проследить вплоть до полного сплющивания благодаря принятой кинематической схеме: рассматривая четверть поперечного сечения оболочки (в силу симметрии относительно осей OX, OY), аппроксимируем форму поперечного сечения сопряжением двух окружностей радиусов R_1 и R_2; радиус R_1 увеличивается в процессе деформирования, R_2 – уменьшается (в условиях ползучести [1], либо при квазистатическом увеличении давления [2]); принимая точку, в которой изгибающий момент обращается в нуль за точку сопряжения окружностей, сводим задачу к решению системы двух ОДУ первого порядка относительно радиусов R_1 и R_2.

Рассматривая оболочку конечной длины, введем систему декартовых координат OXYZ с началом в центре срединного сечения, плоскость которого есть OXY, OZ направлена по оси оболочки, $-L/2 < z < L/2$. Считаем, что под действием давления оболочка в плоскости OYZ «вминается», в плоскости OXZ – выпучивается, причем в этих плоскостях оболочка ведет себя как безмоментная [3].

Процедура решения строится методом коллокации по срединному сечению: рассматриваем кольцо единичной длины (по OZ), на которое наряду с внешним давлением (как в [1] и [2]) действуют распределенные усилия вследствие растяжения образующих цилиндра. Для малых перемещений удается получить формулы для критического давления, мало отличающиеся от соответствующих формул Мизеса, [4] – упругая оболочка, и для критического времени – в случае выпучивания в условиях ползучести.

Изучается влияние параметров длины (L/R), толщины (h/R), а также краевых условий на процесс деформирования.

1. Ванько В.И., Шестериков С.А. Сплющивание кольца в условиях ползучести // Инж. ж-л. Механика твердого тела. – 1966. – №5. – 127-130.
2. Алиев Р.А., Ванько В.И., Шестериков С.А. Нелинейно-вязкие цилиндрические оболочки под внешним давлением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – №1. – 199-202.
3. Власов В.З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. – М.: Стройиздат. – 1949. – 474с.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.: ГИТТЛ. – 1955. – 567с.

Васильєва Лариса Яківна, старший викладач кафедри математики,
Миколаївський національний університет
e-mail: support@ukrlib.com.ua;
Жук Ярослав Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник,
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна,
e-mail: y_zhuk@inmech.kiev.ua

ВПЛИВ МІКРОСТРУКТУРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ НА ЗАЛИШКОВИЙ НДС СТАЛЕВОГО ДИСКУ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ ТЕПЛОВОМУ ОПРОМІНЕННІ

Васильєва Л.Я., Жук Я.О.

Розглядаються структурні перетворення в диску, виготовленому з мартенситної сталі 35ХМ, який перебуває під дією короткого теплового імпульсу. Розв’язується модельна задача про опромінення центральної частини торця диску лазерним імпульсом або пучком заряджених часток. Інтерес до таких задач зумовлений визначенням раціональних технологічних параметрів процесів зміцнення поверхонь металічних деталей. Особливу увагу приділено опису мікроструктурних перетворень в області дії теплового імпульсу.

Розглядається круговий циліндр радіусу R, довжина якого дорівнює L. На торці $z = 0$ діє короткий тепловий імпульс, який задається тепловим потоком через границю. Вся поверхня диску, включаючи торці, вважається теплоізольованою і вільною від напружень. Розв’язується модельна осесиметрична задача для випадку $R >> L$ (тонкий круговий диск).

Використовується термомеханічна модель фізично нелінійної поведінки матеріалу, що описує як пружну, так і непружну реакцію матеріалу при великих швидкостях деформування. Для адекватного якісного і кількісного описання мікроструктурних перетворень виконана модифікація моделі, яка ґрунтується на використанні термокінетичних діаграм перетворення переохолодженого аустеніту і температурних залежностей об’ємного вмісту мікроструктурних фаз [1]. Крім рівнянь моделі постановка задачі містить співвідношення Коші для осесиметричного випадку, рівняння руху, рівняння теплопровідності, а також відповідні початкові і граничні умови [1].

Задача є суттєво нелінійною. Вона розв’язується чисельно з використанням схеми Кренка-Нікольсона, ітераційного методу і метода скінченних елементів. Розрахунок концентрації фаз розпаду переохолодженого аустеніту виконується за допомогою термокінетичної діаграми і співвідношень для питомих об’ємів фаз. Розроблена методика чисельного розв’язання задачі з врахуванням мікроструктури матеріалу дозволяє точніше оцінити залишковий напружено-деформований стан в глибині опроміненої зони, де важко провести експериментальні вимірювання, і визначити геометричні розміри області впливу мікроструктурного перетворення. Досліджено вплив мікроструктурних перетворень, які супроводжують розігрів внаслідок опромінення й наступного охолодження, на залишковий НДС, а також загальні закономірності зв’язаної термомеханічної і динамічної поведінки диска. Врахування мікроструктурних перетворень виявляється необхідним також при описанні процесів генерації імпульсів напружень при опроміненні тепловим імпульсом.

1. Васильева Л.Я., Жук Я.А., Сенченков И.К., Червинко О.П. Особенности генерации упругих волн при тепловом облучении стального образца и учете аустенитно-мартенситного преобразования // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 98-103.

Венгерський Петро Сергійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
ЛНУ імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: p_vengersky@lnu.edu.au
Коковська Ярина Володимирівна, аспірант, факультет прикладної математики та інформатики,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: yaryna.kokovska@gmail.com

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУСЛОВОГО СТОКУ РІДИНИ В НАБЛИЖЕННІ КІНЕМАТИЧНОЇ ХВИЛІ

Венгерський П.С., Коковська Я.В.

Переміщення водних мас в руслах рік часто відбувається в умовах рівноваги сил опору та сили тяжіння. Такий рух має вигляд хвиль, які виникають внаслідок зміни в часі складових водного балансу і тому Лайтхілл та Уізем [1] назвали їх кінематичними. На відміну від динамічних хвиль, які можуть поширюватися як вниз, так і вверх за течією, кінематичні хвилі поширюються тільки вниз за течією. Тому в даній роботі розглянуто русловий стік з врахуванням кінематичних хвиль.

Тоді рівняння стоку води мають вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{3}{2}C\sqrt{iF}\,\frac{\partial F}{\partial x}=BR, \qquad (1)$$

Для регуляризації розв’язку до рівняння (1) додамо другу похідну по площі поперечного перерізу потоку, в результаті отримаємо

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{3}{2}C\sqrt{iF}\,\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=BR, \qquad (2)$$

де $F=F(x,t)$ - площа поперечного перерізу;
$B=b(x,y)-a(x,y)$ – ширина русла;
R – бічний притік;
Re - число Рейнольдса;
i – нахил лінії дна.
Доповнимо рівняння (2) початковими та крайовими умовами

$$F_{t=0}=F_0,$$
$$\left.\left(-\beta\frac{\partial F}{\partial x}+(1-\beta)F\right)\right|_{x=0}=0,$$
$$\left.\left(\gamma\frac{\partial F}{\partial x}+(1-\gamma)F\right)\right|_{x=L}=0, \quad \gamma,\beta>0.$$

і отримаємо початково-крайову задачу для знаходження невідомої функції F.

Побудована задача розв’язувалася методом скінченних елементів. Для цього була сформульована варіаційна постановка задачі, проведено напівдискретизацію задачі за часовою та просторовою змінними з використанням кусково-лінійних базисних функцій. Результати протестовано на багатьох прикладах зі складним рельєфом середньої лінії дна русла, також проведено порівняння результатів обчислень з розв’язками такої задачі у гідродинамічному підході.

1. Lighthill M. J., Whitham C. M. On kinematic waves // Flood movement in long rivers. – 1955. – Ser. A, No. 229 – P.281-316.

Вестяк Владимир Анатольевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Московский Авиационный Институт (Государственный Технический Университет), Москва, Российская Федерация,
e-mail: v.a.vestyak@mail.ru ;
Садков Антон Сергеевич, аспирант факультета «Системы управления, информатика и электроэнергетика»,
Московский Авиационный Институт (Государственный Технический Университет), Москва, Российская Федерация,
e-mail: thotamon@gmail.com

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОБЪЁМНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Вестяк В.А., Садков А.С.

В прямоугольной декартовой системе координат рассматривается однородная упругая изотропная полуплоскость, уравнения движения которой имеют вид (точками обозначено дифференцирование по времени τ):

$$\ddot{u} = L_{11}(u) + L_{13}(w) + F_1, \ddot{w} = L_{31}(u) + L_{33}(w) + F_3, \quad (1)$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^{-2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}, L_{13} = L_{31} = \kappa_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, L_{33} = \eta^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где $u(x,z,\tau)$ и $w(x,z,\tau)$ - перемещения вдоль осей Ox и Oz; F_1 и F_3 - координаты вектора объемной силы; Δ - оператор Лапласа.

На границе полуплоскости возмущения отсутствуют. Для определенности положим, что она абсолютно жестко защемлена, на бесконечности возмущения так же отсутствуют, а начальные условия нулевые. Здесь и далее использованы безразмерные величины.

Решение этой начально-краевой задачи удобно представить в интегральном виде (звездочки означают свертки по координате *x* и времени):

$$u(x,z,\tau) = \int_0^\infty G_{11}(x,z,\xi,\tau) ** F_1(x,\xi,\tau)\,d\xi + \int_0^\infty G_{13}(x,z,\xi,\tau) ** F_3(x,\xi,\tau)\,d\xi \quad (2)$$

$$w(x,z,\tau) = \int_0^\infty G_{31}(x,z,\xi,\tau) ** F_1(x,\xi,\tau)\,d\xi + \int_0^\infty G_{33}(x,z,\xi,\tau) ** F_3(x,\xi,\tau)\,d\xi$$

Здесь $G_{kl}(k,l=1,3)$ - функции Грина – ограниченные решения начально-краевых задач, соответствующих заданным начальным условиям.

Наряду со сформулированной задачей рассмотрим следующую: в прямоугольной декартовой системе координат расположена однородная упругая изотропная полуплоскость, внутри которой расположена односвязная полость Π, при этом контур $\partial\Pi$ задан параметрически. Будем искать такие функции $F_i(i=1,3)$ которые соответствуют начальным условиям при помощи ранее вычисленных функций Грина. Так как такая задача имеет бесконечное множество решений, то будем считать, что $\tilde{\varphi}_i(\chi,\tau)$ - это массовые силы $F_i(i=1,3)$, но действующие на границе полости Π. Сформулированная задача при помощи представления (2) приводит к системе интегральных уравнений. Полученные интегральные уравнения при помощи построенной разностной схемы приводятся к системам линейных уравнений относительно значений массовых сил на сетке. При этом матрицы полученных систем - блочные, нижние треугольные из блоков $2X2$. Специально построенный алгоритм решения системы позволяет находить решение для каждого временного слоя.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-08-00470-а)

Волошенюк Оксана Леонидовна, младший научный сотрудник,
Институт технической механики НАНУ и НКАУ, Днепропетровск, Украина,
e-mail: oksana.dnepr@gmail.com

ДИНАМИКА КОНЦЕВОГО ТЕЛА В РОТАЦИОННОМ ДВИЖЕНИИ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ

Волошенюк О.Л.

В настоящее время существенно возрос интерес к использованию тросовых систем в космическом пространстве. В перспективе космические тросовые системы могут решать задачи, которые невозможно или неэкономично решать с помощью существующих средств космической техники. Такие системы могут стать альтернативой ракетам-носителям для проведения транспортных операций в космосе [1]. Интересны проекты использования КТС для решения научно-исследовательских задач, в частности, изучения характеристик космической плазмы, проведения распределенных измерений [2-4].

В ряде проектов экспериментальных исследований динамики и исследовании физических свойств космического пространства [5] предполагается создание вращающейся на орбите космической тросовой системы двух тел соединенных нитью. Ранее, на модели двух точечных масс, была исследована устойчивость такой КТС, и определены основные закономерности эволюции параметров ее вращения [3]. Вместе с тем, одной из важных задач динамики КТС является задача стабилизации движения ее концевых тел и исследования переходных режимов движения.

Цель работы – определение основных характеристик колебательных процессов КТС, в частности, анализ угловых колебаний концевого тела относительно точки крепления к нити в зависимости от массово-геометрических параметров, жесткости нити и угловой скорости собственного вращения системы.

Рассматривается простейшая для исследуемого движения система. Предполагается, что один конец нити (точка А) движется по кеплеровой круговой орбите, а вторым концом нить прикреплена к абсолютно твердому телу. Системе нить-тело придается вращательное движение относительно точки А с угловой скоростью, значительно превосходящей угловую скорость орбитального движения. Предполагается также, что соединительная нить достаточно легкая и в исследуемом режиме движения достаточно сильно натянута, т.е. нить может рассматриваться как упругая невесомая связь. Рассеивание энергии движения системы происходит только за счет внутреннего трения в упругой нити. Предполагается, что система движется в ньютоновском поле сил, другие внешние воздействия отсутствуют.

1. Lorenzini E. C. Mission analysis of spinning systems for transfers from low orbits to geostationary / E. C. Lorenzini, M. L. Cosmo // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2000. – V.37, № 2. – P. 165 – 172.

2. Белецкий В. В. Динамика космических тросовых систем / В. В. Белецкий, Е. М. Левин. —М. : Наука, 1990. – 336 с.

3. Алпатов А. П. Ротационное движение комических тросовых систем / А. П. Алпатов, В. В. Белецкий и др. – Днепропетровск : Институт технической механики НАНУ и НКАУ, 2001. – 404 с.

4. Pradeep S., Kumar K. Extension of tethered satellites in the atmosphere // Acta Astronautica. – 2003. – V.52. – P. 1–10.

5. Wallace B. K. SEDS tether deployment ground test / B. K .Wallace. – Washington, April, 1995. – P. 653–668.

Воропай Алексей Валериевич, кандидат техн. наук, доцент,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет (ХАДИ), Харьков, Украина,
e-mail: voropay@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ГАСИТЕЛЕМ

Воропай А. В.

Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и шарнирно-присоединенного к ней, ортогонально поверхности, гасителя колебаний. В качестве гасителя подразумевается механическое устройство, сила сопротивления которого прямо пропорциональна скорости его элементов, контактирующих с пластиной в некоторой точке, другими словами имеется ввиду простейший амортизатор. Считается, что изменение перемещения во времени штока гасителя полностью совпадает с изменением прогиба пластины в точке установки, т.е. $w_D(t) = w(x_D, y_D, t)$. Величина силы сопротивления определяется по формуле $R(t) = \kappa \dfrac{dw_D(t)}{dt}$ (κ – коэффициента демпфирования, $R(t)$ – реакция взаимодействия между пластиной и гасителем).

На пластину воздействует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания системы. Выполняется решение прямой и обратной задачи. При решении задачи предполагалось, что координаты точки приложения возмущающей нагрузки, а также координаты точки установки гасителя заданы (любые точки пластины не лежащие на ее границе).

Прямая задача (определение зависимости компонент перемещения во времени при известных возмущающей нагрузке и величине коэффициента демпфирования) сводится к решению системы четырех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Первые три уравнения – стандартные уравнения колебаний пластины средней толщины, согласно уточненной теории типа Тимошенко [1]; а четвертое уравнение описывает взаимодействие между гасителем колебаний и пластиной. Прямая задача может быть сведена к интегральному уравнению Волтерра I рода, которое решается с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [2]. В результате находится сила взаимодействия между гасителем и пластиной $R(t)$, что позволяет определять компоненты перемещения во времени во всех точках пластины.

Обратная задача (определение закона изменения во времени возмущающей силы $P(t)$ при условии, что изменение перемещения во времени некоторой точки пластины $w_s(t)$ известно) сводится к решению системы интегральных уравнений Волтерра I рода. Укажем, что при вычислениях в качестве исходных данных для обратной задачи использованы численные значения прогиба, найденные при решении прямой задачи с последующим наложением на них шума, моделирующего погрешности, которые имеют место при экспериментальных исследованиях. В результате решения находится искомая возмущающая сила, а также сила взаимодействия между гасителем и пластиной.

1. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т.5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНИТИ, 1973 – 272 с.
2. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

Галатенко Григорий Васильевич, кандидат физ.-мат. наук, с.н.с.
Института механики им.С.П.Тимошенко НАНУ.
Адрес для переписки – 03057, Украина, г.Киев,ул.Нестерова 3, тел. (044) 454-77-68,
E-mail: fract@inmech.kiev.ua

О ЗАВИСИМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК КВАЗИХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Галатенко Г.В.

При анализе концепции квазихрупкого разрушения Гриффитса-Орована- Ирвина обращает на себя внимание два ее обстоятельства. Во-первых, критерий разрушения формулируется исходя только из асимптотического поля упругих напряжений вблизи вершины трещины и пренебрежением регулярных членов. При этом наличие зон пластических деформаций учитывается впоследствии путем введения поправок на пластичность. Во-вторых, критерий разрушения вводится отдельно для плоского напряженного состояния $\left(K_I = K_C\right)$ и плоской деформации $(K_I = K_{IC})$, не устанавливая связи между характеристиками трещиностойкости K_C и K_{IC}.

В работах [1,2] разработан класс двухпараметрических критериев квазихрупкого разрушения, который лишен указанных выше недостатков. В частности, силовой критерий разрушения имеет вид

$$m_k K_I = K_{mc}, \tag{1}$$

где коэффициент стесненности пластических деформаций $m_k = \sigma_y^0 / \sigma_T$ отвечает за вид напряженного состояния на фронте трещины. Для плоской задачи напряжения σ_y^0 определяются из решения системы уравнений

$$\sigma_x^0 - \sigma_y^0 = T,\ F\left(\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0\right) = 0,\ \sigma_z^0 = \begin{cases} 0 - п.н.с. \\ \nu\left(\sigma_x^0 + \sigma_y^0\right) - п.д. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь T - первый регулярный член поля напряжений вблизи вершины трещины, $F\left(\cdots\right) = 0$ - условие пластичности для данного материала. Критерий (1) описывает зависимость предельных значений КИН K_I от вида напряженного состояния. В этой зависимости можно условно выделить четыре области: плоское напряженное состояние, переходная область к плоской деформации, плоская деформация, специальные случаи объемного напряженного состояния. Для последней области имеет место наибольшая стесненность пластических деформаций и наименьшее сопротивление распространению трещины.

1.Каминский А.О., Галатенко Г.В. Двухпараметрическая модель трещины нормального отрыва в упругопластическом теле при плоской деформации // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 6. – С. 44-55.
2. Галатенко Г.В. Двухпараметрический критерий разрушения для упругопластических тел с трещинами нормального отрыва // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 7. – С.47-57.

Гачкевич Александр Романович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины Украина, Львов,
Земсков Андрей Владимирович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Московский авиационный институт, Россия, Москва,
e-mail-azemskov1975@mail.ru
Тарлаковский Дмитрий Влентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Московский авиационный институт, Россия, Москва.

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОСТИ С УЧЁТОМ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.

Имеется однородное полупространство. Ось Ox_3 направлена вглубь полупространства. Поверхность $x_3 = 0$ свободна от механических нагрузок и на ней задан равномерный диффузионный поток, направленный вдоль оси Ox_3.

Физико-механические процессы, без учета температурных эффектов будут описываться одномерными уравнениями упругой диффузии [2,4]

$$\begin{cases} c_{3333}u_{3,33} = \rho\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t} - \alpha_{33}\eta_{,3} \\ D_{33}\eta_{,33} = \dfrac{\partial\eta}{\partial t} + \dfrac{n_0}{RT_0}\alpha_{33}D_{33}u_{3,333} \end{cases} \qquad (1)$$

Систему необходимо дополнить граничными условиями, которые в соответствии с постановкой задачи задаются следующим образом [4]

$$u_3\big|_{x_3=0} = 0,\quad \left[D_{33}^*\frac{\alpha_{33}n_0u_{3,33}}{kT_0} - D_{33}^*\eta_{,3}\right]\Bigg|_{x_3=0} = f(t),\quad u_3\big|_{x_3=\infty} = o(1),\quad \eta\big|_{x_3=\infty} = o(1) \qquad (2)$$

$$u_3\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_3}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\quad \eta\big|_{t=0} = 0 \qquad (3)$$

Здесь u_i - компоненты вектора перемещений, $\eta = n - n_0$, где n и n_0 - концентрация и начальная концентрация диффундирующего вещества, c_{ijkl} - коэффициенты упругих характеристик среды, b_{ij} - коэффициенты теплового расширения, α_{ij} - коэффициенты, характеризующие относительное объёмное изменение выражающая зависимость объёма вещества от состава (концентрации исходного вещества) [2,3], а ε_{ij} - компоненты тензора деформаций, k - постоянная Больцмана, D_{ij}^* - коэффициент самодиффузии [1-3], T_0 - температура среды.

Решение данной задачи ищется с помощью методов операционного исчисления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-08-00064-а и 11-08-90453-Укр_ф_а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, госконтракт № 14.740.11.0586 от 05.10.2010г.

1. Бокштейн Б.С., Бокштейн С.З., Жуховицкий А.А. Термодинамика и кинетика диффузии в твёрдых телах. М.: Металлургия, 1974, 280 с.
2. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 182 С.
3. Князева А.Г. Введение в локально-равновесную термодинамику физико-химических превращений в деформируемых средах. – Томск, 1996. – 146 С.
4. *Ya. S. Podstrigach* Diffusion theory of anelasticity of metals // Zhurnal prikladnoi mekhaniki I tekhnicheskoi fiziki, № 2, 1965, pp. 67-72

Георгиевский Дмитрий Владимирович, д.ф.м.н.
МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия,
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su;

ОБ ОБОБЩЁННЫХ ЗАДАЧАХ ОРРА - ЗОММЕРФЕЛЬДА В МСС

Георгиевский Д. В.

Обобщённое уравнение Орра - Зоммерфельда в линеаризованной теории гидродинамической устойчивости [1 - 3]

$$(\frac{d^2}{dx^2}+s^2)[T_\circ^\bullet(\varphi''+s^2\varphi)]-4s^2(\frac{T_\circ}{U^\circ},\varphi')'=(\alpha+isv^\circ)(\varphi''-s^2\varphi)-isv^{\circ''}\varphi \quad (1)$$

$$v^\circ\in C^2(0;1), U^\circ=|v^{\circ'}|; T_\circ\equiv T(U^\circ(x)), T_\circ^\bullet\equiv\frac{dT}{dU}(U^\circ(x)) \quad (2)$$

$$\delta\psi(x_1,x,t)=\varphi(x)\exp(isx_1+\alpha t) \quad (3)$$

где α - комплексный спектральный параметр, $\delta\psi$ - возмущение функции тока, в совокупности с четырьмя однородными граничными условиями на φ в точках 0 и 1, например, условиями прилипания

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0, \quad \varphi'(0)=\varphi'(1)=0 \quad (4)$$

моделирует развитие со временем картины возмущений, налагаемых на одномерное сдвиговое в плоскости (x_1,x_2), $x_2\equiv x$, установившееся течение неньютоновской жидкости с материальной функцией упрочнения $T=T(U)$, удовлетворяющей требованиям: $T(0)=0$, $.T^\bullet|_{U\geq 0}>0$. Критерием асимптотического затухания возмущений является выполнение системы неравенств $(\mathrm{Re}\alpha_k)(s)<0$, $k=1,2,\ldots$, при $s>0$ для всех спектральных кривых.

Классическое уравнение Орра - Зоммерфельда естественным образом следует из (1) в случае линейной связи $T(U)=U/R$, где R - число Рейнольдса, т.,е. для ньютоновской вязкой жидкости. Одними из эффективных методов исследования спектральной задачи (1), (4) являются методы интегральных соотношений, интенсивно развиваемые в последние десятилетия применительно к материалам со сложными определяющими соотношениями (сложной внутренней реологией микроструктурой). Эти методы позволяют получать достаточные оценки устойчивости процесса, не находя точное либо приближённое решение линеаризованной задачи в каждой точке в любой момент времени. В докладе выводятся обобщения теоремы Сквайра применительно к спектральным задачам для уравнения (1), даются новые, более сильные чем ранее, оценки устойчивости [2, 3].

1. *Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В.* Вязкопластические течения. Динамический хаос, устойчивость, перемешивание. М.: Наука, 2005. 394 с.
2. *Georgievskii D.V.* Applicability of the Squire Transformation in Linearized Problems on Shear Stability // Russian J. Math. Phys. -- 2009. - 16, № 4. -- P. 478-483.
3. *Георгиевский Д.В.* Обобщённые оценки Джозефа устойчивости плоских сдвиговых течений со скалярной нелинейностью // Изв.,РАН. Сер.,физическая. -- 2011. - 75, № 1. -- P. 149-152.

Глухов Юрий Петрович, кандидат физ.-мат. наук,
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: gluchov.uriy@gmail.com;
Галаган Алла Ивановна, старший преподаватель,
Кременчугский национальный университет им. М. Остроградского, Кременчуг, Украина,
e-mail: golegg@mail.ru

ДВУХСЛОЙНАЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННАЯ ПОЛОСА НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Глухов Ю.П., Галаган А.И.

Работа посвящена изучению динамических процессов в многослойных предварительно напряженных телах при воздействии подвижной поверхностной нагрузки.

В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями [1] рассмотрена постановка и метод решения плоской задачи о возмущении движущейся нагрузкой двухслойной предварительно напряженной полосы на жестком основании. Аналогичная задача для одной предварительно напряженной полосы, лежащей на жестком основании, исследована в работе [2].

Рассматривается двухслойная полоса лежащая на жестком основании. Нагрузка движется по свободной поверхности внешнего слоя с постоянной скоростью. Граничные поверхности слоев плоские и параллельные между собой. Толщина слоев произвольная. Слои состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных материалов с произвольной формой упругого потенциала.

Изучается два варианта контакта между элементами слоистой среды и основанием: жесткий и нежесткий.

Начальное напряженно-деформированное состояние слоев считается однородным.

Предполагается, что картина деформаций инвариантна относительно времени в движущейся вместе с нагрузкой системе координат. Также предполагается, что напряжения, возникающие за счет действия нагрузки, значительно меньше начальных напряжений. Указанное предположение позволяет применять линеаризированную теорию упругости для описания дополнительного напряженного состояния, вызванного действием нагрузки.

Постановка задачи выполнена в общем виде для произвольного материала, условий контакта и скорости движения нагрузки.

В области изображений Фурье получено решение задачи в общем виде для случаев неравных и равных корней характеристических уравнений, для различных материалов элементов двухслойной среды, условий их сопряжения и для любой скорости движения поверхностной нагрузки. Приведены формулы для трансформант характеристик напряженно-деформированного состояния элементов полосы.

Выполнено исследование зависимости значений корней характеристических уравнений от скорости движения нагрузки и начальных напряжений для несжимаемого материала с упругим потенциалом типа Бартенева-Хазановича и сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа.

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: “А.С.К”, 2004. – 672 с.
2. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для предварительно напряженной полосы с закрепленным основанием. – Вісник національного Черкаського університету. Випуск 172. – Черкаси, 2010. - С. 20 – 24.

Глущенко Юлія Анатоліївна, кандидат фіз.-мат. наук,
Національний транспортний університет, Київ, Україна,
e-mail: yulia_glush@mail.ru;
Хорошев Костянтин Григорович, кандидат фіз.-мат. наук,
Національний транспортний університет, Київ, Україна,
e-mail: k.g.khoroshev@gmail.com;

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ СКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З ОТВОРАМИ І ТРІЩИНАМИ

Глущенко Ю.А., Хорошев К.Г.

Розглянута задача про узагальнений плоский електропружний стан п'єзоелектричної скінченої пластинки з L отворами і тріщинами, що знаходиться під дією різниці потенціалів. Вважалося, що контури отворів і тріщин і зовнішньої границі не підкріплені й не завантажені. На контурах N отворів і тріщин і необов'язково зовнішньої границі нанесено тонкі електроди, і до них підведена різниця потенціалів, що зводиться до відомих на цих контурах значень електричного потенціалу. Контури інших границь пластинки неелектродовані і позбавлені електричного навантаження.

Методика розв'язання задачі ґрунтується на використанні комплексних потенціалів $\Phi_k\left(z_k\right)$ $\left(k=\overline{1,3}\right)$ та чисельного метода найменших квадратів для задоволення граничним умовам на контурах пластинки [1]. Використовуючи результати досліджень для пластинки з повністю електродованими границями [2], для функцій $\Phi_k\left(z_k\right)$ знайдено

$$\Phi_k\left(z_k\right)=c_{k0}+\sum_{l=1}^{N}A'_kQ_l\ln\zeta_{kl}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{k0n}\left(z_kR_{kl}^{-1}\right)^n+\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_{k\ln}\zeta_{kl}^{n},$$

де $z_k=x+\mu_k y$, μ_k – корні відомого характеристичного рівняння [1]; ζ_{kl} – величини, що знаходяться з виразу конформних відображень $z_k=z_{kl}+R_{kl}\left(\zeta_{kl}+m_{kl}/\zeta_{kl}\right)$ [1]; A'_k [2] та z_{kl}, R_{kl}, m_{kl} [1] – відомі величини; Q_l $\left(l=\overline{1,N}\right)$, c_{k0}, $a_{k\ln}$ $\left(k=\overline{1,3};\ l=\overline{1,L};\ n\ge 1\right)$ – невідомі сталі, які визначаються з граничних умов на контурах пластинки методом найменших квадратів.

Після застосування такого підходу комплексні потенціали $\Phi_k\left(z_k\right)$ $\left(k=\overline{1,3}\right)$ стають відомими, а отже, значення напружень, компонентів векторів індукції, напруженості та зміни потенціалу електричного поля відносно його нульового рівня можуть бути визначеними в будь-якій точці пластинки за відомими формулами [1]. Для кінців тріщини можна знайти й значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, напруженості й індукції (далі КІНІН) [1]

Були проведені чисельні дослідження з їх аналізом розподілів значень КІНІН і напружень для п'єзоелектричного кругового кільця з підведеної до його контурів різниці потенціалів в 1В і з неелектродованою тріщиною, розташованою на діаметрі зовнішнього контуру, що співпадає з віссю поляризації матеріалу. Виявлено, що значення напружень в точках перемички біля тріщини та КІНІН k_1 зростають за модулем з ростом тріщини.

1. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
2. Глущенко Ю.А. Электроупругое состояние конечной пьезоэлектрической пластинки с отверстиями и трещинами при заданных на контурах значениях потенциала / Ю.А. Глущенко, К.Г. Хорошев // Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки. – 2008. – № 1. – С. 211–218

Гололобов Владимир Ильич, канд.техн.наук, ст.науч.сотр.
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна,
e-mail: term@inmech.kiev.ua

КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОРАЗОГРЕВ ГИБКОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Гололобов В.И.

Рассматривается задача о геометрически нелинейных установившихся колебаниях тонкой вязкоупругой круглой трехслойной пластинки. Наружные слои из пьезоактивного материала используются в качестве электромеханических преобразователей для осуществления внешнего воздействия электрическим способом. Электрическое воздействие на пластинку, когерентное с основным, механическим, применяется с целью ее виброзащиты.

Рассеяние энергии колебаний в неупругих материалах и связанное с ним выделение тепла и нагрев пластины на резонансных режимах приводит к изменению физических свойств и, как следствие, к изменению поведения системы вплоть до потери устойчивости динамического процесса или нарушения работоспособности электромеханических преобразователей.

Математическая модель колебаний такой электромеханической системы представляет формулировку задачи электровязкоупругости для слоистых тонкостенных элементов с упругими, вязкоупругими и пьезоактивными слоями. На резонансных режимах работы при деформациях с прогибами, соизмеримыми с толщиной пластины, она представляет взаимосвязанные системы интегро-дифференциальных уравнений изгиба и уравнений для сопутствующего изгибу плоского напряженного состояния. Для их решения использован подход, изложенный в [1], при этом решение осуществляется с применением численных методов.

При определения элктромеханического состояния пластинки последовательно используется метод Бубнова-Галеркина для приведения исходной системы к обыкновенному нелинейному интегро-дифференциальному уравнению и метод гармонической линеаризации для его решения. По результатам этого решения определяется мощность тепловыделения и температурное поле в пластинке. Аппроксимирующая форма колебаний в методе Бубнова-Галеркина находится численно как решение соответствующей линейной задачи о колебаниях пластинки.

В окрестности первой собственной частоты найдена зависимость максимальной температуры в пластинке от частоты колебаний. Она имеет неоднозначный характер, типичный для систем с жестким типом нелинейности.

1. Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевская В. Ф. Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой пластины при помощи пьезоактуаторов // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 114-123.

Григоренко Александр Ярославович, доктор физ.-мат. наук, профессор, *институт механики имени С.П.Тимошенко, Киев, Украина,* e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru;
Бергулёв Антон Сергеевич, аспирант, *институт механики имени С.П.Тимошенко, Киев, Украина,* e-mail: bergulyov@yandex.ru

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Григоренко А.Я., Бергулёв А.С.

Исследование напряженно-деформированного состояния анизотропных прямоугольных пластин в пространственной постановке является актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела. Решение отмеченных задач сопряжено с большими трудностями вычислительного характера. Для этой цели в данном сообщение предлагается дискретно-континуальный численный подход. Исходные соотношения анизотропной трехмерной теории упругости[1] после тождественных преобразований преобразуются к трем дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка относительно перемещений. Краевые условия на верхней и нижней гранях пластины также получаются из основных уравнений теории упругости путём элементарных преобразований.

Сформулированная краевая задача методом сплайн-коллокации в двух координатных направлениях сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями на краях пластины[2]. В случае, если количество точек коллокации в направлениях x и y было выбрано равным N и M соответственно, полученная система дифференциальных уравнений будет состоять из $6 \cdot N \cdot M$ уравнений:

$$\frac{dS}{dz} = A(z) \cdot S + f(z) \qquad (1)$$

Граничные условия будут описываться системами из $3 \cdot N \cdot M$ уравнений:

$$B_q \cdot S(q) = f_q, \quad q = 0, c \qquad (2)$$

Краевая задача (1),(2) решается устойчивым методом дискретной ортогонализации.

Для достижения сходимости метода и получения корректных результатов количество точек коллокации по каждому из направлений должно быть не менее восьми. В этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений будет иметь 384-й порядок.

В результате проведенных расчетов получены результаты распределения полей напряжений и перемещений при изгибе толстостенной прямоугольной пластины для изотропного и ортотропного материала, а также анизотропного материала с одной плоскостью упругой симметрии для случаев жесткой заделки и шарнирного опирания боковых граней пластины. В случае шарнирного опирания пластины были получены также аналитические решения путем представления неизвестных исходной системы уравнений в ряды Фурье. Практическое совпадение результатов расчетов полученных с помощью разных методов позволяет служить одним из критериев достоверности результатов расчетов для других типов граничных условий.

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела // Изд. 2-е, М: Наука – 1977. 416с.

2. О.Я. Григоренко, А.С. Бергульов, С.М.Яремченко Розв’язання тривимірних крайових задач про згин прямокутних пластин // Доповіді НАН України. Механіка. – 2010. - №10. – С.44-51.

Григоренко Олександр Ярославович, професор, доктор фізико-математичних наук,
Інститут механіки імені С.П. Тимошенко НАН України, Київ, Україна,
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru
Єфімова Тетяна Леонідівна, , кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інститут механіки імені .С.П. Тимошенко НАН України, Київ, Україна,
e-mail: efimovatl@yandex.ru
Власова Інна Валентинівна, аспірант кафедри математики и механіки,
Миколаївський національний університет імені В.О.Сухомлинського, Миколаїв, Україна,
e-mail: inna-2011@hotmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ АНІЗОТРОПНИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Григоренко А.Я., Єфімова Т.Л., Власова І.В.

При забезпеченні надійності конструкцій в різних галузях техніки важливе значення має дослідження динамічних характеристик конструктивних елементів у вигляді пластин різної форми. В останні роки дослідження вільних коливань прямокутних пластин змінної товщини в рамках класичної теорії та теорії типу Тимошенка проводяться достатньо інтенсивно. У випадку ізотропних або ортотропних пластин постійної товщини з шарнірно-обпертими торцями для класичної теорії можна побудувати розв’язок в замкненому вигляді. Однак в випадках інших граничних умов або змінної в двох напрямках товщини пластини отримати аналітичний розв’язок задачі про вільні коливання пружних пластин не вдається. Це ж можна відмітити й для випадку ортотропного матеріалу з осями ортотропії, що не співпадають з координатними осями, зв’язаними з геометрією пластини. При цьому, коли осі ортотропії повернуті на деякий кут навколо осі ОХ, матеріал характеризується однією площиною симетрії пружних властивостей.

Існує ряд різних наближених підходів для вивчення власних коливань анізотропних прямокутних пластин. В даному повідомленні для дослідження в рамках класичної теорії вільних коливань прямокутних анізотропних пластин змінної товщини при різних граничних умовах на торцях розвивається метод сплайн-коллокації [1,2]. На основі даної методики було досліджено спектр частот власних коливань квадратних та прямокутних пластин з склопластика. Проведено порівняння частот для різних кутів повороту осей ортотропії відносно координатних осей в серединній поверхні пластини. Проведено аналіз впливу змінної товщини і типу граничних умов на розподіл динамічних характеристик анізотропних пластини.

1. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Исследование свободных колебаний прямоугольных пластин переменной толщины в уточненной постановке// Доп. НАН України. − 2006. − № 8. − С. 39 - 47.
2. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Применение метода сплайн-апроксимации для решения задач о свободных колебаниях прямоугольных пластин переменной толщины // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 10. – С. 90 - 99.

Григоренко Александр Ярославович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт механіки НАНУ им. С.П. Тимошенко, Киев, Украина,
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ua;
Лоза Игорь Андреевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Национальный транспортный университет, Киев, Украина,
e-mail: dukeigor@mail.ru

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Григоренко А.Я., Лоза И.А.

Соединение из двух различных пьезоэлектрических материалов или из одинаковых с различными направлениями предварительной поляризации приводит к концентрации напряжений на границе радела двух сред, что инициирует развитие микротрещин и негативно сказывается на сроке службы устройств, использующих данное соединение. Для решения указанной проблемы был разработан новый вид материалов – так называемые функционально градиентные пьезоэлектрические материалы (ФГПМ). ФГПМ это новый вид материалов материальный состав и свойства, которых непрерывно меняются в определенном направлении.

Рассматривается задача о собственных осесимметричных колебаниях полого цилиндра из функционально градиентного пьезокерамического материала. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Торцы цилиндра жестко защемлены и свободны от электродов.

Для решения данной задачи предлагается эффективный численно-аналитический подход. После разделения переменных и использования метода сплайн-коллокаций по осевой координате, исходная трехмерная задача дифференциальных уравнений в частных производных сводится к краевой задаче на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях по радиальной координате.

$$\frac{dR}{dx} = A(x,\Omega)R\,. \tag{1}$$

С граничными условиями:

$$B_1R(-1) = 0\,,\; B_2R(-1) = 0\,. \tag{2}$$

Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}\,;\; \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^0}{\lambda}\,;\; \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}^0}{\sqrt{\varepsilon_0\lambda}}\,;\; \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^0}{\varepsilon_0}\,;\; x = \frac{r - R_0}{h}\,.$$

h - половина толщины цилиндра; ρ - плотность материала цилиндра; R_0 - радиус срединной поверхности; ε_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума; $\lambda = 10^{10}\,\frac{H}{м^2}$.

Решение задачи (1), (2) было выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Приводятся результаты численного анализа для различных направлений предварительной поляризации пьезокерамики.

Григоренко Олескандр Ярославович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru
Яремченко Наталія Петрівна, кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: yaremchenko@ua.fm
Вовкодав Оксана Володимирівна, аспірант
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: oxanaukr2111@hotmail.com

РОЗВ'ЯЗАННЯ СТАТИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕТОНКИХ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Вовкодав О.В.

Сферичні оболонки широко застосовуються як елементи конструкцій в різних галузях техніки, зокрема у суднобудуванні та ракетно-космічній техніці. Для оцінки міцності та надійності таких конструкцій потрібно знати характеристики їх напруженого стану. Тому виникає необхідність у розробці ефективних методів і підходів до розрахунку оболонок даного класу. Дослідження напруженого стану таких оболонок передбачає значні труднощі обчислювального характеру, що зумовлено складністю вихідної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних і відповідних граничних умов.

Таким чином, розроблено ефективний чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач статики сферичних анізотропних оболонок змінної товщини в уточненій постановці при різних граничних умовах [1]. З вихідних рівнянь уточненої теорії оболонок отримано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в переміщеннях з граничними умовами, що становить двовимірну крайову задачу, яка розв'язується шляхом зведення до одновимірної методом сплайн-колокації і розв'язання одновимірної крайової задачі стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. На основі викладеного підходу побудовано алгоритм і створено ефективний програмний комплекс, за допомогою якого розв'язано ряд задач і проведено аналіз напруженого стану оболонок вказаного класу в залежності від законів зміни товщини при різних граничних умовах. Виявлено ряд закономірностей розподілів прогинів і напружень, що мають практичне значення при оцінці міцності і надійності елементів конструкцій.

Особливістю розв'язування вказаних задач є дослідження напруженого стану сферичних оболонок змінної товщини, виготовлених з анізотропних матеріалів. При цьому товщина оболонки може змінюватися у двох координатних напрямках.

На основі запропонованого підходу була розв'язана задача про визначення напружено-деформованого стану сферичної анізотропної оболонки змінної в двох координатних напрямках товщини. Оболонка жорстко закріплена по всьому контуру і знаходиться під дією рівномірного нормального тиску.

Проведено аналіз напруженого стану оболонок вказаного класу при різних параметрах зміни товщини в двох координатних напрямках при збереженні її ваги. Виявлено вплив параметрів зміни товщини оболонки на розподіли її переміщень і напружень.

Отже, розроблено чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні методів сплайн-апроксимації та дискретної ортогоналізації і досліджено напружено-деформований стан анізотропних оболонок зі змінною в двох координатних напрямках товщиною при різних граничних умовах в уточненій постановці.

1. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академпериодика, 2006. – 472 с.

Григоренко Ярослав Михайлович, академик НАН Украины, доктор техню наук, профессор,
Институт механики им. С.П. Тимошенко, Киев, Украина;
Авраменко Ольга Александровна, кандидат физ.-мат. наук, факультета кибернетики,
Институт механики им. С.П. Тимошенко, Киев, Украина;
e-mail: avrolya@front.ru

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕТОНКИХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Григоренко Я.М., Авраменко О.А.

Часто, в качестве конструктивных элементов в различных областях техники и строительства используются нетонкие конические оболочки переменной толщины. При этом варьируя закон изменения толщины при сохранении объема конструкции можно влиять на рациональный выбор параметров оболочечных элементов.

Данная работа посвящена анализу напряженно-деформированного состояния замкнутых нетонких конических оболочек с толщиной, которая изменяется в двух координатных направлениях при сохранении объема.

Нетонкая коническая оболочка отнесена к ортогональной системе координат s,θ,γ, где s - длина по образующей поверхности приведения, θ - центральный угол в поперечном сечении к оси вращения, γ - нормальная к данной поверхности координата.

Систему разрешающих уравнений для оболочек переменной в обоих направлениях толщины получаем базируясь на исходных уравнениях для конических оболочек в уточненной постановке на основе гипотезы прямой линии [1], что приводит к формулировке задачи в виде системы дифференциальных уравнений десятого порядка с переменными коэффициентами [2].

Для решения данного класса задач применяется аппроксимация с помощью метода сплайн-коллокации [1] для разделения переменных, а для решения полученной при этом краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений используется устойчивый численный метод дискретной ортогонализации [1].

Рассмотрена задача о напряженно деформированном состоянии замкнутых нетонких конических оболочек с толщиной, которая изменяется в двух координатных направлениях по закону:

$$h(s,\theta) = h_0\left[1-\alpha\left(\frac{s}{l}-1\right)^2\right](1+\beta\cos\theta) \qquad (1)$$

В формуле (1) l- длина образующей, h_0, α и β - параметры изменения толщины.

Получены распределения полей напряжений и перемещений, выявлены закономерности.

Из результатов следует, что варьируя коэффициентами в законе изменения толщины можно при сохранении объема оболочки выбрать определенные их значения, чтобы получить наиболее рациональное распределение прогибов и напряжений.

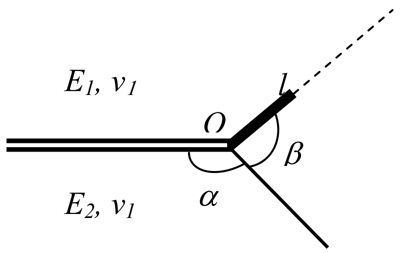
1. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев:Академпериодика, 2006. – 472 с
2. Григоренко Я.М., Авраменко О.А., Яремченко С.Н. Решение на основе сплайн-аппроксимации двумерных задач статики ортотропных конических оболочек в уточненной постановке // Прикл. механика. – 2007.– 43, № 11. – С. 43-54.

Діхтяренко Юлія Володимирівна, аспірантка, фізико-математичний факультет,
Уманський педуніверистет, Умань, Україна
e-mail: dikhtiarenko_iu@mail.ru
Дудик Михайло Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський педуніверистет, Умань, Україна
e-mail: dudik_m@hotmail.com
Дякон Валерій Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський відокремлений підрозділ Європейського університету
e-mail: valera_doc@pochta.ru

РОЗРАХУНОК ПЛАСТИЧНОЇ СМУГИ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

Діхтяренко Ю.В., Дудик М.В., Дякон В.М.

Важливим фактором, що впливає на тріщиностійкість тіл з дефектами, є утворення в його околі пластичної зони. Для її розрахунку в механіці руйнування широко використовуються різноманітні моделі, зокрема, модель Леонова-Панасюка-Дагдейла, що представляє зону у вигляді лінії розриву дотичного переміщення, на якій напруження задовольняють певному критерію текучесті.



В даній роботі в рамках модифікованої моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла, в якій відсутня вимога обмеженості напружень, розглядається задача про розрахунок початкової тонкої пластичної зони-смуги в умовах плоскої деформації в околі вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки межі розділу двох однорідних ізотропних пружнопластичних середовищ. Припускається, що смуга поширюється в більш пластичному матеріалі з вершини кута під деяким кутом β до межі розділу. Розв'язок задачі розбивається на розшукуваний внутрішній, що описує НДС в околі пластичної смуги, і зовнішній, який вважається відомим. На нескінченості ставиться умова, яка відповідає асимптотичному розв'язку зовнішньої задачі в околі вершини кута розхилу межі розділу середовищ з міжфазною тріщиною без врахування пластичної зони. Його особливістю є фізично некоректні просторові осциляції переміщень і напружень у вершині тріщини у широкому інтервалі кутів розхилу межі розділу α. В кінці пластичної смуги для напружень і зміщень реалізується асимптотика, яка являє собою асимптотично найбільший розв'язок однорідної задачі теорії пружності біля вершини напівнескінченої прямої лінії розриву дотичного переміщення в однорідному матеріалі.

Для побудови розв'язку внутрішньої задачі використано метод Вінера-Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна та деякими положеннями теорії функцій комплексної змінної. Отримано рівняння для довжини пластичної смуги. Здійснюючи вибір напрямку поширення смуги за умовою максимуму довжини смуги, чисельними методами досліджено залежність кута нахилу смуги та її довжини від кута розхилу межі розділу середовищ, пружних параметрів з'єднаних матеріалів і навантаження. Зворотним перетворенням Мелліна отримано вирази для напружень в околі кутової точки після утворення початкової пластичної смуги. Виявлено, що її поява суттєво змінює характер напружено-деформованого стану, усуваючи просторові осциляції напружень і зміщень. Проте, зберігається степенева особливість напружень. Знайдено характеристичне рівняння для обчислення показника степені сингулярності напружень та досліджено його залежність від параметрів задачі. Отримано вираз для знаходження коефіцієнта інтенсивності напружень в кінці міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу середовищ після утворення пластичної смуги.

Дородных Татьяна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, с.н.с. отдела механики стохастически неоднородных сред,
Институт механики НАНУ 03057, Украина, Киев, ул. Нестерова 3, тел.(044) 454-77-57, факс (044) 456-03-19, e-mail: stochac@inmech.kiev.ua

ДОЛГОВРЕМЕННАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Дородных Т.И.

В настоящей работе рассматривается длительная повреждаемость трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала при температурных воздействиях. Процесс повреждаемости пьезоэдектрика моделируется разрушением рассеянных микрообъемов и образования на их месте стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, описываемой дробно-степенной функцией долговечности. Кратковременная прочность определяется критерием Гувера-Мизеса. Предел кратковременной прочности является случайной функцией координат с распределением по закону Вейбулла.

Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние пьезоматериала стохастической структуры определяются на основе теории термопьезоупругости материалов стохастической структуры. Замыкание уравнений, описывающих совместные процессы деформирования пористого материала и образование микроповреждений в виде микропор, осуществляется на основе уравнения баланса пористости, которое содержит функцию распределения предела прочности микрообъема неразрушенного материала. Это дает возможность построить замкнутую систему уравнений, описывающих совместные процессы деформирования и длительной микроповреждаемости.

Проведены вычисления и построены диаграммы (рис. 1 и рис. 2) макродеформирования трансверсально-изотропного пьезоэлектрика при воздействии температуры для экспоненциально-степенной функции долговечности. Рассмотрено совместное влияние напряженности электрического поля и температурного воздействия на повреждаемость пьезоэлектрика.

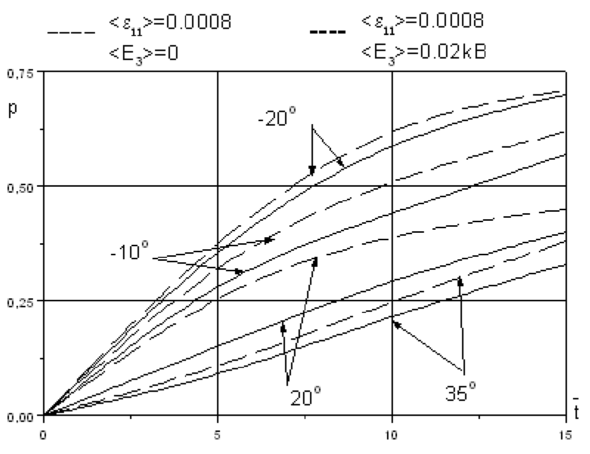


Рис. 1. Зависимость повреждаемости p от времени $\bar{t}$ при различных значениях температуры, заданной макродеформации $<\varepsilon_{11}>$ и различных значениях напряженности электрического поля $<E_3>$.

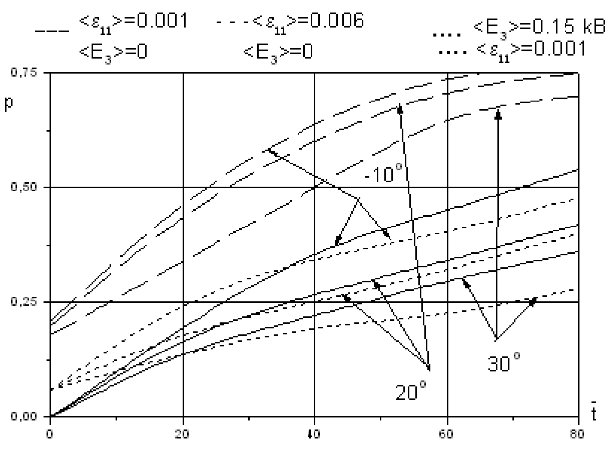


Рис. 2. Зависимость повреждаемости p от времени $\bar{t}$ при различных значениях температуры, различных значениях макродеформации $<\varepsilon_{11}>$ и напряженности электрического поля $<E_3>$.

1. Khoroshun L. P. Principles of the Micromechanics of Material Damagt. 1. Short – Term Damage / // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, №10. – P. 1035-1041.
2. Khoroshun L. P. Principles of the Micromechanics of Material Damagt. 2. Long – Term Damage / // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, №2. – P. 127-135
3. Хорошую Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наукова Думка, 1989. – 207с.

Дохняк Богдан Михайлович, кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики *Східноукраїнського національного університету ім. Володимира Даля*
Адреса для листування: 91493 Луганська обл., м.Олександрівськ-1, вул. Центральна, 48, дом. тел. 96-77-69. e-mail:Dokhnyak04@mail.ru.

ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЕЛАСТОМІРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Дохняк Б.М.

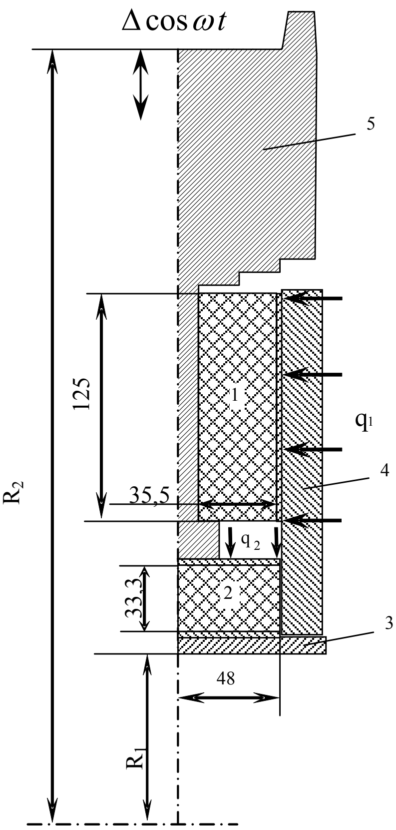


Рис. 1. Підгумоване колесо.

Еласттомірні матеріали широко використовуються в конструкціях ущільнювачів рухомих і нерухомих з'єднань, амортизаторах, муфтах, підшипниках, демпфіруючих елементах та ін. Такі конструкції виготовляють комбінованого типу з еластоміра і металу. Основним пружно деформованим елементом є еластомір. Як правило, еластомір знаходиться в попередньо напруженому стані. Тому, саме жорсткість конструкцій комбінованого типу залежить від параметрів їх збірки, розмірів у вільному стані і в конструкції. Для обчислення деформацій попередньо напружених елементів необхідно використовувати інкрементальну теорію пружності.

В комбінованих конструкції колісних пар з гуми виконуються пружні амортизуючи прокладки 1 та шарнір 2, розташовані між ободом і маточиною колеса. Такі підгумовані колеса застосовуються в ходових частинах рухомого складу міського і залізничного транспорту. Названі конструкції працюють у динамічному режимі, тому еластомірні елементи сприймають циклічні навантаження. Циклічні деформації та в'язко пружні властивості матеріалу призводять до дисипативного само розігріву гумових елементів.

Для визначення напружено здеформованого стану конструкції колеса використовується інкрементальний метод скінченних елементів [1]

$$\left(\left[K^{ij}\right]+\left[K_0^{ij}\right]\right)\left\{u_j\right\}=\left\{P^i\right\},$$

де $\left[K^{ij}\right]$ – фізична матриця жорсткості, $\left[K_0^{ij}\right]$ – інкрементальна матриця жорсткості, яка залежить від попередніх напружень σ_0^{kl}.

Температура само розігріву визначається для встановленого режиму теплообміну між конструкцією та зовнішнім середовищем із розв'язку стаціонарної задачі теплопровідності

$$\lambda\nabla T=-w_0 .$$

Потужність внутрішніх джерел теплоутворення визначається по формулі

$$w_0=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dt .$$

Визначення температури сомо розігріву при циклічних навантаженнях конструкцій з попередніми напруженнями реалізовано в комплексі обчислювальних програм «МІРЕЛА+».

1. Дохняк Б.М. Применение моментной схемы метода конечных элементов для решения задач инкрементальной теории упругости с начальными напряжениями/Киричевский В.В., Ищенко М.И. // Проблемы прочности.– 2006.– №3. –С.131-143.

Дружинин Георгий Владимирович, кандидат техн. наук, доцент,
Казанский государственный технический университет имени А.Н.Туполева, Казань, Россия,
e-mail: pla@pla.kstu-kai.ru;
Бодунов Николай Михайлович, кандидат техн. наук, доцент,
Казанский государственный технический университет имени А.Н.Туполева, Казань, Россия,
e-mail: bodunov_nm@mail.ru

РЕДУКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОРТОТРОПНЫМ МАТЕРИАЛАМ

Дружинин Г.В., Бодунов Н.М.

Течение идеально жесткопластических ортотропных тел (композиционные материалы; листовой металл, полученный прокаткой) при использовании функции напряжений $\varphi(x,y)$ и функции тока $\psi(x,y)$ в условиях плоской деформации описывается уравнениями

$$(\varphi_{zz}-\varphi_{xx})^2+C\varphi_{xz}^2=B^2\,, \tag{1}$$

$$k_{11}(\psi_{zz}-\psi_{xx})(\varphi_{zz}-\varphi_{xx})+4k_{33}\varphi_{xz}\psi_{xz}=0. \tag{2}$$

Здесь $k_{11},k_{33},C,B-$ соответствующие механические характеристики ортотропного материала; $v_x=\partial\psi/\partial z,\ v_z=-\partial\psi/\partial x$; $\sigma_x=\partial^2\varphi/\partial z^2$, $\sigma_z=\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\tau_{xz}=-\partial^2\varphi/\partial x\,\partial z.$

Для упрощения (редукции) системы (1), (2) введем новые независимые переменные

$$\xi=a_1x+\lambda_1z;\ \ \eta=b_2x+\lambda_2z\,, \tag{3}$$

где $a_1,\lambda_1,\ b_2,\lambda_2-$ произвольные действительные или комплексные числа.

После преобразований и при соответствующей комбинации сомножителей уравнение (1) преобразуется к полному квадрату и в результате, после извлечения квадратного корня, получим следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$\gamma_1\varphi_{xx}+\gamma_2\varphi_{zz}+\gamma_3\varphi_{xz}=\pm\frac{B(\lambda_2^2-\lambda_1b_2)^2}{\lambda_1^2+a_1^2}\,. \tag{4}$$

Здесь $\gamma_i=\gamma_i(a_1,\lambda_1,b_2,\lambda_2)$, $i=1,2,3$. При этом на коэффициенты $a_1,\lambda_1,\ b_2,\lambda_2$ накладывается ограничение $f(a_1,\lambda_1,b_2,\lambda_2)=0$ (в виду его громоздкости оно не расшифровывается).

Приближенное решение уравнения (4) представим в виде: $\varphi=\varphi_0+\overline{\varphi}$, где φ_0- решение соответствующего однородного уравнения; $\overline{\varphi}-$частное решение неоднородного уравнения; $\overline{\varphi}=\pm\dfrac{B(\lambda_2^2-\lambda_1b_2)^2}{\gamma_3(\lambda_1^2+a_1^2)}xz$. Полиномиальное решение однородного уравнения имеет вид

$$\varphi_0(x,z)=A_1(x+z)+A_2(x^2-\overline{\gamma}_1z^2+xz-\overline{\gamma}_2z^2/2)+$$
$$+\ A_3(x^3-3\overline{\gamma}_1xz^2+\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2z^3+x^2z-\overline{\gamma}_2xz^2+(\overline{\gamma}_2^2-\overline{\gamma}_1)z^3/3)\ +\ A_NQ^N(x,z). \tag{6}$$

где $\overline{\gamma}_1=\gamma_1/\gamma_2$, $\overline{\gamma}_2=\gamma_3/\gamma_2$; A_i- подлежащие определению произвольные коэффициенты при базисных функциях.

Коэффициенты разложения A_i, количество которых зависит от метода решения и оценки точности приближенного решения, находим из решения граничной задачи с помощью метода взвешенных невязок (составляются невязки только на границе). Искомое решение зависит от параметров преобразования (3). Их можно задавать произвольно, но при этом необходимо учитывать ограничение $f(a_1,\lambda_1,b_2,\lambda_2)=0$ и условие $a_1\lambda_2-\lambda_1b_2\neq0$. Решив задачу в напряжениях, далее находим решение уравнения (2) с помощью метода взвешенных невязок, используя для этого гиперболические базисные функции.

Дудик Михайло Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський педуніверистет, Умань, Україна
e-mail: dudik_m@hotmail.com;
Діхтяренко Юлія Володимирівна, аспірантка, фізико-математичний факультет,
Уманський педуніверистет, Умань, Україна
e-mail: dikhtiarenko_iu@mail.ru
Дякон Валерій Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський відокремлений підрозділ Європейського університету
e-mail: valera_doc@pochta.ru

ПРО ПОВОРОТ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В., Дякон В.М.

В останнє десятиліття виконано ряд нових робіт, присвячених повороту тріщини, розташованої на плоскій межі розділу двох різних середовищ, в яких основний метод визначення кута повороту полягав у введенні на її продовженні малого бічного тріщиноподібного відростка з наступним використанням того чи іншого критерію вибору напрямку її поширення. Проте, у даних дослідженнях не враховувалось утворення в кінці міжфазної тріщини, як концентратора напружень, зони передруйнування, яка суттєво змінює напружено-деформований стан в околі її вершини. Ця обставина врахована в роботах [1-2], де запропоновано ефективний метод розрахунку початкової бічної зони передруйнування, орієнтація якої визначає напрямок наступного підростання тріщини при збільшені навантаження. Опис зони здійснювався за допомогою модифікованої моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла.

У той же час, практично відсутні дослідження аналогічних задач про міжфазну тріщину, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу середовищ. Їх розв'язок є актуальним для механіки руйнування гірських порід, композитів з гранульованими наповнювачами, зварних або клеєних з'єднань кусково-однорідних клиновидних тіл тощо.

У даній роботі досліджено початковий етап повороту міжфазної тріщини з вершини кута ламаної межі розділу двох пружних середовищ, який полягає в утворенні в її околі у менш тріщиностійкому матеріалі бічної зони передруйнування. Зона моделювалась лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу. Розрахунок початкової зони передруйнування виконано методом Вінера-Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна. В якості критерію визначення орієнтації зони використано умову максимуму накопченої в ній потенціальної енергії. Отримано зручні формули для чисельного визначення кута повороту, довжини і розкриття початкової зони, досліджено залежність останніх від навантаження, кута розхилу межі розділу та відношення модулів Юнга середовищ. Встановлено умови і напрямок зрушення тріщини. Чисельний розрахунок кута повороту показав, що напрямок подальшого поширення міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу слабо залежить від пружних параметрів середовищ, проте суттєво залежить від кута розхилу межі розділу та конфігурації навантаження.

1. Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнис Л.А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикладная механика. – 2007. – Т.43, №10. – С.28-41.
2. Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнис Л.А. Исследование процесса начального поворота трещины на границе раздела двух упругих сред при растяжении и сдвиге // Прикладная механика. – 2009. - Т.45, №6. – С.71-79.

Евстратенко Денис Александрович
Днепропетровский государственный аграрный университет, Днепропетровск, Украина
e-mail: e.d.a@rambler.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ С ПОДВИЖНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ

Евстратенко Д. А.

В мае 2011 года исполняется 164 года со дня возникновения и начала исследований проблемы динамического воздействия подвижных нагрузок на упругие конструкции и сооружения. Практика создания и эксплуатации современных конструкций и сооружений продолжает ставить новые задачи, вызывает появление новых подходов в механическом и математическом моделировании, позволяющих более полно и точно учесть и выявить все особенности процесса их движения и устойчивости. Этот класс задач представляет самостоятельное научное направление в строительной механике, где существенной особенностью является взаимное влияние нагрузки и деформации.

В зависимости от способа схематизации инерционных свойств элементов системы существуют четыре принципиально различных варианта постановки задачи о действии подвижной нагрузки на упругие конструкции [2]. Наиболее сложной моделью является та, которая учитывает инерционные свойства как исследуемой конструкции, так и подвижной нагрузки. Ее существенная особенность − наличие в математической модели нечетной по времени смешанной производной, которая может содержаться одновременно как в самом дифференциальном уравнении, так и в граничных условиях, что не позволяет применить классическую схему разделения переменных в действительной области искомых функций. Применение же к исследованию приближенных подходов иногда приводит к противоречивым результатам, что вызывает необходимость дальнейшего развития и совершенствования механических и математических моделей и методов их исследования [1].

В качестве примера рассмотрены изгибные колебания прямоугольной пластинки, подкрепленной в одном из главных направлений регулярным набором симметричных относительно срединной поверхности ребер жесткости, по которым движутся потоки масс. Исследование математической модели осуществляется с помощью численно-аналитического метода двухволнового представления движения [1].

Численная реализация выполнена для механической системы «прямоугольная пластина – подвижная инерционная нагрузка» со следующими параметрами. Размеры пластины: ширина $b=10$ *м*, длина $l=100$ *м*, толщина $h=1$ *м*, плотность материала $\rho=2500$ *кг/м*^{3}, модуль упругости $E=30$ *ГПа*, коэффициент Пуассона $\nu=0{,}3$, скорость движения нагрузки $v=50$ *м/с*, соотношение подвижной и полной массы объекта $\mu=0{,}5$, количество ребер $k=10$.

Для определения собственных частот колебаний пластины написана программа в среде Delphi 6.0. Сравнение полученных численных результатов при $v=0$ с известным аналитическим решением задачи о нахождении собственных частот [3] подтвердило точность метода двухволнового представления движения. Полученные результаты могут найти применение при проектировании железнодорожных и автомобильных мостов, транспортных лент и других объектов, испытывающих действие подвижной нагрузки.

1. Горошко О. О., Дем'яненко А. Г., Киба С. П. Двохвильові процеси в механічних системах. − К.: Либідь, 1991. – 188 с.
2. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Наука, 1987. − 352 с.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. − М.: Наука, 1967. − 444 с.

Жук Ярослав Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник,
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна,
e-mail: y_zhuk@inmech.kiev.ua

ОЦІНКА ТЕМПЕРАТУРИ ВІБРОРОЗІГРІВУ ГНУЧКИХ ШАРУВАТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З П'ЄЗОАКТИВНИМИ ШАРАМИ

Жук Я.О.

При вивченні контролю коливань багатошарових тонкостінних елементів конструкцій необхідно розглядати цілий комплекс питань: моделювання механічної реакції й оцінка міцності електрично пасивних і п'єзоактивних шарів, конструкції загалом; врахування зв'язаності електричних, механічних і теплових полів в п'єзоматеріалі; розвиток теорій сенсорів и актуаторів; дослідження проблем чутливості сенсорів, проблем модального контролю і оптимального розташування сенсорів (актуаторів); дослідження теплових ефектів, зокрема явища дисипативного розігріву, яке супроводжує непружне деформування матеріалу.

Розвивається підхід до опису динамічної зв'язаної термов'язкопластичної поведінки гнучких елементів конструкцій з п'єзоактивними шарами. Розглядається шарувата балка з шарами постійної товщини. П'єзоактивні шари вважаються поляризованими в напрямку нормалі до початкової поверхні, яка вибрана еквідистантною поверхням шарів. Вважається, що справедливі гіпотези Кірхгофа-Лява, узагальнені на випадок електромеханіки, і плоского напруженого стану. Стандартні для гіпотез Кірхгофа-Лява рівняння руху й геометричні рівняння гнучких балок доповнено модифікованими фізичними співвідношеннями, які враховують як непружну деформацію пасивних шарів, так і п'єзоелектричні властивості активних шарів.

На базі електромеханічної моделі тонкостінних шаруватих елементів конструкцій [1,2] розвинуто наближену моногармонічну методику (одночастотне наближення) для опису нелінійної термоелектромеханічної поведінки балки, що містить в'язкопружні п'єзоактивні й непружні металічні шари і знаходиться під дією циклічного механічного або електричного навантаження. Як приклад розглянуто коливання шаруватої балки, середній шар якої виготовлено з алюмінієвого сплаву АМг-6, а зовнішні шари – з п'єзокераміки ЦТС-19. Досліджені два способи навантаження. В першому балка збуджується моментами на кінцях і контролюється електричний потенціал в п'єзоактивних шарах. В другому випадку на цих шарах задається електричний потенціал, а контролюються механічні характеристики балки.

Досліджено вплив розігріву й пластичних властивостей внутрішнього шару на коливальні властивості балки. За критерій втрати роботоздатності вибрано досягнення максимальною температурою в п'єзоматеріалі значення, при якому відбувається деполяризація п'єзоматеріалу (точка Кюрі). Досліджено амплітуди основних параметрів напружено–деформованого стану, еволюцію температурного поля і втрату роботоздатності конструкції внаслідок деполяризації п'єзокераміки, що викликана вібророзігрівом вище температури Кюрі.

1. Жук Я.А., Сенченков И.К. Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 80-91.
2. Жук Я.А. Решение задачи о колебаниях балки с пьезоактивными слоями при механическом или электрическом нагружении // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 131-138.

Загуменный Ярослав Викторович, кандидат физ.-мат. наук, старш. науч. сотр.,
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: zagumennyi@gmail.com

ТЕЧЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕРЫВАНИЕМ ДИФФУЗИОННОГО ПОТОКА ВЕЩЕСТВА НА ТОПОГРАФИИ

Загуменный Я.В.

В последние годы большое внимание уделяется изучению устойчивой стратификации, обуславливающей существование внутренних волн, переносящих на большие расстояния энергию и импульс и формирующих тонкую структуру среды, а также течений, индуцированных диффузией (ТИД) на топографии. С такими течениями, формирующимися возле непроницаемых наклонных поверхностей в покоящейся непрерывно стратифицированной жидкости, связывают образование интенсивных долинных и горных ветров в устойчиво стратифицированной атмосфере, а также плотностных течений в океане.

В первых теоретических исследованиях ТИД были построены стационарные решения в приближении бесконечной плоскости на основе линеаризованной системы уравнений, а нестационарная задача на бесконечном склоне решена точно только асимптотически в приближении малых времен. Особый научный и практический интерес представляет изучение структуры течений около полюсов препятствия – крайних точек, максимально разнесенных по вертикали, а также исследование процессов установления ТИД, поскольку асимптотические нестационарные и стационарные решения не согласуются между собой.

В качестве основы исследований выбрана система уравнений механики несжимаемой непрерывно стратифицированной жидкости, включающая уравнение Навье-Стокса с учетом действия гравитации в приближении Буссинеска, уравнение неразрывности и диффузии, а также замыкающее линеаризованное уравнение состояния. Численное решение поставленной задачи строится конечно-разностными методами с использованием процедуры расщепления по физическим параметрам на разнесенной «шахматной» сетке для пространственных производных.

В работе впервые численно рассмотрена задача установления ТИД около наклонной полосы конечной длины, прослежена зависимость его свойств от размерных параметров задачи (величины стратификации, длины и положения полосы).

Картина линий тока ТИД около горизонтальной пластины, моделирующей центральное сечение непроницаемого препятствия произвольной формы, состоит из четерех уровней горизонтальных вихревых ячеек, структура которых оказывается симметричной относительно плоскости пластины и антисимметричной относительно центральной вертикальной плоскости. Циркуляция жидкости в соприкасающихся ячейках имеет противоположные знаки и резко убывает по величине с удалением от поверхности пластины. Наклонная пластина, погруженная в покоящуюся непрерывно стратифицированную жидкость, формирует более сложную систему структурированных течений, включающую тонкие главные струи вдоль каждой из ее сторон с примыкающими противотечениями и систему компенсационных циркуляционных ячеек. Особо сложная структура течений формируется возле кромок пластины, где области поворота главной струи служат источниками диссипативно-гравитационных волн, визуализируемых как в численном решении, так и в лабораторных опытах, в виде протяженных горизонтальных полосчатых струкутур. Численное решение согласуется с ранее выполненными асимптотическими оценками параметров структурных элементов течений и данными теневой визуализации.

Воропаев Геннадий Александрович, доктор физ.-мат. наук, проф.,
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: vga@tbl.kiev.ua;
Загуменный Ярослав Викторович, кандидат физ.-мат. наук, старш. науч. сотр.,
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: zagumennyi@gmail.com

ВОЛНОВАЯ СТРУКТУРА СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ИСТОЧНИКЕ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Загуменный Я.В., Воропаев Г.А.

Среди существующих методов затягивания перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный важная роль отводится методам управления, построенным на генерации волновых и вихревых возмущений подобных собственным возмущениям пограничного слоя. Это обуславливает необходимость исследования собственных возмущений в пограничном слое с целью определения сочетания определяющих параметров и их величин, при которых могут быть получены затухающие или нерастущие вниз по потоку колебания, которые и ответственны за интегральные параметры движущихся тел. Особое внимание уделяется изучению влияния внешних возмущений на структуру собственных возмущений пограничного слоя, в том числе и колеблющейся поверхности.

Исследования структуры возмущенного пограничного слоя на колеблющейся поверхности, как правило, проводятся в квазигармонической постановке, что не позволяет адекватно учитывать локальность и нерегулярность взаимодействия возмущений пограничного слоя и деформирующейся поверхности. В связи с этим в данной работе предложено численное решение нестационарной задачи, позволяющей проследить во времени и пространстве возникновение и развитие возмущений скорости и давления в сдвиговом слое на активно колеблющейся вставке. Для решения поставленной задачи используется классическая нестационарная система уравнений Навье-Стокса и уравнение неразрывности для несжимаемой среды в переменных скорость-давление в декартовой системе координат. После выделения возмущенного течения относительно среднего профиля скорости и последующей линеаризации задачи решение строится численно с использованием конечно-разностных методов с применением процедуры расщепления по физическим параметрам на разнесенной «шахматной» сетке для пространственных производных.

На основе построенного численного алгоритма исследована динамика развития во времени возмущенного течения на активно колеблющейся поверхности, определены параметры генерированных волн, положения максимумов возмущенных компонент скорости по толщине пограничного слоя и декремент затухания возмущений вниз по потоку в зависимости от длины и фазовой скорости волны, бегущей вдоль фиксированной части обтекаемой поверхности в направлении среднего потока. Исследовано влияние изменения указанных параметров на развитие собственных возмущений в пограничном слое.

Основные неоднородности в структуре поля возмущенного течения сосредоточены в пристеночной области, где существенно изменяется угол наклона поверхностей равных фаз, а также на границе раздела областей фазности возмущений. Наибольшая амплитуда генерированных возмущений в пограничном слое наблюдается при совпадении длин волн и фазовых скоростей бегущей волны и первой моды собственных колебаний пограничного слоя. Структура течения вниз по потоку за колеблющейся вставкой, которая в этом случае играет роль локального источника возмущений в пограничном слое, определяется частотой функционирования источника и профилем скорости среднего течения. Показано, что при определенных сочетаниях параметров колеблющейся вставки возможно получить возмущенное поле течения с незатухающей амплитудой вниз по потоку.

Зимовщиков Александр Сергеевич, к.ф.м.н.
Институт Проблем Управления, Москва, Россия
e-mail: winter_z@mail.ru

КОМПЛАНАРНЫЕ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ БИНАРНОЙ ЗВЕЗДНОЙ СИСТЕМЫ

Зимовщиков А.С.

Фотогравитационная задача, введенная в рассмотрение В.В. Радзиевским[1], позволила учесть наряду гравитационным притяжением силу светового давления, исходящего от излучающего тела(звезды). В этой задаче существуют положения относительного равновесия (компланарные точки либрации), расположенные вне плоскости движения основных тел. На существование таких точек при одной излучающей массы указал В.В.Радзиевский[1]. Впоследствии А.Л.Куницын и А.Т.Турешбаев[2] установили существование трехпараметрического семейства таких точек в задаче с двумя излучающими массами. При этом в одной звезды гравитационное притяжения превалирует над силой светового давления, а в другой – ситуация в точности наоборот.

Для каждой звездной системы можно ввести параметр C, равный отношению «удельных» мощностей излучения её компонент и независящий от свойств частицы. Тогда пространство параметров становится двумерным, а рассматриваемые точки либрации ложатся на кривую.

В работе представлены результаты изучения компланарных точек либрации с использованием параметра C, в частности, найдены резонансные значения параметра.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(09-01-00468).

1. Радзиевский В.В. Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // Астрон. ж. 1950. Т. 30. Вып. 4.С.249-256.
2. Куницын А.Л.,Турешбаев А.Т. О компланарных точках либрации фотогравитационной заджачи трех тел// Письма в АЖ. 1985. Т.11. №12. С.930-933.

Игнатова Екатерина Анатольевна, ассистент,
Донецкий национальный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского,
e-mail: katerina-ignat@rambler.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО СЛУЧАЯ ЛИНЕЙНОГО ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА-ПУАССОНА

Игнатова Е.А.

Рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемая уравнениями Кирхгофа-Пуассона. Эту задачу изучали Г. Кирхгоф, С.А. Чаплыгин, В.А. Стеклов, П.В. Харламов и другие. В работах С.А. Чаплыгина и П.В. Харламова рассмотрены частные случаи линейных инвариантных соотношений указанных уравнений. Общие случаи интегрирования уравнений Кирхгофа-Пуассона на линейных инвариантных соотношениях рассмотрены в работах [1,2]. Причем условия существования линейного инвариантного соотношения уравнений Кирхгофа-Пуассона [1,2] были получены с использованием интегрирующего множителя и методов инвариантных соотношений построения частных решений уравнений динамики твердого тела, развитым Т. Леви-Чивитой [3] и П.В. Харламовым [4].

В данном докладе продолжены исследования случая [1], когда характерный параметр μ_0, определяющий свойства дополнительного первого интеграла, равен нулю, а многочлен, характеризующий зависимость скорости угла нутации от времени имеет кратные корни. В работе [1] полное интегрирование уравнений движения рассмотрено только в случае, когда этот параметр $\mu_0 > 0$.

Изучение особых случаев линейного инвариантного соотношения уравнений Кирхгофа-Пуассона, которые приведены в данном докладе, соответствуют вариантам, когда эллиптические интегралы вырождаются в интегралы, вычисление которых возможно в элементарных функциях, что позволило получить наглядные результаты, посвященные построению решений уравнений Кирхгофа-Пуассона в замкнутом виде. Это объясняется тем, что в работе получена явная зависимость от времени основных переменных задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемых уравнениями Кирхгофа-Пуассона при условиях существования у них одного линейного инвариантного соотношения. Приведены численные примеры разрешимости условий существования этих решений, показывающие действительность решений.

Полученные результаты представляют интерес для динамики гиростата, поскольку они могут быть использованы для изучения кинематического истолкования движения гиростата. Показано, что соответствующего аналога исследуемого решения в классической задаче о движении тяжелого твердого тела не существует.

1. Горр Г.В. О новом решении уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения/ Г.В. Горр, Е.К. Узбек //Прикл. математика и механика. – 2005. – Т.69, вып. 6. – С. 922 – 928.
2. Узбек Е.К. Об интегрировании уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения/ Узбек Е.К., Данилейко Е.А. // Механика твердого тела. – 2004. –Вып.34. – С.87–94.
3. Леви-Чивита Т. Курс теоретической механики: в 2-х т./ Т. Леви-Чивита., У. Амальди – М.: Изд-во иностр. литер., 1951. –Т.2, ч.2: Динамика систем с конечным числом степеней свободы.- 555с.
4. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений/ П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып.6. – С.15-24.

Исрафилов Рауф Махмуд оглы, кандидат физ.-мат. наук., с.н.с.,
Савельева Екатерина Владимировна, канд. физ.-мат. наук., доцент
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина
e-mail: ksav@hotmail.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

Исрафилов Р.М., Савельева Е.В.

В работе представлено решение задачи о теоретическом определении ядер эффективных операторных модулей упругости пористой среды, матрица которой обладает реологическими свойствами.

В отличие от существующих исследований для случая постоянного оператора дилатации, учтено, следуя [1,2], развитие объемной деформации матрицы во времени. При этом определяющие уравнения среды были представлены в виде

$$S_{ij}(t) = 2\mu_c^*\left[Э_{ij}(t) - \int_0^t R(t-\tau)Э_{ij}(\tau)d\tau\right]; \quad \sigma_{cp}(t) = K_c^*\left[e(t) - \int_0^t R_1(t-\tau)e(\tau)d\tau\right];$$

или

$$2\mu_c^* Э_{ij}(t) = S_{ij}(t) + \int_0^t \Gamma(t-\tau)S_{ij}(\tau)d\tau; \quad K_c^* e(t) = \sigma_{cp}(t) + \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)\sigma_{cp}(\tau)d\tau, \tag{1}$$

где $S_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \sigma_{cp}(t)\delta_{ij}, Э_{ij}(t) = e_{ij}t - e(t)\delta_{ij} -$ девиаторы напряжений и деформаций, $\sigma_{cp}(t),\ e(t) -$ средние напряжение и деформация среды, $R(t), R_1(t)$ и $\Gamma(t), \Gamma_1(t) -$ ядра релаксации и ползучести.

Для практического применения зависимостей (1) ядра релаксации должны отвечать результатам опытов, быть сингулярными. Такими свойствами обладает дробно-экспоненциальная функция $Э_\alpha(-\beta)$ Ю.Н.Работнова [3]. Для определения искомых ядер использованы известные уточненные формулы эффективных модулей упругости Г.А.Ванина [4], и З.Хашина [5], а также эффективного модуля сдвига

$$E_c^* = E_1 f_1(\nu_1, P), \ K_c^* = E_1 f_2(P, \nu_1); \ \mu_c^* = \frac{3K_c^* E_c^*}{9K_c^* - E_c^*}, \tag{2}$$

Из соотношений (2) для эффективных модулей получены формулы

$$\mu_c^* = f_3(E_1, E_c^*, P); \ K_c^* = f_4(E_1, E_c^*, P). \tag{3}$$

Наряду с соотношениями (1), была использована символическая форма записи, основанная на применении интегральных $Э_\alpha^*$-операторов с ядром Работнова. Далее известные операторные модули упругости для матрицы и пористой среды были представлены в виде

$$E_1(t) = E_1[1 - \kappa_1 Э_\alpha^*(-\beta_1)], E_c^*(t) = E_c[1 - \kappa_c Э_\alpha^*(-\beta_c)] \tag{4}$$

Применение теории Работнова позволило свести расшифровки полученных на основании (4) произвольных функций операторов к вычислению квадратур, в результате чего были найдены точные выражения функций $R(t)$, $R_1(t)$ и $\Gamma(t)$, $\Gamma_1(t)$ для пористых сред.

1. Freundenthat A.M., Henry Z.A.– Progres Astronaut and Pocketzy. – 1960, 1. – 33 p.
2. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. – М.: Высшая школа, 1978. – 477 с.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
4. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов.–К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.
5. Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов: Справочник. – К.: Наук. думка, 1982. – 430 с.

Карнаухов Василий Гаврилович, доктор физ. –мат.наук, профессор
Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина
Козлов Владимир Ильич, доктор физ. –мат.наук, ст. научн. сотрудник,
Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина
Завгородний Андрей Владимирович, ассистент кафедры математики и механики,
Николаевский национальный университет им.В.А.Сухомлинского, Николаев, Украина
e-mail: karn@inmech.kiev.ua

ВЫНУЖДЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ НЕУПРУГИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Завгородний А.В.

Как конструктивные элементы, трехмерные тела вращения из полимерных материалов и композитов на их основе широко используются во многих областях современной техники. Связано это прежде всего с уникальными свойствами таких материалов, которые повышают надежность и долговечность конструкции, снижают их материалоемкость и энергоемкость. Из–за присущих им высоких гистерезисных потерь неупругие материалы и композиты на их основе получили особенно широкое распространение при разработке технологий пассивного демпфирования колебаний конструкций. Однако при исследовании вынужденных гармонических колебаний неупругих элементов конструкций (особенно на резонансных частотах) возникает необходимость в учете связанности механических и тепловых полей, вызванная существенным повышением температуры диссипативного разогрева в результате гистерезисных потерь в неупругих материалах. Диссипативный разогрев может оказать существенное влияние на эффективность пассивного демпфирования колебаний конструкций.

В данной работе предложен метод решения трехмерной связанных динамических задач термомеханики для тел вращения из неупругих материалов при моногармоническом механическом нагружении с учетом взаимодействия механических и тепловых полей. Для моделирования теомомеханического поведения неупругого материала при моногармоническом деформировании использована концепция комплексных характеристик [1]. Рассмотрены два типа нелинейности: нелинейность первого типа обусловлена зависимостью комплексных характеристик от температуры и нелинейной зависимостью диссипативной функции от температуры и амплитуд деформаций, а нелинейность второго типа – зависимостью комплексных характеристик от амплитуд деформаций и нелинейной зависимостью диссипативной функции от амплитуд деформаций. Для решения возникающих при этом нелинейных краевых задач разработаны итерационные процедуры, которые сводят исходную нелинейную краевую задачу к решению последовательности линейных задач о колебаниях вязкоупругого тела вращения и линейных задач теплопроводности с известным источником тепла. С использованием такого подхода решены пространственные задачи о колебаниях и диссипативном разогреве толстых слоистых плит и цилиндрических панелей. Рассчитаны амплитудно–частотные, температурно–частотные характеристики и частотная зависимость коэффициента демпфирования для указанных элементов. Исследованно влияние диссипативного разогрева, механических и тепловых граниченых условий, структурной неоднородности и др. на эффективность пассивного демпфирования колебаний толстых слоистых плит и цилиндриченских панелей. Указано на возможность теплового разрушения неупругого тела при достижении температурой диссипативного разогрева некоторых критических точек (например, точки плавления).

1. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.

Kvachev Kirill Vadimovich, graduate
Moscow State University, Moscow, Россия,
email: kvachevkirill@yandex.ru;

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Kvachev K. V.

В работе рассматриваются две задачи. Первая задача - задача об устойчивости пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком.

Предполагается, что материал, из которого сделана пластинка изотропный, однородный, упругий, подчиняющийся закону Гука. С двух параллельных сторон пластина шарнирно закреплена, одна из оставшихся жестко, а другая свободна. Газ набегает параллельно сторонам шарнирного закрепления от стороны жесткого закрепления к свободной. На основе прямого метода найдена скорость, при которой система будет устойчивой.

Вторая задача - задача об устойчивости круговой цилиндрической оболочки. Материал оболочки изотропный, однородный, упругий, подчиняющийся закону Гука. С одной стороны оболочка жестко защемлена, а с другой свободна. Газ набегает вдоль образующей от границы жесткого защемления к свободной. Предполагается, что колебания осесимметричные и ускорением оболочки вдоль образующей можно пренебречь. Прямым методом Ляпунова найдена скорость, при которой система будет устойчивой.

1. А.А.Мовчан О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем//ПММ 1959 Т.23 вып. 3 с. 483-493
2. P.C.Parks A stability criterion for panel flutter problem via the second method of Liapunov//Differential equation and dynamical system - 1967 p. 287-298.

Киреенков Алексей Альбертович, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия,
e-mail: kireenk@ipmnet.ru, kireenk@mail.ru ;

ОБОБЩЕННАЯ ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ И ВЕРЧЕНИЯ

Киреенков А.А.

Предлагается обобщение двумерной модели трения скольжения и верчения В.Ф. Журавлева, позволяющее учесть динамическую связь компонентов определяющих силовое состояние трущихся тел, одновременно принимая во внимание, как представления о распределении нормальных контактных напряжений хорошо согласуемые с результатами в области теории упругости, так и обобщенную дифференциальную форму закона Кулона.

Показано, что сдвиг центрально-симметричного распределения нормальных контактных напряжений по направлению мгновенного проскальзывания приводит в случае круговых площадок контакта трущихся тел к появлению составляющей силы трения направленной перпендикулярно к мгновенной скорости проскальзывания, которая более нелинейная, чем соответствующая компонента, направленная против скорости мгновенного проскальзывания и чем момент трения.

Для того чтобы избежать вычисления кратных интегралов в уравнениях движения, построены обобщенные трехмерные модели трения, основанные на разложениях Паде точной интегральной модели, представляющие отношения двух линейных – модель первого порядка или двух билинейных форм - модель второго порядка.

$$F_{\parallel} = F_0\left(\frac{v}{v+au} + 2\pi\left((\mu_1 v^3 - \mu_2 v)I_1 + 2\mu_1 v u^2 I_3\right)\right),\ F_{\perp} = \frac{\mu F_0 uv}{(u+bv)(v+au)},\ \frac{1}{a} = \frac{u}{F_0}\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial v}\bigg|_{v=0}$$

$$M_C = M_0\left(\frac{u}{u+mv} + 2\pi\left((2\mu_1 v^2 - \mu_2)uI_3 + \mu_1 u^3 I_5\right)\right),\ \frac{1}{m} = \frac{v}{M_0}\frac{\partial M_C}{\partial u}\bigg|_{u=0},\ \frac{1}{b} = \frac{v}{\mu F_0}\frac{\partial F_{\perp}}{\partial u}\bigg|_{u=0}$$

$$M_C = M_0\left(\frac{u^2+muv}{v^2+muv+u^2} + 2\pi\left((2\mu_1 v^2 - \mu_2)uI_3 + \mu_1 u^3 I_5\right)\right),\ m = \frac{v}{M_0}\frac{\partial M_C}{\partial u}\bigg|_{u=0}$$

$$F_{\parallel} = F_0\left(\frac{v^2+auv}{v^2+auv+u^2} + 2\pi\left((\mu_1 v^3 - \mu_2 v)I_1 + 2\mu_1 v u^2 I_3\right)\right),\ a = \frac{u}{F_0}\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial v}\bigg|_{v=0}$$

$$F_{\perp} = \frac{\mu F_0 (u^2+mu)(v^2+auv)}{(v^2+buv+u^2)(v^2+auv+u^2)},\ b = \frac{v}{\mu F_0}\frac{\partial F_{\perp}}{\partial u}\bigg|_{u=0}$$

где $F_0 = fN$, $M_0 = fNR$, $F_{\parallel}$ и $F_{\perp}$ - составляющие силы трения направленные, соответственно, по касательной и нормали к траектории центра масс трущихся тел, M_C - момент сил трения, f - коэффициент трения, N - нормальная реакция, R - радиус пятна контакта, I_1, I_2, I_3 - первые моменты распределения нормальных контактных напряжений, а v и $u = \omega R$ - скорости скольжения и верчения центра масс движущегося тела.

Обобщенные трехмерные модели трения, основанные на разложениях Паде, сохраняют аналитические свойства точной интегральной модели, как функции кинематических параметров. Их коэффициенты – числа, которые при решении задач практики следует определять из экспериментов. Поэтому модели трения могут рассматриваться, как феноменологические модели трения, так как они представляют собой аналитические функции, корректно описывающие взаимосвязь компонент определяющих силовое состояние с кинематическими параметрами в условиях комбинированной кинематики, которые можно непосредственно использовать в уравнения динамики.

Коваленко Анатолий Петрович, кандидат. физ.-мат.наук, ст.сн.с.
Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
e-mail: dynamic@inmech.kiev.ua

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГОМ ТРУБОПРОВОДЕ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ОСЕВОМ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Коваленко А.П.

Трубопроводы включают в себя (как правило) протяженные прямолинейные участки. Поскольку исследуются переходные процессы, то такие трубопроводы можно рассматривать как полубесконечные цилиндрические оболочки. Во многих случаях трубопроводы можно также рассматривать как тонкостенные оболочки в классическом понимании ($h/R \le 0{,}1$, h – толщина стенки оболочки; R – срединный радиус оболочки). Для слабовязких жидкостей (в том числе и газа) жидкость можно изучать в акустическом приближении. При исследовании переходных процессов важно, чтобы уравнения движения системы смогли отображать волновые процессы при указанных режимах движения. Поэтому для описания движения оболочки выбираем уравнения движения по модели Тимошенко, а жикость рассматриваем в акустическом приближении, что также позволяет рассматривать волновые процессы в жидкости.

На торце оболочки $x = 0$ прикладывается импульсная нагрузка по заданному закону $f(t)\cdot\eta(t)$, где $f(t)$ – закон задания импульсной нагрузки, $\eta(t)$ – функция Хэвисайда. Задача исследуется в безразмерных величинах. За характерную длину L выбрано радиус оболочки, т.е. $L = R$, а за характерное время T выбрана величина $T = R\sqrt{\dfrac{(1-\nu^2)\rho_1}{E}}$, где ν, E, ρ_1 – коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность материала оболочки соответственно. При таком выборе характерных величин безразмерная продольная скорость возмущений в оболочке $C_p = 1$ (максимальная).

В результате математическую модель исследуемой задачи можно сформулировать как начально-краевую задачу математической физики [1]. При такой постановке учитывается волновой характер распространения возмущений в исследуемой гидроупругой системе. Важно также, чтобы учитывалось взаимное влияние элементов механической системы при импульсных переходных процессах. Учет такого влияния осуществляется посредством коэфициента взимосвязи $K_s = \dfrac{2R\rho_0}{h\rho_1 k^2(1-\nu)}$, входящего в поставленную начально-краевую задачу. Кроме вышеперечисленных величин в этот коэффициент входят ρ_0, k^2 – плотность жидкости в состоянии покоя и коэфициент сдвига по модели Тимошенко соответственно

1.Коваленко А.П. Математическое моделирование динамичкских возмущений в жидкости в системе полубесконечная цилиндрическая оболочка с жидкостью при осевом импульсном нагружении. КОНСОНАНС-2009, Акустичний симпозіум (29.09-01.10. 2009 р.), Збірник праць.-Київ.-2009 –с.207-212.

Коваленко Анатолий Петрович, кандидат. физ.-мат.наук, ст.сн.с.
Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
e-mail: dynamic@inmech.kiev.ua
Пучка Григорий Николаевич, кандидат. физ.-мат.наук, ст.сн.с.
Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
e-mail: dynamic@inmech.kiev.ua

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Коваленко А.П., Пучка Г.Н.

В данной работе исследуется влияние газовых пузырьков на распространение синусоидальных волн в жидкости. Ограничимся, с целью сокращения выкладок, упрощенной системой уравнений, соответствующих одномерному течению, используя односкоростную модель и в отсуствии фазовых переходов [1]. Нелинейная система, описывающая движение жидкости и пузырьков газа, сведена к двум уравнениям относительно давления в жидкости p_1 и давления в пузырьке p_2. Считая отклонения всех неизвестных величин от их стационарных значений малыми, получены линеаризованые уравнения. Решения полученной системы ищутся в виде синусоидальных волн $p_1 = A_0 \exp[i(kx + \omega t)]$ и $p_2 = B_0 \exp[i(kx + \omega t)]$, где $k = k_1 + ik_2$. Коэффициенты k_1 и k_2 измеряют дисперсии и затухание соответственно. После подстановки решений p_1 и p_2 в линеаризированные уравнения получено дисперсионное соотношение, связывающее k_1 и ω, а также декремент затухания k_2. Численное исследование показало, что в случае резонанса (частота внешнего возмущения ω близка к частоте частоте пульсаций пузирька ω_0), декремент затухания сильно возрастает, а фазовая скорость близка к нулю. С ростом частоты возмущения фазовая скорость возрастает и при $\omega \approx 11\omega_0$ как фазовая скорость так и длина волны становятся бесконечно большими. С дальнейшим увеличением частоты внешнего возмущения фазовая скорость стремится к скорости звука в чистой жидкости.

1. Пучка Г.Н. О гидроударе в жидкости с пузырьками газа.//Прикл. Механика. Т.37,№2, 2001.-с.139-144.

Ковальчук Богдан Петрович, молодший науковий співробітник,
Міжнародний математичний центр НАН України ім. Ю.О. Митропольського, Київ, Україна,
e-mail: BogdanKovalchuk@gmail.com;

ПОВЕРХНЕВЕ ХВИЛЕУТВОРЕННЯ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ, ЯКИЙ ВИКОНУЄ КУТОВІ РУХИ

Ковальчук Б.П.

На основі сукупності варіаційних принципів механіки, варіаційних принципів математичної фізики і асимптотичних методів нелінійної механіки проведено дослідження нелінійної динаміки рідини обмеженого об'єму. Об'єкт дослідження являє собою систему яка складається з абсолютно твердого циліндричного резервуару на маятниковому підвісі і рідини яка його частково заповнює. Рідина приймається ідеальною, однорідною, нестисливою і в початковий момент часу безвихровою. Рух системи збурюється дією імпульсних сил та сил з круговим годографом. Математичний опис задачі представляється у вигляді сукупності кінематичних обмежень задачі і варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Поле швидкостей для випадку кутових рухів системи представляється у вигляді суми хвильового потенціалу, потенціалу поступального руху і потенціалу Стокса-Жуковського. Розглянуто побудову математичної системи мінімальної розмірності, для цього рівняння руху записуються відносно системи координат підвісу центр якої знаходиться в точці підвісу. Також проводиться повне виключення всіх кінематичних граничних умов, що дозволяє зменшити розмірність системи більш ніж в п'ять разів. Чисельна реалізація варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського виконується на основі метода Канторовича. Для практичних розрахунків було прийнято до уваги 12 узагальнених координат, що характеризують рух рідини. Побудовано нелінійну дискретну модель сумісного руху системи орієнтовану на дослідження перехідних процесів в тому числі при імпульсному збудженні руху.

Розглядалася дія на резервуар заповнений водою групи імпульсів, при цьому дія всіх імпульсів приводила до однакої кількості руху, для порівняння розглядалися різні довжини підвісу, маса резервуара приймалася в 4 рази меншою маси рідини. Показано, що найбільші збурення вільної поверхні рідини виникають при дії імпульсу у вигляді рівнобічного трикутника а найменші для імпульсу у вигляді прямокутника. Зроблено висновки щодо збудження нелінійностей в залежності від форми імпульсів і дано порівняння одержаних результатів для випадку поступального руху системи. Досліджено режими зародження кругової хвилі на вільній поверхні рідини при кутовому русі фізичного маятника. Збудження руху системи з початкового стану спокою здійснювалося силою з круговим годографом $F_x = A\sin\omega t$, $F_y = B\cos\omega t$. Показано, що поряд с основними режимами руху кругової хвилі коли напрямок її руху збігається з напрямком обертового руху резервуару, існують режими при яких азимут кругової хвилі не змінюється або змінюється в протилежному напрямку, було зазначено що такі режими у випадку поступального руху системи виникають для резонансних частот збуджуючої сили. Також було помічено, що в околі частоти збуджуючої сили $\omega = 2{,}2$ поведінка системи резервуар–рідина має більш збурений характер, ніж при інших частотах.

1. Лимарченко О. С., Д. Матараццо, В. В. Ясинский. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью — Киев: ГНОЗИС, 2002. — 304 с.
2. Абгарян К. А., Рапопорт И. М. Динамика ракет. — М.: Машиностроение, 1969. — 378 с.

Козуб Юрий Гордеевич, кандидат техн. наук, доцент
Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко, Луганск, Украина,
e-mail: kosub@ramler.ru;
Козуб Галина Александровна, кандидат техн. наук, доцент
Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко, Луганск, Украина,
e-mail: kosub@ramler.ru;

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Козуб Ю.Г., Козуб Г.А.

В машиностроении и строительстве широкое распространение получили вязкоупругие демпфирующие элементы конструкций. Наиболее широко используются резиновые виброизоляторы. В динамических расчетах таких элементов конструкций следует учитывать эффекты демпфирования и слабую сжимаемость резиновых элементов конструкций. Наиболее эффективным для описания вязкоупругих свойств является применение уравнений Вольтерра. Для вязкоупругих материалов коэффициенты демпфирования являются функциями частоты колебаний и реологических параметров материала. Задача динамического деформирования вязкоупругих элементов конструкций сложной пространственной формы достаточна сложная и требует использования численных методов решения. Одним из наиболее эффективных методов является метод конечных элементов.

Компоненты матрицы жесткости вычисляются на основе тройной аппроксимации полей перемещений, деформаций и функции изменения объема [1].

Компоненты матрицы масс вычисляются на основе предположения об однородности элемента конструкции.

Определение матрицы демпфирования с помощью матриц, описывающих свойства конечных элементов не представляется возможным. Поэтому чаще всего ее приближенно вычисляют в виде линейной комбинации матриц жесткости и масс.

Для системы конечных элементов при отсутствии демпфирования решение можно представить в виде разложения по собственным векторам. Из решения общей проблемы собственных значений необходимо определить частоты и формы собственных колебаний.

Используя М-ортогональность собственных векторов с использованием матрицы, составленной из собственных векторов столбцов, определяем соотношения для матрицы демпфирования [2].

Для получения численных значений компонент матрицы демпфирования необходимо определить коэффициенты демпфирования хотя бы двух форм собственных колебаний, что соответствует релеевскому демпфированию.

Прямое интегрирование уравнений динамического деформирования чаще всего выполняется на основе метода Ньюмарка. Получены соотношения метода Ньюмарка для уранения динамики с демпфированием.

На основе рассмотренного подхода решены ряд практических задач о динамическом деформирования резиновых элементов конструкций.

1. Киричевский В.В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. – К.: Будівельник, 1992. – 216с.
2. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 470с.

Косткін Корній Костянтинович, аспірант, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: kornejk@gmail.com

АДВЕКЦІЯ РІДИНИ ПІД ДІЄЮ П'ЯТИ ТОЧКОВИХ

Косткін К.К.

Основною метою даної роботи є моделювання руху рідини під дією скінченного вихрового ланцюжка. Який складається з п'яти точкових вихорів, розташованих на одній прямій. В початковий момент часу вихори розташовано на однаковій відстані один від одного, також усі вихори, крім центрального мають однакову інтенсивність. Розглянуто кілька випадків, в залежності від інтенсивності центрального вихору.

Для досягнення поставлених задач розроблено алгоритм, що дозволяє моделювати траєкторії руху вихорів системи, рух виділеної області рідини. При цьому досліджувана область залишається неперервною, та зберігає початкову площу під час деформацій.

Першим досліджуваним випадком є випадок, коли центральній вихор має таку саму інтенсивність, як і інші вихорі. Також виявлено та досліджено випадок, коли крайні вихорі обертаються попарно по стаціонарних траєкторіях. І розглянуто ще кілька випадків, в залежності від величини інтенсивності центрального вихору.

Досліджено стійкість траєкторій руху вихорів структур, особливості руху рідини, в залежності від початкового її положення та конфігурації системи.

1. Мелешко В.В. Динамика вихревых структур / В.В. Мелешко, М.Ю. Константинов. – Киев: Наукова думка, 1993. – 283 с.

Краснопольская Татьяна Сигизмундовна, д.ф.м.н.
Спектор Вячеслав Михайлович, аспирант,
Институт гидромеханики НАНУ, Киев, Україна,
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl, v.m.spektor@gmail.com;

ПЕРЕКАЧКА ЭНЕРГИИ В КРЕСТОВИДНЫЕ ВОЛНЫ В ДЛИННЫХ КАНАЛАХ

Краснопольская Т. С, Спектор В. М.

Погруженные в жидкость колеблющиеся тела создают вокруг себя на свободной поверхности волны различной природы. Некоторые из такого рода волн до сих пор не получили полного объяснения механизма своего возбуждения. Это, прежде всего, так называемые «крестовидные волны»(«cross waves»), которые впервые обнаружил и описал Фарадей в своей знаменитой работе 1831 года [1]. Именно в этой работе он также привел полное описание своих наблюдений о появлении волн на свободной поверхности слоя жидкости при вертикальных колебаниях. Эти волны впоследствии получили название фарадеевских или параметрических и на сегодняшний день имеют достаточно полное теоретическое объяснение, начавшееся с Рэлея [2]. В этой же работе Фарадей подробно описал следующий эксперимент: при погружении в жидкость вертикально одним концом деревянной дощечки и ее горизонтальных колебаниях по обе стороны дощечки, перпендикулярно к ней, возникали волны, как зубья горизонтально лежащей гребенки. Эти волны, образующие прямой угол в горизонтальной плоскости с направлением движения дощечки, получили название ``крестовидные''. Помимо крестовидных волн колеблющиеся тела--волнопродукторы на поверхности жидкости возбуждают также обычные резонансные волны, распространяющиеся вдоль направления колебаний волнопродуктора. Эти волны возбуждаются при низких частотах и имеют амплитуды, меньшие по величине, чем крестовидные. Интерес представляет анализ перехода от одного класса волн к другому, классификация и условия резонансов, сравнение теоретических выводов с результатами экспериментальных исследований. Именно таким вопросам посвящен настоящий доклад, в котором рассматриваются возможные волновые структуры на свободной поверхности жидкости в прямоугольном бассейне, когда один его торец является волнопродуктором. Гаррет [3] первым показал, что крестовидные волны возникают вследствие наличия колебаний среднего уровня жидкости, т. е. не будь колебаний среднего уровня -- не будет крестовидных волн. Однако, он все-таки указывал, что для возбуждения крестовидных волн колебания среднего уровня могут быть недостаточны для существования таких волн. Крестовидные волны должны получать энергию непосредственно от колебания волнопродуктора, но доказать это математически он не сумел. Впервые в настоящем докладе предлагается использовать (новый для задач возбуждения волн) аналитический метод суперпозиции Ляме [4], что дает ясную физически прозрачную картину перекачки энергии от волнопродуктора в крестовидные колебания свободной поверхности жидкости.

1. *F*araday M. On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Phil. Trans. R. Soc. London. -- 1831. -- A121, -- P.299-340.
2. *R*ayleigh. On the crispations of fluid resting on a vibrating support // Phil. Mag. (Ser. 5). -- 1883. -- 16, -- P. 50-58.
3. *G*arrett C. J. R. Cross waves // J. Fluid Mech. -- 1970. -- 41,-- P.837-849.
4. *L*amé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. -- Paris: Bachelier, 1852. -- 335 p.

Крук Леся Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Национальный транспортный университет, Киев, Украина,
e-mail: krukles@ukr.net ;
Ковальчук Петр Саввич, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт механики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: volna@inmech.kiev.ua

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСЫ

Крук Л.А., Ковальчук П.С.

Излагается методика численно-аналитического расчета нестационарных колебательных процессов, возникающих в элементах трубопроводов, транспортирующих жидкость, которая полагается идеальной и несжимаемой. Трубопровод моделируется ортотропной цилиндрической оболочкой конечной длины при реализации на ее краях двух видов граничных условий: «классического» свободного опирания и жесткого защемления. Скорость движения жидкости предполагается пульсирующей, причем частота пульсаций медленно изменяется во времени по линейному или квадратичному закону. Главное внимание уделяется исследованию нелинейных явлений «прохождения» связанной оболочечно-жидкостной системы через главный ($\omega \approx \nu/2$) и побочный ($\omega \approx \nu$) параметрические резонансы (здесь ω – частота колебаний несущей оболочки в момент динамической, типа флаттер, устойчивости; $\nu = \nu(t)$ – переменная частота пульсаций скорости жидкости). Система разрешающих уравнений, на основе которой проводился анализ резонансных колебаний, имеет вид

$$\ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U^2(t)) f_k + \varepsilon_k \dot{f}_k + \sum_{j=1}^{4} \beta_{jk} U(t) \dot{f}_j = \varepsilon F_k(\{f_j\}, \{\dot{f}_j\}), (0 < \varepsilon << 1), \quad (1)$$

где f_k – обобщенные координаты (k = 1÷ 4); $\omega_k, \alpha_k, \varepsilon_k, \beta_{jk}$ – постоянные параметры, F_k – нелинейности геометрического и демпфирующего характера, $U = U_0 + \varepsilon\mu(t)\cos\theta(t)$ – скорость потока жидкости (U_0 = const; $d\mu/dt = \gamma_1(t)$, $d\theta/dt = \gamma_2(t)$ – медленно изменяющиеся функции времени). При решении уравнений (1) использовался одночастотный метод Боголюбова-Митропольского. Для каждого из резонансов предварительно были построены амплитудно-частотные характеристики в случае $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 0$. Методом численного интегрирования получены зависимости $a=a(t)$, $\theta = \theta(t)$, характеризующие уровни амплитуды и фазы одночастотного режима при прохождении зон резонанса. Рассмотрены процессы прямого и обратного прохождения данных зон при варьировании скоростей прохождения. Установлен ряд новых закономерностей поведения оболочки как в резонансной, так и в околорезонансной областях при различных скоростях движения жидкости U_0, варьировании параметров демпфирования ε_k, параметров волнообразования.

Крысько Антон Вадимович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Энгельсский технический институт, Энгельс, Россия,
e-mail: anton.krysko@gmail.com;
Яковлева Татьяна Владимировна, аспирант кафедры «Математика и моделирование»,
Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия,
e-mail: yan-tan1987@mail.ru;
Папкова Ирина Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук,
Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия,
e-mail: ikravzova@mail.ru;
Крылова Екатерина Юрьевна, аспирант кафедры «Математика и моделирование»,
Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия,
e-mail: kat.krylova@bk.ru;
Крысько Вадим Анатольевич, доктор техн. наук, профессор,
Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия,
e-mail: tak@san.ru;

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ БАЛОЧНО-ПЛАСТИНЧАТО-ОБОЛОЧЕЧНЫХ СТРУКТУР

Крысько А.В., Яковлева Т.В., Папкова И.В., Крылова Е.Ю., Крысько В.А.

В работе построена математическая модель нелинейной динамики распределенных балочно-пластинчато-оболочечных структур, связанных между собой через краевые условия. Материал элементов структуры является изотропным, но не однородным. Учитывается физическая нелинейность по деформационной теории пластичности и геометрическая нелинейность по теории Теодора фон Кармана. Между элементами структуры существует контактное взаимодействие. Из вариационных принципов Гамильтона – Остроградского получены исходные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. С помощью методов конечных разностей по пространственным координатам и конечных элементов в форме Бубнова – Галеркина искомая система сводится к задаче Коши. Обыкновенные дифференциальные уравнения решаются несколькими модификациями методов типа Рунге – Кутта от второго до восьмого порядка. Исследуется сходимость указанных методов. Задача рассматривается как система с бесконечным числом степеней свободы [1-4]. Применяются методы нелинейной динамики. Анализируются сигналы, фазовые портреты, отображения Пуанкаре, знаки Ляпуновских показателей, автокорреляционных функций, спектры мощности, полученные с помощью Фурье и вейвлет преобразований. Изучается пространственно-временной хаос. Сформулированы новые сценарии перехода колебаний балочно-пластинчато-оболочечных структур из гармонических в хаотические, которые существенно отличаются от классических сценариев Фейгенбаума, Помо-Манневиля и Рюэля-Таккенса-Ньюхауза, полученных для систем с малым числом степеней свободы.. Предложен новый метод анализа фазовой синхронизации нелинейной динамики балочно-пластинчато-оболочечных структур.

1. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Chaos in Structural Mechanics. – Springer: Berlin, London, 2008, 424p.
2. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. Thermo-dynamics of plates and shells. Springer: Berlin, London, 2007. 777 p.
3. Awrejcewicz J.A., Krys’ko V.A., Vakakis A.F. Nonlinear Dynamics of Continuous Elastic System. Berlin etc.: Springer, 2004. 350p.
4. *Awrejcewicz J., Krysko V.A.* CRC Series: Modern Mechanics and Matrhematics. Introduction to asymptotic methods. Chapman&Hall/CRC London, New York. 2006. 251 p.

Кудин Алексей Владимирович, аспирант, кафедры математического моделирования,
Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина
E-mail: kudinalex@yahoo.com;
Тамуров Юрий Николаевич, доктор физ. – мат. наук, профессор кафедры математического моделирования,
Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина

УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Кудин А.В., Тамуров Ю.Н.

В [2] на основе работы [3] получены нелинейные дифференциальные уравнения осесимметричного изгиба круглых трехслойных пластин симметричного строения с нелинейно-упругим по [1] заполнителем под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки.

Для моделирования собственных колебаний таких трёхслойных пластин воспользуемся принципом Даламбера. Дополняя уравнения [2] слагаемым, учитывающим поперечную инерцию пластины, уравнения движения могут быть представлены в виде:

$$A_1 w_{,rrr} + A_2\left(\frac{1}{r}w_{,r}\right)_{,r} + A_3 w_{,r} + A_4 u_{,rr} + A_5 u + A_6\frac{1}{r}u_{,r} + A_7\left(u_{,r}^2 w_{,rr}\right)_{,r} + A_8 u^2 w_{,r} +$$

$$+A_9\left(u_{,r}w_{,rr}^2\right)_{,r} + A_{10}\left(w_{,rr}^3\right)_{,r} + A_{11}uw_{,r}^2 + A_{12}w_{,r}^3 + A_{13}\left(u_{,r}^3\right)_{,r} + A_{14}u^3 = 0,$$

$$mw_{,tt} + A_{15}\left(w_{,rrrr} + 3\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}w_{,r}\right)_{,r}\right) + A_{16}\left(\frac{1}{r}w_{,r}\right)_{,rr} + A_{17}\left(w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r}\right) + A_{18}u_{,rrr} + A_{19}\left(\frac{1}{r}u_{,r}\right)_{,r} +$$

$$+A_{20}u_{,r} + A_{21}\left(\left(w_{,rr}^3\right)_{,rr} + \frac{9}{r^3}w_{,r}^2\left(\frac{1}{r}w_{,r}\right)_{,r}\right) + A_{22}\left(w_{,r}^3\right)_{,r} + A_{23}\left(u_{,r}^3\right)_{,rr} + A_{24}\left(u^3\right)_{,r} +$$

$$+A_{25}\left(u^2 w_{,r}\right)_{,r} + A_{26}\left(u_{,r}^2 w_{,rr}\right)_{,rr} + A_{27}\left(u_{,r}w_{,rr}^2\right)_{,rr} + A_{28}\left(uw_{,r}^2\right)_{,r} = 0,$$

где $u(r,t)$, $w(r,t)$ – радиальное перемещение и прогиб; $A_1, \ldots, A_{28}$ – коэффициенты, зависящие от механических параметров пластины; m – единичная масса пластины.

Сформулированная система нелинейных уравнений собственных колебаний обобщает ранее известные результаты, так, в случае разложения перемещений в ряды по малому физическому параметру, система уравнений нулевого приближения будет отвечать классической линейной постановке задачи. Отметим, что нелинейности в рассматриваемом случае обусловлены учётом нелинейной упругости материала, возникающей вследствие отклонения от обобщённого закона Гука (физическая нелинейность), а не вследствие учёта нелинейных соотношений Коши между деформациями и перемещениями (геометрическая нелинейность).

1. Каудерер Г. Нелинейная механика/ Пер. с нем. – М.: Изд– во иностр. лит., 1961. –777 с.
2. Кудин А.В. Уравнения осесимметричного изгиба круглых трехслойных пластин с нелинейно-упругим заполнителем / А.В Кудин // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: матер. VI Междунар. науч. конф. – Донецк, 2010. – С. 52–55.
3. Тамуров Ю.Н. Вариант обобщённой теории трёхслойных пологих оболочек с учётом обжатия физически нелинейного заполнителя // Прикл. механика, Т. 26, №12, 1990. –С. 39 – 45.

Кунец Ярослав Иванович, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
ИППММ им. Я.С. Подстригача НАН Украины, Львов, Украина,
e-mail: kunets@iapmm.lviv.ua;
Матус Валерий Владимирович, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
ИППММ им. Я.С. Подстригача НАН Украины, Львов, Украина,
e-mail: matus@iapmm.lviv.ua

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА НУЛЕВОГО ПОЛЯ

Кунец Я.И., Матус В.В.

Рассматривается задача рассеяния изгибных волн неподвижным жестким включением неканонической формы в тонкой изотропной полуограниченной пластине, лицевые поверхности которой свободны от напряжений. Изгибные колебания пластины моделируются с помощью гипотез Кирхгофа, в следствии которых уравнение ее движения имеет вид

$$\Delta^2 w(\mathbf{r}) - k^4 w(\mathbf{r}) = 0, \tag{1}$$

где $w(\mathbf{r}) = w^{in}(\mathbf{r}) + w^{sc}(\mathbf{r})$ – полный прогиб срединной поверхности пластины; $w^{in}(\mathbf{r}) = A_0 \exp(ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{l})$ – плоская волна сдвига, набегающая на включение с бесконечности; A_0 и $\mathbf{l}$ – амплитуда и направление зондирования; $\mathbf{r} = (x, y)$ – декартовы координаты срединной поверхности пластинки с началом внутри включения; $w^{sc}(\mathbf{r})$ – рассеянная включением сдвиговая волна; $k = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$ – волновое число изгибных волн; ρ, D и h – плотность, цилиндрическая жесткость и толщина пластины; ω – круговая частота колебаний.

Край пластины подвергнут различным условиям закрепления (жесткое и шарнирное закрепления, свободный и свободно опертый край), а на контуре включения полный прогиб и угол наклона нормали к срединной поверхности равны нулю.

Решения задачи ищется с помощью метод нулевого поля (МНП) [1, 2]. Он применялся многими авторами для исследования задач рассеяния электромагнитных, акустических и упругих объемных волн различными препятствиями. По сравнению с другими методами, применяемыми при решении подобных задач, МНП имеет ряд преимуществ. В частности, упрощаются соответствующие аналитические выкладки, существенно уменьшается скорость расчета значений исследуемых механических параметров. Особенно удобно пользоваться МНП в тех задачах рассеяния, постановка которых требует определения поля перемещений и напряжений вдали от неоднородности. В [2] МНП разработан для задачи рассеяния изгибных волн в бесконечной тонкой пластине. В предлагаемом докладе он модифицируется относительно задач рассеяния волн в полуограниченных пластинах. Модификация основана на использовании в интегральных представлениях прогиба пластины вместо фундаментального решения уравнения (1) соответствующей функции Грина, учитывающей условия закрепления края пластины.

1. Matus V. Wave propagation in 2D elastic composites with partially debonded fibres by the null field approach / V. Matus, Y. Kunets, V. Mykhas’kiv, A. Boström and Ch. Zhang // Waves in Random and Complex Media. – 2009. – Vol. 19, No. 4. – P. 654–669.
2. Matus V.V. T-matrix method formulation applied to the study of flexural waves scattering from a through obstacle in a plate / V.V. Matus, V.F. Emets // Journal of Sound and Vibration – 2010. – Vol. 329, No. 14. – P. 2843–2850.

Куницын Андрей Леонидович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Московский авиационный институт, Москва, Россия,
e-mail: akunityn@mail.ru;
Тхай Николай Валентинович, аспирант, механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия,
e-mail: tkhain@mail.ru

О РЕЗОНАНСНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Куницын А.Л., Тхай Н.В.

Исследуется фотогравитационная задача трех тел, в которой наряду с силами ньютоновского притяжения учитывается силы светового давления на частицу от основных тела. В случае излучения обоих основных тел с помощью такой задачи моделируется движение частицы в гравитационно-репульсивном поле бинарных звездных систем, а если излучает только одно тело, то имеем систему типа Солнце-планета-частица. Задача введена в рассмотрение В.В.Радзиевским в 1950г[1].

Коллинеарные точки либрации(КТЛ) - прелставляют положения относительного равновесия, расположенные на прямой, соединяющей основные тела. Неожиданностью в фотогравитационной постановке задачи трех тел явилась устойчивость КТЛ в линейной постановке, причем оказалось, что устойчивой может быть только внутренняя точка[2].

Уравнения в вариациях для КТЛ содержат только один параметр a [3], для значений которого в промежутке $-1/2 \le a < 0$ (преобладает световое давление) и в промежутке $8/9 \le a < 1$ (преобладает гравитация) точки существуют и устойчивы [4].

Дальнейшие несложные расчеты доказывают[5] существование в этих промежутках КТЛ, отвечающих внутренним резонансам третьего и четвертого порядков. Для резонансов третьего порядка резонансные значения параметра равны $a_{\pm}^{*} = (41 \pm 5\sqrt{145})/108$, а для резонансов четвертого порядка - $a_{\pm} = \left(68 \pm 60\sqrt{5}\right)/209$.

В работе показано, что резонанс третьего порядка приводит к "взрывной" неустойчивости положения относительного равновесия частицы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(09-01-00468, 10-01-00292).

1. Радзиевский В.В. Фотогравитационная небесная механика. Нижний Новгород : Издатель Ю.А.Николаев, 2003. 196 с.
2. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. Об коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел//Письма в АЖ. - 1983. - Т.9. №7. - С.432-435.
3. Тхай В.Н. Параметрический резонанс в задаче об устойчивости коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел// Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2001. - Ч.2. - С. 112-121.
4. А.С.Зимовщиков, Тхай В.Н. Диаграммы устойчивости для гетерогенного ансамбля частиц в коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел//ПММ. - 2010. - - Т.74, вып. 2. - С. 221-229.
5. Тхай Н.В. Устойчивость коллинеарных точек либрации при внутреннем резонансе третьего порядка// Автоматика и телемеханика. -2011.

Курпа Лидия Васильевна, доктор техн. наук, профессор каф. прикладной математики,
НТУ «ХПИ», Харьков, Украина,
Тимченко Галина Николаевна, кандидат техн. наук,
НТУ «ХПИ», Харьков, Украина,
Будников Николай Анатольевич, аспирант кафедры прикладной математики,
НТУ «ХПИ», Харьков, Украина
e-mail: nicolas.budnikov@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ

Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Будников Н.А.

Предлагается метод исследования вынужденных геометрически нелинейных колебаний многослойных пластин, которые могут иметь сложную форму в плане и различные способы закрепления, а также различные способы укладки слоев. Математическая постановка задачи выполнена в рамках классической теории, которая базируется на гипотезах Кирхгофа-Лява, принятых для всего пакета слоев пластины в целом [1]. Разработанный метод основан на комплексном применении теории R-функций [2], вариационных методов, методах Бубнова-Галеркина и Рунге-Кутта [3]. Отличительной особенностью данного исследования является использование многомодовой аппроксимации неизвестных функций по времени. Аналогично, как и в работе [4], в основу предложенного метода положено сведение нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида :

$$y_s''(t) + \omega_{Ls}^2 y_s(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_i(t) y_j(t) y_k(t) \gamma_{sijk} = \widetilde{F}_s(t).$$

Выражения для коэффициентов γ_{sijk} получены в аналитическом виде и представлены в виде двойных интегралов, зависящих от функций, найденных в процессе решения линейной задачи о колебаниях пластины и последовательности уравнений типа Ламе. Эти вспомогательные задачи решены с помощью метода R-функций (RFM).

Использование метода R-функций и созданного программного обеспечения, реализующего предложенный подход, позволяет решить достаточно широкий класс задач в этой области. Это связано с возможностью учета сложной геометрии и представления решения в аналитическом виде. Тестирование программного обеспечения, разработанного на базе предложенного алгоритма, было выполнено на задачах о вынужденных нелинейных колебаниях жестко защемленных и свободно опертых прямоугольных пластин. Проведено сравнение результатов с имеющимися в литературе. Выполнен анализ динамического поведения пятислойных пластин со сложной формой плана, построены резонансные кривые для различных способов укладки слоев и значений нагрузки.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян – М.: Наука, 1974. – 448с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир – М.: Наука, 1972. – 432с.
4. Курпа Л.В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана / Л.В. Курпа // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2008. - 51, №2. – С. 75-85.

Курчаков Евгений Евгеньевич, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела механики разрушения материалов *Института механики НАН Украины.*
Адрес для переписки – 01057, Киев, ул. Нестерова, д. 3, тел. (044)454-77-68,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua

О ЗОНЕ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ТЕЛЕ

Курчаков Е.Е.

Предложена модель нелинейно-упругого тела с трещиной нормального отрыва, являющаяся обобщением модели Леонова – Панасюка [4, 5]. При построении этой модели предполагалось, что связь напряжений с деформациями подчиняется определяющим уравнениям Каудерера. В основу предложенной модели положена концепция Желтова – Христиановича [2]. Согласно данной концепции напряжения в вершине трещины должны быть конечными, причем силы сцепления, действующие у вершины трещины, следует перевести в разряд внешних сил, что не противоречит общим принципам механики деформируемого твердого тела [1]. На продолжении трещины выделена узкая область (зона предразрушения), характеризуемая тем, что в ней оказываются несостоятельными определяющие уравнения Каудерера. Впоследствии зона предразрушения была представлена в виде разреза, к поверхностям которого приложены некоторые напряжения. Эти напряжения подлежали определению в ходе решения соответствующей краевой задачи.

В рамках предложенной модели изучена роль зоны предразрушения для частного случая обобщенного плоского напряженного состояния. Рассмотрено тонкое прямоугольное тело с центральной трещиной. Постановка краевой задачи осуществлена в перемещениях. При этом деформации допускались малыми. Путем дискретизации переменных разрешающие уравнения с частными производными сведены к системе линейных алгебраических уравнений, имеющей ленточную матрицу. Решение упомянутой системы получено по модифицированному методу Гаусса [3]. В результате выявлено влияние зоны предразрушения на раскрытие трещины, а также на размеры и форму зоны нелинейности, образующейся возле вершины трещины.

1.Баренблатт Г.И., Черепанов Г.П. О конечности напряжений на краю произвольной трещины // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 4. – С. 752 – 753.
2. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. – 1955. - № 5. – С. 3 – 41.
3. Каминский А.А., Курчаков Е.Е., Гаврилов Г.В. О влиянии растягивающей нагрузки вдоль трещины в анизотропном теле на формирование зоны пластичности // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 6. – С. 27 – 42.
4. Леонов М.Я. Элементы теории хрупкого разрушения // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1961. - № 3. – С. 85 – 92.
5. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1968. – 246 с.

Лакиза Владимир Данилович, канд. техн. наук, ст. научн. сотрудник,
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: volna@inmech.kiev.ua

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВИБРОВОЗБУЖДЕНИИ

Лакиза В.Д.

В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментальных исследований специфики нелинейных процессов деформирования упругой стенки стеклопластиковой оболочки («сухой» и с заполнителем) при осевом полигармоническом возбуждении. Установлено, при каких определенных соотношениях между двумя частотами кинематического возбуждения и собственными частотами «сухой» оболочки и оболочки с заполнителем, а также при каких уровнях вибровозбуждения реализуются наиболее интенсивные процессы деформирования стенки оболочки. Определен характер влияния заполнителя на степень реализации данных процессов. Анализ результатов исследований показал, что наиболее существенное влияние на реализацию нелинейных процессов деформирования упругих стенок оболочки наблюдается в случае суммарного воздействия одной из наименьших резонансных частот окружной формы (или частоты бегущей волны с волновым параметром n=3) с частотой, близкой к данным частотам. Такое совместное воздействие приводит к возникновению режима биения [1] (с частотой 0,1 Гц), характеризующегося в данном случае как изменением амплитуды виброускорения внешнего кинематического воздействия при постоянном уровне усилия, прикладываемого к подвижной платформе вибростенда, так и амплитуды колебаний стенок оболочки. При проведении исследований установлено, что при двухчастотном возбуждении не только интенсифицируется процесс деформирования оболочки, но и расширяется диапазон динамической неустойчивости, в котором возбуждаются интенсивные суммарные колебания этой оболочки, по сравнению с одночастотным возбуждением [2]. Наиболее существенно этот диапазон расширяется в области наименьших резонансных частот сопряженных форм с волновым параметром n=3. Также обнаружено, что специфика деформирования оболочки в области динамической неустойчивости зависит не только от частоты, но и от амплитуды внешнего возбуждения: бегущая волна реализуется при относительно больших амплитудах, а стоячая – при меньших. При этом, данные процессы при двухчастотном возбуждении реализуются при меньших амплитудах внешнего воздействия по сравнению с одночастотным вибровозбуждением. Наличие пенопластикового заполнителя в оболочке не только интенсифицирует процесс демпфирования, но и сужает область динамической неустойчивости, в которой возбуждаются интенсивные колебания стенок оболочки.

1. Иориш Ю.И. Виброметрия. – М.: МАШГИЗ, 1963. – 771 с.
2. Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т.9. Динамика элементов конструкций / В.Д.Кубенко, А.Э.Бабаев, .., В.Д.Лакиза. и др. – К.: «АСК»,1999.– 379 с.

Дмитрий Давидович Лещенко
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина
e-mail: leshchenko_d@ukr.net
Леонид Денисович Акуленко
Институт проблем механики РАН, Москва, Россия
e-mail: gavrikov@ipmnet.ru
Янина Сергеевна Зинкевич
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина
e-mail: yaninaz@mail.ru
Алла Леонидовна Рачинская
Одесский национальный университет им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина
e-mail: rachinskaya@onu.edu.ua

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Лещенко Д.Д., Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Рачинская А.Л.

Аналитически и численно исследованы задачи оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела под действием моментов сил различной физической природы. Рассматриваются вращения твердого тела при наличии моментов сил, обусловленных влиянием: а) сферической полости, заполненной жидкостью большой вязкости; б) подвижной массы, соединенной с телом упругой связью с вязким или квадратичным трением; в) линейного сопротивления внешней среды, и некоторых сочетаний вышеуказанных возмущающих факторов.

Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматривается осевое вращение для управляемого движения тела. Проведен анализ вращательных движений тела в экваториальной плоскости.

В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана) и сферический угол, установлены качественные свойства оптимального движения.

Луковский Иван Александрович, д.ф.м.н.
Солодун Олександр Васильович, д.ф.м.н.
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: lukovsky@imath.kiev.ua;

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С КОНИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ С ЖИДКОСТЬЮ

Луковский И.А., Солодун О.В.

В рамках линейного модального анализа рассматривается задача о движении осесимметричного твердого тела с осесимметричной полостью, имеющих общую продольную ось симметрии параллельную оси Ox в виде усеченного перевернутого конуса частично заполненного жидкостью. Общие уравнения движения имеют вид:

$$(m_0+m_1)w_3+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\ddot{\beta}_i=P_3,$$

$$(J_{22}^0+J_{22}^1)\dot{\omega}_2+j\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\beta_i+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{0i}\ddot{\beta}_i=M_2^{G_0}, \tag{1}$$

$$\mu_i(\ddot{\beta}_i+\sigma_i^2\beta_i)+\lambda_{i3}w_3+\lambda_{0i2}\dot{\omega}_2=0,\quad i=1,2,\ldots,$$

где m_0, m_1 - масса твердого тела и жидкости; J_{22}^0 - момент инерции твердого тела относительно оси Oy; P_3 - проекция главного вектора внешних сил $\vec{P}$ на ось Oz; $M_2^{G_0}$ - проекция главного момента внешних сил относительно точки центром инерции системы G_0 на ось Oy; j - проекция вектора кажущегося ускорения $\vec{w}$ на ось Ox; ω_2 - проекция вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ относительно точки O на ось Oy; $\beta_i(t)$ - обобщенные координаты; $\mu_i, \lambda_i, \lambda_{0i}$ - гидродинамические коэффициенты (присоединенные массы и моменты) уравнения движения (1).

Эффективность использования (1) всецело зависит от того, насколько точно определяются гидродинамические коэффициенты, которые зависят от решений спектральной краевой задачи о собственных колебаниях и задачи Неймана о потенциалах Стокса-Жуковского. В рассматриваемом случае эти задачи не имеют точных решений. Достоверность приближенных решений этих задач повышается при использовании встречных численных методов [1], которые в данной работе представлены вариационным методом и методом определения потенциалов волновых движений жидкости (близких к точным в окрестности невозмущенной свободной поверхности Σ_0) по заданному спектру свободных колебаний жидкости [1,2]. Последние ``поверхностные" потенциалы названы асимптотическими представлениями точных решений спектральных краевых задач о волновых движениях ограниченного объема жидкости в окрестности Σ_0.

1. *Луковский И. А.* Об одном приближенном методе определения гидродинамических коэффициентов уравнения возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью.// В кн.: Гидроаэродинамика. Изд-во Харьковского ун-та, Х., - 1965, 1.

2. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. - Киев: Наукова думка. - 1984, - 212 с.

Мазнев Александр Владимирович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Донецкий национальный университет, Донецк, Украина,
e-mail: maznev_av@rambler.ru;
Котов Герман Александрович, аспирант математического факультета,
Донецкий национальный университет, Донецк, Украина,
e-mail: kotov_ga@rambler.ru

ОДИН КЛАСС ПРЕЦЕССИОННО-ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Мазнев А.В., Котов Г.А.

Движения гиростата, имеющего неподвижную точку, могут быть разбиты на определенные классы, которые определяются свойствами движения. Так, например, большой интерес представляют два класса движения. Первый класс характеризуется постоянством угла между двумя осями с общим началом в неподвижной точке и неподвижными соответственно в теле и в пространстве. Они называются прецессиями гиростата. Второй класс называется классом изоконических движений и характеризуется симметричностью подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости относительно касательной к ним плоскости, содержащей неподвижную точку. Если движение гиростата обладает двумя указанными свойствами, то оно называется прецессионно-изоконическим [1].

В случае, когда гиростатический момент равен нулю, а гиростат движется под действием силы тяжести, примером прецессионно-изоконического движения может служить регулярная прецессия Гриоли относительно наклонной оси. В обобщенной задаче о движении гиростата, описываемой уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона, примеров прецессионно-изоконических движений значительно больше. Они характеризуются постоянством гиростатического момента. Поэтому исследование прецессионно-изоконических движений гиростата в случае переменного гиростатического момента является актуальным.

Доклад посвящен изучению прецессионно-изоконических движений гиростата в поле силы тяжести в случае, когда прецессионное движение является прецессией второго типа (скорость собственного вращения постоянна). Получено новое решение уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом, которое характеризуется условием, что скорость прецессии и величина гиростатического момента являются элементарными функциями времени. Аналога этого решения в классической задаче, описываемой уравнениями Эйлера-Пуассона нет, поскольку Г.В. Горром доказана динамическая невозможность прецессии второго типа в указанной задаче.

1. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.

Мазур Ольга Сергіївна, кандидат фіз.-мат. наук,
Національний технічний університет «ХПІ»,
e-mail: mazur.olga@mail.ru;
Ткаченко Вікторія Валерівна,
Національний технічний університет «ХПІ»,
e-mail: victoria_tkachenko@mail.ru

ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН ЗІ СКЛАДНОЮ ГЕОМЕТРІЄЮ

Мазур О.С., Ткаченко В.В.

Робота присвячена розробці методу дослідження параметричних коливань та динамічної стійкості багатошарових пластин симетричної структури зі складною формою плану. Актуальність даної задачі обумовлена широким застосуванням в різних сферах промисловості пластинчатих елементів, виготовлених з композитних матеріалів. Слід зауважити, що пластини, які моделюють реальні об'єкти, нерідко мають складну геометричну форму. Тому дослідження стійкості та параметричних коливань пластин зі складною формою викликає особливий інтерес серед вчених.

Дослідження такого класу задач є важливим питанням, оскільки періодичне навантаження діюче в серединній площині пластини, при відповідних умовах викликає інтенсивні поперечні коливання, що може призводити до порушення цілісності конструкції.

Запропонований в даній роботі метод базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методів (RFM). Зазначений підхід має деякі переваги, серед яких, в першу чергу, можливість будувати системи базисних функцій в аналітичній формі. Побудовані за допомогою RFM базисні функції точно задовольняють необхідним граничним умовам. Завдяки оригінальному представленню невідомих функцій та розв'язанню низки допоміжних лінійних задач, дослідження нелінійної системи в частинних похідних зводиться до розв'язання нелінійного звичайного рівняння з періодичними коефіцієнтами. Даний підхід було застосовано для дослідження параметричних коливань орторопних пластин [3]. В представленій роботі описаний метод розвинуто на багатошарові пластин складної геометрії.

Запропонований підхід чисельно реалізовано в рамках системи POLE-RL. Проаналізовано вплив геометричних параметрів, способів укладки шарів, параметрів навантаження та граничних умов на критичні навантаження та амплітудно-частотні залежності. Тестовий приклад порівнювався з відомими результатами [4]. Розв'язано задачі для ортогонально-армованих 3-х та 5-ти-шарових пластин, а також для перехресно-армованих пластин для різних значень кута осей ортотропії. Побудовано області динамічної нестійкості та амплітудно-частотні характеристики для багатошарових пластин, виготовлених з вуглепластику, стекло пластику та інших матеріалів.

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин – М.: Гостехиздат, 1956. – 500 с.

2. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек./ Л.В.Курпа // Харьков, НТУ «ХПИ» – 2009. – 408с.

3. Курпа Л.В. Параметричні коливання пластин складної форми плану / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Машинознавство. – 2008. – №3 (33). – С. 9-15.

4. Singha M.K. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates. / M.K. Singha, R. Daripa // – Journal of Sound and Vibration. – 2009. – p.541-554.

Максимюк Володимир Ананійович, доктор фіз.-матем. наук, старший наук. спів.;
Сторожук Євген.Анатолійович, доктор фіз.-матем. наук, проф.;
Чернишенко Іван Семенович, член-кор. НАН України, доктор техн. наук, проф.;
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, м. Київ, Україна,
e-mail: desc@inmech.kiev.ua

ДО ПРОБЛЕМИ РЕАЛІЗАЦІЇ ГІПОТЕЗ КІРХГОФА – ЛЯВА У ЧИСЕЛЬНИХ СІТКОВИХ МЕТОДАХ РОЗРАХУНКУ ТОНКИХ ОБОЛОНОК

Максимюк В.А., Сторожук Є.А., Чернишенко І.С.

Досвід розрахунків напружено-деформованого стану тонких [1] й нетонких [2] оболонок з ізотропних металічних та анізотропних композитних матеріалів дозволяє сформулювати деякі загальні положення щодо розглядуваної проблеми.

Розв'язування задач статики аналітичними, аналітично-чисельними методами та методом скінченних різниць є простішим для тонких оболонок, ніж для оболонок з малою зсувною жорсткістю, оскільки в першому випадку маємо систему рівнянь меншого порядку, а реалізація гіпотези Кірхгофа – Лява шляхом підстановки відповідних співвідношень у формули для розподілу переміщень по товщині оболонки, тобто аналітично, ніяких ускладнень не викликає.

Натомість, систему розв'язувальних рівнянь у випадках застосування варіаційно-різницевого методу (ВРМ) та методу скінченних елементів (МСЕ) одержують з умови екстремуму певного функціоналу. Застосування аналітичного способу реалізації гіпотез Кірхгофа – Лява приводить у цих випадках до появи у функціоналах похідних від переміщень вище першого порядку. А оскільки МСЕ висуває певні вимоги до гладкості координатних функцій і до наявності вищих похідних у підінтегральних виразах, то це ускладнює побудову самого елемента. При використанні ВРМ ускладнення обмежуються тільки громіздкішими рівняннями. Отже, з погляду застосування МСЕ розрахунок тонких оболонок є складнішим, ніж оболонок з малою зсувною жорсткістю.

Це привело до широко розповсюджених спроб пристосування [1] зсувних моделей типу Тимошенка для розрахунку тонких оболонок з відмовою від гіпотез Кірхгофа – Лява. Проте пряме застосування зсувних моделей МСЕ до тонкостінних конструкцій наштовхується на так звану проблему зсувного замикання [2]. Ці обставини привели до пошуку інших способів [1] реалізації гіпотез Кірхгофа – Лява, серед яких дискретне задання гіпотез в окремих точках елемента, метод штрафних функцій, застосування дельта-функції Дірака для інтерполяції множників Лагранжа, часткове врахування гіпотез та деякі евристичні підходи.

Авторами запропоновано математично коректні аналітичні та алгоритмічні підходи до реалізації гіпотез Кірхгофа – Лява в сіткових методах для дослідження нелінійного деформування тонких оболонок з отворами. Ідея алгоритмічного підходу полягає в накладанні за допомогою множників Лагранжа обмежень, що випливають з геометричної частини гіпотез Кирхгофа – Лява, на теорію оболонок типу Тимошенка. Отриманий в такий спосіб функціонал для тонких оболонок не містить похідних вище першого порядку, а множники Лагранжа, на відміну від інших подібних підходів, є такими ж варійованими функціями як і основні незалежні функції задачі (переміщення, кути повороту). На основі розробленої методики чисельно розв'язано широкі класи лінійних та нелінійних задач для тонких оболонок складної форми.

1. Максимюк В.А., Сторожук Е.А., Чернышенко И.С. Решение нелинейных задач статики тонких оболочек сеточными методами // Прикл. механика.–2009.– **45**, №1.– С.41–70.
2. Максимюк В.А., Чернышенко И.С. Смешанные функционалы в теории нелинейно-упругого деформирования оболочек // Прикл. механика.-2004.-**40**, №11. С.45-84.

Маркеев Анатолий Павлович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук ,Москва, Россия
e-mail: markeev@ipmnet.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Маркеев А.П.

Рассматривается движение маятника в однородном поле тяжести в заданной неподвижной вертикальной плоскости. Маятник представляет собой материальную точку веса mg, прикрепленную к одному из концов нерастяжимой невесомой нити переменной длины. Решается задача о существовании и устойчивости по Ляпунову такого движения маятника, при котором угол φ, образуемый нитью и вертикалью, равномерно изменяется во времени:

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0$$

где Ω, φ_0 – постоянные величины.

Установлено, что это равномерное вращение маятника существует только в том случае, когда длина нити $\ell(t)$ меняется по гармоническому закону с частотой, равной Ω:

$$\ell = \ell_0(1 + e\cos\varphi)$$

где ℓ_0 – средние значение длины нити, а e – постоянный положительный коэффициент,

$$e = \frac{g}{2\Omega^2\ell_0}$$

Этот коэффициент должен лежать в интервале (условие того, что во все время движения нить маятника является натянутой)

$$0 < e < 1/4$$

При помощи методов Ляпунова [1] и современной теории устойчивости гамильтоновых систем [2,3] решена нелинейная задача об устойчивости рассматриваемого вращения маятника для всех значений e из указанного интервала.

Показано, что если $e = 0.1273$, или $e = 0.1544$, или $0.1766 < e < 1/4$, то вращение маятника неустойчиво. При остальных значениях e из интервала $0 < e < 1/4$ имеет место устойчивость по Ляпунову

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00322, 10-01-00381) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ-3797.2010.1).

1. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
2. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.
3. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

Мартиросян Стелла Размиковна, к.ф.м.н., Белубекян М.В., Саноян Ю.Г.,
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения,
e-mail: mechinsstella@mail.ru;

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПАНЕЛЬНОГО ФЛАТТЕРА

Мартиросян С.Р., Белубекян М.В., Саноян Ю.Г.

Исследуется эффект дестабилизации для Исследуется эффект дестабилизации для различных моделей конструкционного

трения в опорах в задаче устойчивости тонкой упругой удлиненной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, в предположении, что одна из длинных кромок имеет жесткое скользящее закрепление (скользящий контакт), а другая - шарнирное закрепление. Остальные две кромки свободные. При этом учитываются вязкоупругие свойства шарнира и скользящего контакта.

Аналитическими методами исследования получены значения критической скорости потока, приводящие к флаттерной и дивергентной неустойчивости, соответствующие различным моделям конструкционного трения. Найдены границы значений коэффициентов трения, при которых имеет место эффект дестабилизации. Для возможности применения аналитических методов, поставленная задача сведена к задаче, в которой распределенная масса пластинки и сила сопротивления внешней среды условно заменены сосредоточенными инерционными массой и моментом, приложенных на закрепленных кромках [1,2].

цилиндрическая жесткость на изгиб, - коэффициент сопротивления среды.

Аналитическими методами исследования получены значения критической скорости потока, приводящие к флаттерной и дивергентной неустойчивости, соответствующие различным моделям конструкционного трения. Найдены границы значений коэффициентов трения, при которых имеет место эффект дестабилизации. Для возможности применения аналитических методов, поставленная задача сведена к задаче, в которой распределенная масса пластинки и сила сопротивления внешней среды условно заменены сосредоточенными инерционными массой и моментом, приложенных на закрепленных кромках [1,2].

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. - М.: Наука, 1961. -329 с.

2. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Флаттер пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенной массы на кромках // ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006.- 49. № 3. - С. 162-167.

Марчук Михайло Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна,
e-mail: marchuk@iapmm.lviv.ua; mmv1956@hotmail.com;
Муха Ігор Стефанович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: imukha@franko.lviv.ua;
Горячко Тарас Всеволодович, студент 5-го курсу, факультет прикладної математики та інформатики,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: taras.horyachko@gmail.com

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН І ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ НА ОСНОВІ УТОЧНЕНОЇ МОДЕЛІ ТА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Марчук М.В., Муха І.С., Горячко Т.В.

Пластинчасті та оболонкові композитні елементи широко застосовуються в різноманітних конструкціях і технічних засобах в якості тримких елементів. У більшості випадків вони піддаються інтенсивним поперечним навантаженням, котрі можуть бути причиною прогинів, співмірних з товщинами вказаних тонкостінних елементів. Це в свою чергу зумовлює геометрично нелінійний характер їх напружено-деформованого стану.

У пропонованій доповіді розглянуто випадок деформування жорстко защемлених вздовж видовжених сторін пластин-смуг і циліндричних панелей внаслідок дії поперечного навантаження. Напружено-деформований стан описано співвідношеннями уточненої геометрично нелінійної теорії оболонок, що враховує найбільш специфічні властивості композитів – анізотропію пружних характеристик і податливість до трансверсального зсуву та стиснення [1]. В даному випадку знайдені аналітичні розв'язки. Для порівняння отриманих результатів розглянуто підхід на основі використання просторових співвідношень нелінійної теорії пружності [2, 3]. Чисельний розв'язок отримано шляхом застосування методу Рітца до лінеаризованого функціоналу енергії деформації та використання квадратичної апроксимації переміщень за поперечною координатою. В тангенціальному напрямку використані ізопараметричні лінійні скінченні елементи. Відмічено досить добре співпадіння аналітичних та чисельних розв'язків.

1. Марчук М.В. Геометрично нелінійне поперечне деформування податливої до трансверсального стиснення пластини-смуги / М.В. Марчук // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 167–170.
2. Гузь А.Н. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек / А.Н. Гузь, И.Ю. Бабич. – Киев: Вища школа, 1980. – 168 с.
3. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов. – Л.-М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.

Марчук Михайло Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна,
e-mail: marchuk@iapmm.lviv.ua; mmv1956@hotmail.com;
Пакош Віра Степанівна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна,
e-mail: v.pakosh@ukr.net

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ КОМПОЗИТНИХ ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН

Марчук М.В., Пакош В.С.

Композитні пластини шаруватої структури з регульованими характеристиками міцності та матеріаломісткості є одними з найпоширеніших тримких елементів конструкцій і технічних засобів різноманітного цільового призначення. У більшості випадків вони піддаються інтенсивним динамічним, зокрема циклічним, навантаженням. Тому достовірна оцінка такої динамічної характеристики, як спектр власних частот є актуальною проблемою при їх проектуванні з метою запобігання резонансним явищам в експлуатаційних умовах.

Найбільш характерною особливістю деформування тонкостінних елементів із сучасних композитів на полімерній основі (як у статичному, так і динамічному випадках) є податливість до трансверсальних зсуву та стиснення. Слід зазначити, що на даний час в літературі наявна незначна кількість праць з дослідження коливань композитних пластин при одночасному врахуванні податливості до трансверсальних зсуву та стиснення, особливо у випадку їх шаруватої структури за товщиною. Переважна більшість результатів у цьому випадку отримана за допомогою числових методів.

У пропонованій роботі на основі варіанту уточненої теорії пластин [1] запропонована математична модель процесу вільних коливань композитних пластин шаруватої будови за товщиною при дискретному розгляді складових. Отримано аналітичний вираз для спектра власних частот двошарової пластини-смуги за умови шарнірного закріплення видовжених країв на нижній лицевій площині розглянутої структури. Проаналізовано вплив фізико-механічних характеристик і геометричних параметрів складових структури й врахування податливості до трансверсальних зсуву та стиснення на величини значень власних частот. Як частинний випадок, отримано вираз для спектру власних частот вільних коливань пластини-смуги з нанесеним на верхню лицеву поверхню тонким захисним покриттям [2].

1. Осадчук В.А. Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин / В.А. Осадчук, М.В. Марчук // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
2. Пакош В.С. Власні частоти податливої до трансверсальних зсуву та стиснення пластини-смуги з тонким покриттям / В.С. Пакош // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 172–175.

Метрикин Владимир Семенович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
НИИ прикладной математики и кибернетики Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
Зайцев Михаил Владимирович, аспирант *ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

ДИНАМИКА НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕНИЕМ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

Метрикин В.С., Зайцев М.В.

В работе [1] академик А.Ю. Ишлинский выдвинул гипотезу о том, что коэффициент трения относительного покоя (КТОП) при движении двух трущихся шероховатых тел не является постоянной величиной, а зависит и от времени их совместного движения. Эта гипотеза привлекла пристальное внимание ученых (смотри, например, [2-4]), занимающихся исследованием систем с трением, правда с большой временной задержкой, В этих работах на примере простейших нелинейных автономных динамических систем приведен ряд новых результатов. Однако до сих пор нет достаточно полных исследований даже таких автономных систем.

В настоящей работе изучается динамика конкретной системы с учетом сил трения наследственного типа, математическая модель которой представляет собой неавтономную систему с переменной структурой, Уравнения динамики рассматриваемой системы можно представить в виде

$$\begin{cases} \left|\xi - F(\tau)\right| \le 1 + \varepsilon(\tau_k), \dot{\xi} = \theta, \\ \ddot{\xi} + \xi = F(\tau) - sign(\dot{\xi} - \theta), \dot{\xi} \ne \theta \end{cases}$$

где $\varepsilon\left(\tau_k\right)$ — безразмерная характеристика КТОП, θ - безразмерная скорость.

Показано, что в трехмерном фазовом пространстве существует пластинка скользящих движений, границы которой дышат и определяются «состоянием» самой изучаемой модели.

Приведенные бифуркационные диаграммы позволили выявить основные перестройки периодических и стохастических режимов движения в зависимости от параметров системы (амплитуда и частота внешнего воздействия, скорость тела и формы функции, описывающей изменение КТОП).

1 Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. «О скачках при трении»/ А.Ю. Ишлинский, И.В. Крагельский // Журн. техн. физики. 1944. Е.14. Вып.4/5. С.276–282

2 Кащеневский Л.Я. Стохастические автоколебания при сухом трении/Л.Я. Кащеневский // Инж.-фиэ-журн. 1984. Т.47. N 1. С.142-147

3 Ветюков М.М., Доброславский СВ., Нагаев Р.Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа/ М.М. Ветюков, С.В. Доброславский, Р.Ф. Нагаев // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. N 1. С23-28

4. Метрикин В.С., Нагаев Р.Ф., Степанова В.В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа/ Метрикин В.С., Нагаев Р.Ф., Степанова В.В.// Прикл. математика и механика РАН, 1996. Т.60, вып.5. С.859-864.

Микулик Николай Александрович, доктор физ.-матем. наук, проф.
Беларус. национал. техн. у-та;
Рейзина Галина Николаевна, доктор физ.-матем. наук, проф.,
БНТУ,
e’mail: greizina@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ МНОГОФАКТОРНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В СИСТЕМАХ ВИБРОЗАЩИТЫ

Микулик Н.А., Рейзина Г.Н.

Эффективным методом получения информации для конкретных условий производства и технологии является создание (генерация) математических модулей определенных интеллектуальных упругодемпфирующих систем [1]. В зависимости от уровня (глубины, подробности) проникновения исследователя в природу происходящих в системе процессов их модели в первом приближении могут быть подразделены на макромодели (типа «черный ящик») и микромодели [2]. Одним из примеров математической микромодели является метод расчета диаграмм по упругодемпфирующим данным.

В отличие от микромоделей, математические макромодели, не описывая механизма протекающих в системе сложных явлений, позволяют быстро и с высокой точностью рассчитать интересующие исследователя виброзащиту по упругой и вязкой составляющих демпфера или решить более важную обратную задачу: определить параметры составляющих для получения заданных значений упругодемпфирующих характеристик при заданном поле (напряженности).

В качестве оптимального метода создания макромоделей виброзащитных систем авторами предложен метод множественной корреляции , основанный на получении экстремальных значений одной из функций отклика при ограничениях:

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

При условии, что *n* факторов связаны $k(k < n)$ уравнениями (моделями)

$$z_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Искомая модель имеет вид:

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1\left[\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - z_1\right] +$$
$$+\lambda_2\left[\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - z_2\right] + \ldots + \lambda_k\left[\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) - z_n\right].$$

Таким образом, задача свелась к отысканию условного экстремума.

В работе получена адекватная информативная модель управления процессом диссипации энергии, обеспечивающая достижение наилучшего сочетания упругодемпфирующих характеристик.

1. Шульман З.П., Хусид Б.М., Коробко Е.В. Системы виброзащиты на основе демпферов вязкого трения с электрореологической суспензией // ДАИ АН БССР, 1987. – Т. 31, № 8, с. 117-120.

2. Рейзина Г.Н. Особенности оптимизации параметров виброзащитных систем / Материалы VI МНТК, Т.2. Минск, 2008. Наука – образованию, производству, экономике.

Мильніков Олександр Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Тернопіль, Україна
E-mail: Alexandr@home.te.ua

ОСОБЛИВОСТІ ПОВЕДІНКИ МАТЕРІАЛІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ У ФОТОПРУЖНОСТІ ПІД ДІЄЮ ІОНІЗУЮЧОГО ОПРОМІНЕННЯ

Мильніков О.В.

В зв’язку з розробкою для розв'язків задач механіки деформованого твердого тіла (зокрема задач термопружності) методів моделювання НДС, що базуються на використанні іонізуючих опромінень [1], постає ряд питань, пов’язаних з впливом цих опромінень на фізико-механічні властивості модельних матеріалів.

Досліджувались явища, пов’язані зі змінами оптико-механічних властивостей деяких модельних полімерних матеріалів, під впливом іонізуючого γ- опромінення при використанні кобальтового джерела випромінювання.

До цих пір вважалося, що високоеластичний стан для зшитих сітчастих полімерів – це є стан, при якому виключені будь-які релаксаційні процеси. Однак досліди показують, що при дії на такий матеріал, що знаходиться у високоеластичному стані, іонізуючих опромінень, у ньому може порушуватися динамічна рівновага між процесами деструкції та зшивки, що зумовлює протікання релаксаційних явищ [2].

Ці явища можна пояснити тим, що впорядкування макромолекул під дією навантаження в зшитих компаундах ЕД-16 та ЕД-20 ускладнюється внаслідок утворення просторової решітки, яка створює захисні дії, поглинаючи енергію опромінення, внаслідок чого молекули не руйнуються. Якщо розглядати процес взаємодії радіації з полімерним матеріалом як зрівноважений процес деструкції-зшивки, а сам полімер як систему доменів-глобул, пов’язаних просторовою сіткою, то їх густина та рухомість в значній мірі будуть залежати від температури, при якій проводиться експеримент. А в склоподібному стані повзучість розвивається, на наш погляд, по типу механізму ковзання жорстких глобул за рахунок розриву міжглобулярних ділянок ланцюгів та взагалі ділянок макромолекул підвищеної енергії, що є фактором, який зменшує густину міжглобулярних зон.

При температурах високоеластичного стану густина полімерів в цілому вирівнюється за рахунок того, що при підвищених температурах розриваються водневі зв’язки, які зв’язували раніше незшиті молекули епоксидних смол у домени, та полегшується контакт вільних молекул епоксидної смоли та затверджувача.

Зразкам епоксидної смоли ЕД-20, що затверджена поліетиленполіаміном ПЕПА, на відміну від зразків ЕД-20М (малеїновий ангідрид), притаманна властивість повзучості при температурах, вищих від температури “заморожування” під впливом опромінення, мабуть можна пояснити тим, що ПЕПА має лінійну побудову й тому легко деструктує.

Залежності змін модуля Юнга $\boldsymbol{E}$, відносного оптичного коефіцієнта $\boldsymbol{C}$, коефіцієнта температурного розширення $\boldsymbol{\alpha_t}$ і т.п. виявилися якісно аналогічними при опроміненні зразків як у склоподібному, так і у високоеластичному стані. Матеріал після опромінення стає більш жорстким (зростає як модуль пружності, так і температура “заморожування” $\boldsymbol{T_з}$). Ці ефекти можна пояснити збільшенням числа поперечних зв’язків.

Хімічні дослідження показали якісне співпадання змін гель-фракції компаундів та оптико-механічних сталих при опроміненні різними дозами.

1. Савченко В.И., Шокотько С.Г. Развитие метода фотоупругости.”Тепловые напряжения в элементах конструкций”.–Киев:Наук.думка,1991.-вып.2.-С46-52.

2. Мелешевич А.П. и др. Влияние γ- излучения на некоторые физические свойства эпоксидно-диановых смол. Республик. межведомств.сб.“Синтез и исследование полимеров”. – Киев:Наук.думка, 1986. –С84-91.

Мильніков Олександр Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент.
Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Тернопіль, Україна
E-mail: Alexandr@home.te.ua
Підгурський Іван Миколайович, студент IV курсу факультету кібернетики
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕРОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ У СТЕРЖНЕВИХ СТРУКТУРАХ ЗА НАЯВНОСТІ ТРІЩИНОПОДІБНИХ ДЕФЕКТІВ

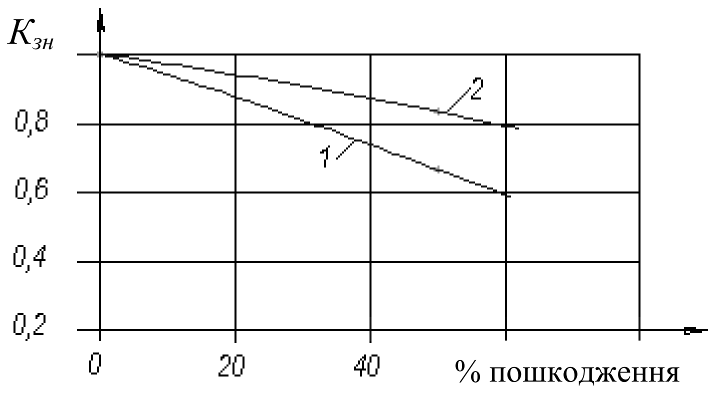
Мильніков О.В., Підгурський І.М.

Відомо, що при наявних дефектах (тріщинах) та їх розповсюдженні у статично невизначених стержневих системах відбуваються складні процеси перерозподілу напружень між елементами конструкції. Разом з тим кількісна оцінка цього явища практично відсутня, незважаючи на важливість проблеми, наприклад дослідження несучої здатності будівельних структур або рам мобільних машин при руйнуванні їх окремих елементів.

Розглядається моделювання і розрахунок НДС конструкцій з наявними тріщиноподібними дефектами на основі варіаційних принципів теорії пружності та методів механіки руйнування. У загальному випадку вираз функції потенціальної енергії деформації U для довільної системи є функцією навантаження F і невідомих зусиль $X_1 \dots X_n$: $U = f(X_1, X_2 \dots X_n, F)$. Моделюючи руйнування елемента конструкції, усуванням однієї в'язі, отримуємо: $U_1 = f(X_1, X_2 \dots X_{(n-1)}, F)$. При цьому нерівність мінімумів потенціальної енергії досліджуваних систем матиме вигляд:$U_{1min} > U_{min}$. Практично важливим є випадок розвитку тріщини від моменту зародження до досягнення граничного значення, при якому мінімум потенціальної енергії деформації U_{2min} такої системи набуватиме значення: $U_{1min} > U_{2min} > U_{min}$.

Для отримання кількісних оцінок проведено моделювання і розрахунок системи з тріщиноподібними дефектами методом скінчених елементів (МСЕ) рами мобільної машини.

Характер зміни напружень у пошкоджених вузлах засвідчив, що, у зв'язку з перерозподілом напружень між сусідніми елементами системи, а також стисненістю деформацій в рамі, номінальні напруження в нетто-перетині з дефектністю суттєво знижуються у порівнянні з нетто-напруженнями, отриманими для статично визначеної балки при однаковому початковому напруженому стані (див. рис.). Крива *1* описує зниження напружень у пошкодженому лонжероні двобалкової рами, з'єднаної поперечинами, крива *2* - у стержневій системі з трьома поздовжніми елементами у порівнянні зі статично визначеною балкою.



У зв'язку з цим, уточнене значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_1, що описує напружений стан в околі вершини тріщини визначатиметься залежністю:

$$K_{1=} = (\sigma_n \cdot K_{зн}) \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F(\varepsilon),$$

де σn – номінальні напруження у вершині тріщини; ·Kзн – коефіцієнт зменшення номінальних напружень при розвитку дефектності; a – довжина тріщини; F(ε) - поправковий коефіцієнт, що враховує геометрію тріщини. Таким чином, проведені дослідження уточнюють оцінку НДС в елементах статично невизначених конструктивних структур при розвитку них тріщин.

Михайлова Елена Юрьевна,
МАИ, Москва, Россия,
e-mail: tdv@mai.ru;
Федотенков Григорий Валерьевич, кандидат физ.-мат. наук,
Московский авиационный институт, Москва, Россия,
e-mail: tdv@mai.ru

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА УДАРА ОБОЛОЧКИ ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.

Исследуется произвольный этап взаимодействия сферической оболочки типа Тимошенко (ударник) и упругого полупространства (основание). В начальный момент времени ударник движется нормально невозмущенной поверхности основания со скоростью V_0 под действием результирующей внешней силы R_e. Решение задачи ищется в полярной системе координат, связанной с недеформированной поверхностью полупространства. Ввиду осесимметричной постановки задачи все искомые функции зависят только от полярного радиуса r и времени τ. Контакт происходит в условиях свободного проскальзывания. Постановка задачи представлена в [1].

Разрешающая система уравнений состоит из уравнения движения ударника как абсолютно твердого тела

$$h(\tau)=\frac{1}{m_0}\left[R_e\frac{\tau^2}{2}+2\pi\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{b(t)}p\left(\xi,t\right)\left(\tau-t\right)rdrdt\right]+V_0\tau\,, \tag{1}$$

соотношения для определения радиуса границы области взаимодействия

$$b\left(\tau\right)=\sqrt{h(\tau)\left(2-h(\tau)\right)} \tag{2}$$

и основного разрешающего уравнения, являющегося следствием принципа суперпозиции и граничных условии в перемещениях

$$\int_0^{\tau}dt\int\limits_0^{b(t)}\left[\Lambda(r,\xi,\tau-t)-G\left(r,\xi,\tau-t\right)\right]p(\xi,t)d\xi=V_0\tau \tag{3}$$

Замыкают систему начальные условия $b\left(0\right)=0,\ h\left(0\right)=0,\ p(0,0)=-V_0$.

В (1)-(3) $h(\tau)$ - глубина проникания ударника как абсолютно твердого тела; $b(\tau)$ - радиус области контакта; Λ, G - ядра интегральных представлений перемещений полупространства и оболочки; $p(r,\tau)$ - контактное давление.

Для данной задачи на пространственно-временную область интегрирования наносится сетка, при этом искомые функции (перемещение оболочки как абсолютно твердого тела, радиус границы области взаимодействия, контактное давление) заменяются их дискретными аналогами по времени и угловой координате. Для выражений (1), (2) строятся соответствующие квадратурные формулы, а для интегрального уравнения (3) используется неявная схема в сочетании с методом квадратур, причем сингулярные слагаемые весовых коэффициентов определяются аналитически с применением канонической регуляризации, а регулярные – численно с использованием метода Симпсона.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00289-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, госконтракт № П2235 от 11.11.2009г.

1.Афанасьева О.А. Произвольный этап взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства / О.А. Афанасьева, Е.Ю.Михайлова, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. - Вип. 11. – С. 24-31.

Новицький Віктор Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, професор
Зінчук Микола Олександрович, кандидат фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник
Приз Андрій Миколайович
Інститут математики НАН України, Київ
e-mail: novyc@imath.kiev.ua

КАНОНІЧНА ФОРМА МАТРИЦЬ МЕХАНІЧНОЇ АНАЛОГІЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

Новицький В.В., Зінчук М.О., Приз А.М.

Розглянемо деяку лінійну стаціонарну систему парного порядку

$$\dot{x} = \tilde{A}_F\, x,\;\; x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Тут $x \in \mathbb{R}_{2n}$, t_0 - початковий момент часу, матриця $\tilde{A}_F \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ задана в канонічній формі Фробеніуса [1,2]. Згідно з теоремою про механічну аналогію [3] існує таке невироджене перетворення $y = Tx, T \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$, яке дозволяє отримати для (1) її механічну аналогію:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\;\; y(t_0) = y_0, \tag{6}$$

де $y_i \in \mathbb{R}_{n\times 1}$, $B, C, I \in \mathbb{R}_{n\times n}$, I - одинична матриця, O - нульова матриця.

Означення. Якщо матриці $-C$ та $-B$ з (2) мають вигляд

$$-C = C_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -c_0 & -c_1 & & -c_{n-1} \end{bmatrix}, - B = B_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -b_0 & -b_1 & & -b_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

то будемо називати матрицю $A_F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_F & B_F \end{bmatrix}$ канонічною фробеніусовою формою механічної аналогії (2) лінійної стаціонарної системи парного порядку (1).

Теорема. *Якщо характеристичні многочлени $f(\lambda)$, $\tilde{f}(\lambda)$ відповідно матриць A_F і $\tilde{A}_F$ збігаються, то дані матриці подібні. Або існує така невироджена матриця перетворення M, що виконується рівність*

$$A_F = M\tilde{A}_F M^{-1}, \tag{8}$$

де елементи матриці $M \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ задовольняють співвідношенням

$$m_{ik} = \binom{n-i}{k-2i+1},\;\; m_{n+i,k} = \binom{n-i}{k-2i}, i = \overline{1,n}, k = \overline{1,2n}. \tag{9}$$

1. *Новицький В.В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах. К.: Ін-т математики НАН України, 2008. - 252 с.
2. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем уравнений - М.: Наука, 1985. - 296 с.
3. *Новицький В.В., Петришина Л.В.* Декомпозиція та механічні аналогії. 1. Лінійні стаціонарні системи // Вопросы аналитической механики и её применений: Праці інституту математики НАН України, **26** - К.: Ін-т математики НАН України, 1999. - С. 251-256.

Павлюк Ярослав Вікторович, молодший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенко НАН України, Київ, Україна;
Стрелець Анна Володимірівна, аспірант,
Сумський державний університет, Суми, Україна;
Фернаті Павло Вікторович, к.т.н.,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенко НАН України Київ, Україна
e-mail: pasha147@bk.ru

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ПОВЗУЧОСТІ НЕЛІНІЙНО В'ЯЗКОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ ЗА ЗМІННИХ РЕЖИМІВ НАВАНТАЖЕННЯ

Павлюк Я.В., Стрелець А.В., Фернаті П.В.

Розглядається задача розрахунку деформацій нестаціонарної повзучості, що задається у вигляді суми множин постійних напружень σ_k

$$\sigma(t) = h(t - t_1)\sigma_1 + \sum_{k=1}^{\infty} h(t - t_{k+1})\Delta\sigma_k \ , \tag{1}$$

де $h(t-\tau_k)$ – одинична функція Хевісайда, $\Delta\sigma_k$ - приріст напруження.

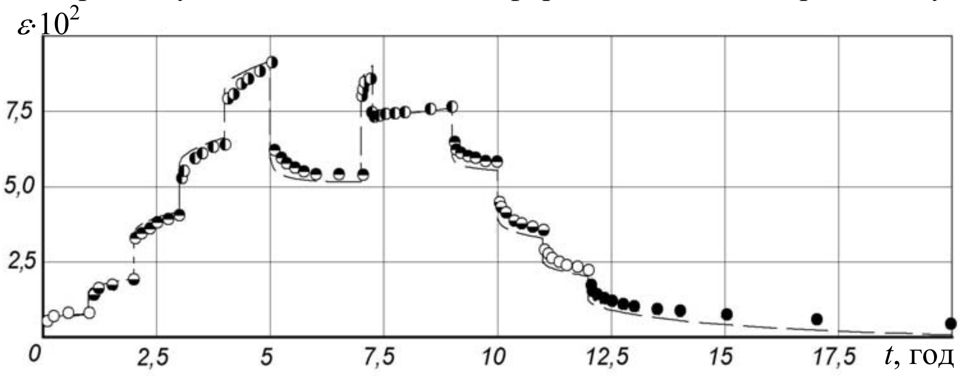
Деформації повзучості розраховуються із використанням нелінійної моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю [1], яка задається згладжуючим кубічним сплайном, за рівнянням

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,j}\left[h(t)\sigma_1\left(1+\lambda\int_0^t \frac{(-\beta)^n(\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}d\tau\right) + \sum_{k=1}^{\infty} h(t-t_{k+1})\Delta\sigma_k\left(1+\lambda\int_0^{t-t_{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n(\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}d\tau\right)\right]^i, \tag{2}$$

де ядро спадковості обране у вигляді дробово-експоненційної функції з параметрами α, β, λ .

В роботі розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку деформацій повзучості полівінілхлоридного пластикату за умов одновісного ступеневого довантаження, часткового та повного розвантаження, чергування довантажень та розвантажень, а також релаксації напружень.

У якості прикладу на мал.1. значення деформацій нестаціонарної повзучості $\varepsilon(t)$,



Мал.1. Вихідні експериментальні дані (точки) і розрахункові (штрихові лінії) значення кривих повзучості

розрахованих згідно рівняння (2), співставлено із експериментальними даними які запозичені з [2]. Отримано задовільне узгодження результатів розрахунку із експериментальними даними.

1. Павлюк Я.В., Рагулина В.С., Фернати П.В. К задаче расчета деформаций обратной ползучести нелинейно-вязкоупругих материалов при полной разгрузке // Вісник НТУУ „КПІ" – 2010. - С. 94-100.
2. Самарин Ю.П., Сорокин О.В. О ползучести поливинилхлоридного пластиката при переменных загрузках // ДАН СССР – 1970. –Том 195, №2. – сс.333 – 336.

Панченко Борис Евгеньевич, кандидат физ.-мат. наук
Институт кибернетики НАНУ имени В.М. Глушкова, e-mail: pr-bob@ukr.net

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН СДВИГА НА СИСТЕМЕ ОТВЕРСТИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЗАЩЕМЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ – ВЫСОКОТОЧНОЕ КЛАСТЕРНОЕ РЕШЕНИЕ

Панченко Б.Е.

Способ анализа произвольных предметных областей, предложенный в [1], позволяет исследовать семантику задач дифракции упругих волн сдвига на неоднородностях в изотропных средах. И обобщить программную систему, разработанную для кластерного решения таких задач [2], на случай полупространства.

В [3] получены интегральные уравнения, описывающие дифракцию гармонических стационарных волн сдвига на единственном отверстии в полубесконечной среде с защемленной границей. В настоящей работе проведено параметрическое исследование контурных напряжений на системе эллиптических или ромбических (со скруглениями) отверстий в полубесконечной среде с защемленной границей.

Численное исследование показало, что в описанном полубесконечном случае в системе отверстий также наблюдается эффект насыщения, как и в [2]. В среде с защемленной границей при линейном и симметричном относительно нагрузки расположении отверстий вдоль границы для исследования достаточно не более 9 отверстий. Дальнейшее увеличение числа отверстий не приводит к изменению характеристик стационарного волнового поля.

Для построенного алгоритма обнаружена также и MIMD-пропорция. Оказалось, что для данного алгоритма можно говорить лишь об условно-оптимальном числе процессов. Для достижения точности вычисления контурных напряжений порядка 10^{-12} достаточно 2000 точек коллокации каждого контура отверстия. Для системы из 3 – 9 отверстий условно оптимальным числом является 200 - 250 параллельных процессов. Дальнейшее увеличение числа процессов приводит лишь к незначительному снижению суммарного времени вычислений за счет независимой части алгоритма. Но также и к приросту вычислительных расходов на синхронизацию решения СЛАУ методом Гаусса.

При этом оказалось, что при фиксированной размерности матриц СЛАУ количество отверстий не влияет на оптимальное число процессов. Это обусловлено тем, что в интегральном уравнении каждый контур отверстия является лишь частью суммарного контура интегрирования. Поэтому при прочих равных условиях свойства систем линейных уравнений, полученных и для одного отверстия, и для девяти, не изменяются. Как и в случае [2], от числа отверстий не зависит также и сходимость алгоритма.

Численные эксперименты проводились на кластере «Инпарком-256». Суммарное время вычисления массива контурных напряжений на 3-х ромбических отверстиях от сосредоточенного источника гармонических сдвиговых волн, расположенного между защемленной границей и центральным отверстием на оси его симметрии, при 2000 точек коллокации и 135 параллельных процессах составляет около 4 часов.

1. Панченко Б.Е. Способ обобщенного размещения данных с учетом модифицируемости структуры хранилища // Патент Украины. – 2009. – № 92248
2. Назаренко Б.Е., Панченко Б.Е. Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной упругой среде // Проблемы программирования, Киев. - 2010. – N. 2-3, С. 604-610
3. Назаренко А.М. Динамические задачи о продольном сдвиге полупространства с неоднородностями // Сб.: Динамические системы. – Киев, 1990. – Вып. 9.- С. 47-52

Перепелкин Николай Викторович,
аспирант каф. прикладной математики, инженерно-физический ф-т.
Национальный технический университет «ХПИ»,Харьков, Украина
Михлин Юрий Владимирович,
д.ф.-м.н., профессор каф. прикладной математики, инженерно-физический ф-т.
Национальный технический университет «ХПИ»,Харьков, Украина,
e-mail: muv@kpi.kharkov.ua

НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОДИСКОВОГО РОТОРА НА МАССИВНЫХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ОПОРАХ

Перепелкин Н.В., Михлин Ю.В.

Анализ нелинейных колебаний роторных систем представляет собой нетривиальную задачу ввиду относительно большого числа степеней свободы модели. В данной работе рассматривается математическая модель статически неуравновешенного ротора с одним диском, асимметрично расположенным на упругом валу, и массивными нелинейно-упругими опорами с кубической нелинейностью. Такой характер нелинейной восстанавливающей силы в опорах может быть получен как аппроксимация более сложных зависимостей, имеющих место для опорных узлов [1].

Анализ динамического поведения ротора происходит с применением численно-аналитической методики, включающей в себя метод нормальных нелинейных форм колебаний Шоу-Пьера, обобщение метода Раушера на случай систем с несколькими степенями свободы, и метод гармонического баланса. Подобный подход применительно к системе с простым резонансом описан в книге [2]. Однако рассматриваемый ротор является системой с внутренним резонансом, поэтому предложенный в [2] метод был доработан.

Согласно используемому подходу уравнения движения ротора приводятся к главным координатам. В окрестности некоторого внутреннего резонанса две главные координаты и две соответствующие скорости (всего четыре фазовые переменные) будут иметь значительно большие амплитуды, нежели остальные. Это – активные фазовые переменные. Далее, используя концепцию метода Раушера, можно выразить члены, описывающие гармоническое возбуждение колебаний, в виде алгебраических разложений по активным переменным, используя начальное приближение решения в виде усеченных тригонометрических рядов. В результате исходная неавтономная система уравнений заменяется эквивалентной автономной. В эквивалентной системе определяются нормальные формы Шоу-Пьера, задающие однозначную зависимость всех фазовых переменных от четырех активных, что позволяет свести эквивалентную систему к уравнениям в частных производных. Зависимости между фазовыми переменными представляются в виде рядов, после чего из уравнений в частных производных определяются их коэффициенты. Имея данные зависимости, можно заменить рассмотрение исходной системы с несколькими степенями свободы системой с двумя степенями свободы. Отсюда методом гармонического баланса можно получить уточненное решение для активных переменных и при необходимости повторить процедуру.

Сравнение с результатами численного моделирования показывает хорошую точность данного подхода.

1. Кельзон А.С., Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин. Л. Машиностроение, 1977, 287 с.
2. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. М.-Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010, 704 с.

Подчасов Николай Павлович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Институт механики имени С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: npodchas@inmech.Kiev.ua

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ, ПРИ ДЕЙСТВИИ КОМБИНИРОВАННОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Подчасов Н.П.

В работе исследуется динамика заполненной идеальной, несжимаемой жидкостью, композитной, ортотропной цилиндрической оболочки с условиями свободного опирания на торцах, подверженной действию внешних периодических нагрузок. Установившиеся колебания подобных объектов исследовались в работах многих авторов, например в [1], однако переходные процессы установления таких колебательных режимов изучены еще недостаточно. Используем общую постановку гидродинамической задачи и обозначения, приведенные в [1]. В отличие от [1], здесь предполагается, что: колебания оболочки индуцируются не пульсациями давления (т.е. U=0), а действием распределенной по части ее поверхности нормальной нагрузки $q = Q(x,y)[Q_0 + Q_1 \cos\Omega t]$ и продольной нагрузки − $N(t) = N_0 + N_1 \cos 2\Omega t$; прогиб оболочки $w(x,y,t)$ имеет неотрицательное осесимметричное слагаемое, отражающее выпучивание оболочки во внутрь при больших колебаниях $W_0(x,t) = f_5(x)\, Sign\,[f_5(t)]\, f_5(t)$, т.е.

$$w(x,y,t) = [f_1(t)\cos sy + f_2(t)\sin sy]\sin\lambda_1 x + [f_3(t)\cos sy + f_4(t)\sin sy]\sin\lambda_2 x + W_0(x,t) ,$$

где $Q(x,y)$ − заданная функция координат, $Q_0, Q_1, N_0, N_1, \Omega$ −постоянные величины, $f_5(x)$ − сумма первых трех членов ряда Фурье для функции $\sin^4(\lambda_1 x)$, $f_j(t)$ − неизвестные функции $/\ j = 1,..,5\ /$.

Аналогично [1] была выведена система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций $f_j(t)$, которая решалась численно при нулевых начальных условиях. Полученные решения позволили находить огибающие прогибов произвольной точки оболочки с координатами X и Y как функции t. Характеристики эволюции этих огибающих использовались для анализа динамики оболочки на начальном этапе перехода к установившимся колебаниям. В частности, исследовалось влияние демпфирования на длительность интервала переходного процесса $[0, T_k]$. Для момента времени T_k, когда колебания можно считать установившимися, путем перебора с заданным шагом по координатам x и y были найдены те их значения $X_{\max}$, $Y_{\max}$ или $X_{\min}$, $Y_{\min}$, при которых прогиб достигает своих максимальных $W_{\max} = w(X_{\max}, Y_{\max}, T_k)$ или минимальных $W_{\min} = w(X_{\min}, Y_{\min}, T_k)$ значений. Показано, что $W_{\max}$ превышает абсолютное значение $W_{\min}$. Исследованы зависимости переменной $W_{\max}$ от частоты внешних нагрузок Ω, при фиксированных значениях Q_0, Q_1, N_0, N_1 и от значений параметров Q_0, Q_1, N_0, N_1 при фиксированном значении Ω. Установлено, что в процессе перехода к установившимся колебаниям максимальный прогиб оболочки может существенно превышать его величину при установившихся колебаниях.

1. Ковальчук П.С., Крук Л.А. Нелинейные параметрические колебания ортотропных цилиндрических оболочек при взаимодействии с пульсирующим потоком жидкости // Прикл. Механика – 2009. – 45, № 9. – С.107 – 116.

Подчасов Николай Павлович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Институт механики имени С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: npodchas@inmech.Kiev.ua

ПЕРЕХОДНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ МАЛЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ НАЧАЛЬНОГО ПРОГИБА

Подчасов Н.П.

В настоящее время большое развитие получили исследования поведения трубопроводов при течении жидкости в переходных режимах, что обусловлено широким использованием трубопроводов в энергетических и транспортных системах различных отраслей промышленности. В данной работе изучаются переходные процессы колебаний ортотропной цилиндрической оболочки с условиями свободного опирания на торцах в случае, когда внутри нее имеет место потенциальное течение с продольной скоростью $U(t)$ идеальной, несжимаемой жидкости. Предполагается, что колебания возникают вследствие малого начального деформирования поверхности оболочки. Нестационарные колебания подобных объектов исследовались в работах многих авторов, например в [1], где скорость $U(t)$ предполагалась постоянной, а нестационарность была обусловлена действием на оболочку внешних, близких к периодическим, нагрузок. Здесь исследовалось влияние характеристик изменения со временем скорости протекания на эволюцию прогиба оболочки $w(x, y, t)$, который испытывает малые начальные возмущения. С использованием общей постановки гидродинамической задачи и обозначений, приведенных в [1], динамический прогиб задавался в виде

$$w(x, y, t) = [f_1(t)\cos sy + f_2(t)\sin sy]\sin\lambda_1 x + [f_3(t)\cos sy + f_4(t)\sin sy]\sin\lambda_2 x + W_0(x, t) ,$$

где $W_0(x,t) = f_5(x)\,Sign\,[f_5(t)]\,f_5(t)$ − неотрицательное осесимметричное слагаемое, отражающее выпучивание оболочки во внутрь при больших колебаниях; $f_5(x)$ − сумма первых трех членов аппроксимации функции $\sin^4(\lambda_1 x)$ рядом Фурье; $f_j(t)$ − искомые функции $/\ j = 1,..,5\ /$. Рассматривались различные кусочно-линейные законы изменения $U(t)$ и их гладкие аналоги

$$U(t) = (U_k - U_0)\{th[5(t - \frac{t_1 + t_2}{2})/(t_2 - t_1)] + 1\}/2 .$$

Для оболочки с конкретными физическими параметрами функции $f_j(t)$ были найдены численно как решения соответствующих систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с ненулевыми начальными условиями, Это позволило исследовать эволюцию прогиба в точке, где он достигает своего максимума. Изучено влияние таких параметров как: U_0, U_k − начальная и конечная скорости жидкости; t_1, t_2− начальное и конечное время изменения скорости на характеристики переходных процессов. Установлено, что, даже при сравнительно небольших значениях U_0, U_k, в переходных режимах, по сравнению с установившимися, максимальные прогибы оболочки могут достигать существенно больших значений.

1. Кубенко В.Д.,Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Анализ нестационарных процессов в цилиндрических оболочках при взаимодействии с протекающей жидкостью // Прикл. Механика – 2010. – 46, № 10. – С.36 – 52.

П'ятецька Олена Василівна, кандидат фіз.-мат. наук, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: pyatetska@univ.kiev.ua

КОЕФІЦІЄНТ ПІДСИЛЕННЯ ПРИ АКТИВНОМУ ДЕМПФУВАННІ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ПЛАСТИН ЗА ДОПОМОГОЮ СЕНСОРІВ ТА АКТУАТОРІВ

П'ятецька О.В.

Розглядається задача про активне демпфування стаціонарних та нестаціонарних коливань тонких прямокутних пластин за допомогою включення в їх структуру шарів з в'язкопружних матеріалів та п'єзоелектричних включень, які виконують функції сенсорів і актуаторів. Включення, що виконують роль сенсорів, дають інформацію про механічний стан пластини при дії на неї механічних навантажень. Інші включення, тобто актуатори, підводять до пластини різницю потенціалів, пов'язану рівняннями зворотнього зв'язку з показниками сенсорів. У результаті змінюються жорсткісні характеристики та коефіцієнт затухання коливань пластини. У залежності від коефіцієнтів пропорційності (коефіцієнтів підсилення) можна істотно змінити динамічні властивості пластини і зменшити амплітуду коливань.

Якщо механічне навантаження заздалегідь відоме і початкові умови - нульові, то необхідність у використанні сенсора відпадає, а до актуатора підводиться різниця потенціалів такої амплітуди і фази, яка компенсує зовнішнє механічне навантаження.

Вважається, що на пластину діє нестаціонарний механічний тиск при ненульових початкових умовах. Різниця потенціалів, що знімається з прямокутного сенсора дорівнює

$$V_S = A \iint\limits_{S_1} \left(\kappa_1 + \kappa_2\right) dS . \qquad (1)$$

Тут постійна A залежить від структури сенсора. Для демпфування коливань пластини до актуатора буде підводитись різниця потенціалів

$$V_A = V_0 + G\,\dot{V}_S , \qquad (2)$$

де перший доданок буде компенсувати зовнішнє механічне навантаження, а другий - вводить додаткове затухання.

Визначальні рівняння для моментів [1]:

$$M_1 = D_{11}\,\kappa_1 + D_{12}\,\kappa_2 + M_0, \quad M_2 = D_{12}\,\kappa_1 + D_{22}\,\kappa_2 + M_0, \quad H = D_{66}\,\kappa_{12},$$

де $$M_0 = B\,V_A \quad .$$

(3)

Константа B обчислюється різними формулами в залежності від структури актуатора.

Підставляючи (2) в (3), одержимо

$$M_0 = B\,V_0 + B\,G\,\dot{V}_S \ . \qquad (4)$$

Коефіцієнт підсилення G відноситься до всіх мод коливань. Якщо відомо аналітичний вираз для мод, то коефіцієнт підсилення можна вибирати для кожної з мод (модальні коефіцієнти підсилення) таким чином, щоб максимально прискорити процес затухання збурень, викликаних початковими умовами.

1. Карнаухов В.Г., Козлов А.В., Пятецкая Е.В. Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин при помощи распределенных пьезоэлектрических включений//Акустический вестник. - 2002. – Т.5, №4. – С. 1 –20.

В.С. Рагулина, аспирант.
Институт механики им. С.П. Тимошенка НАН Украины

ОБОСНОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ЯДРА НАСЛЕДСТВЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ДИСКТЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЯДЕР В ОБЛАСТИ СИНГУЛЯРНОСТИ

Рагулина В.С.

Рассматривается задача выбора ядра наследственности и достоверного определениея параметров ядра нелинейно-вязкоупругих материалов для которых связь между напряжениями деформациями и временем задается моделью типа Работнова с независимой от времени нелинейностью [1].

Структура ядер наследственности и значения параметров ядер определяются по результатам аппроксимации дискретных значений, которые получены путем диференцирования осредненной функции подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования. Задача сводится к минимизации функционала:

$$F(\lambda, q_s) = \sum_{j=1}^{n*} \left\{ p_j(t) \left[K(t_j) - \lambda K(t, q_s) \right] \right\}^2 + \sum_{j=n*}^{n} \left[K(t_j) - \lambda K(t, q_s) \right]^2 , \qquad (1)$$

где дискретные значения ядер $K(t_j)$ в области сингулярности (на начальном отрезке времени) учитываются с использованием весовых функций $p_j(t)$ [1].

В качестве ядер наследственности рассматриваются ядра

$$K(t-\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha}};\ (2)\ K(t-\tau) = \frac{1}{e^{\beta(t-\tau)}(t-\tau)^{1-\alpha}};\ (3)\ K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma\left[(1-\alpha)(1+n)\right]};(4)$$

где (2)- ядро Абеля, (3)- ядро Ржаницына-Колтунова, (4)- дробно-эеспоненциальное ядро Работнова. Здесь α, β - параметры ядер, которые определяются из (1).

Обоснование структуры осуществляется на примере ползучести стеклопластика ТС-8/3-250, экспериментальные данные заимствованны из[2]. Аппроксимации дискретных значений ядер алитическими выражениями (2)-(4) приведенны на рис.1,а, результаты расчетов деформации ползучести приведены на рис.1,б. Расчеты с использованием ядер

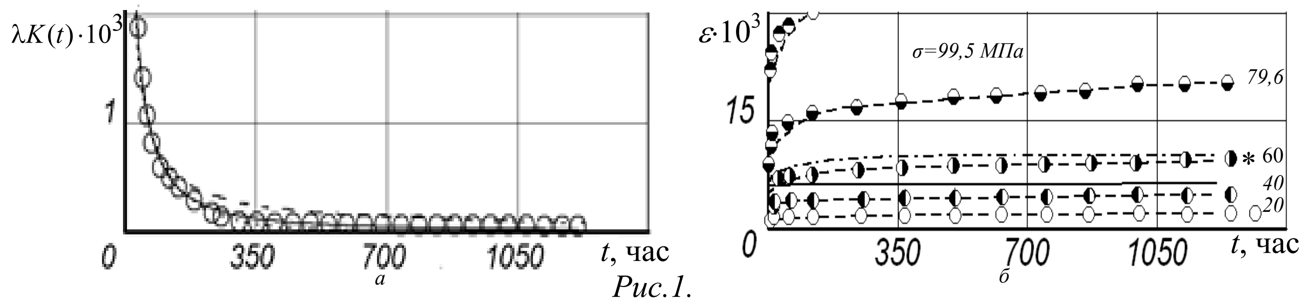


Рис.1.

(2)-(4) нанесены сплошными, штрих-пунктирными и штриховыми линиями соответственно, а дискретные значения ядер и экспериментальные данные нанесены точками.

Все ядра наследственности практически с одинаковой точностью аппроксимируют дискретные значения. Различие между ядрами возникает на стадии решения задач по расчету деформаций ползучести. Из рис.1,б видно, что лучшее согласование расчета с экспериментом (кривая ползучести для напряжения отмеченого звездочкой) получено в случае использования в качестве ядра дробно-экспоненциальной функции (4).

1. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости при одноосном растяжении // Прикл. механика.- 2010.- Том 46, № 3.
2.Работнов Ю.Н., Паперник А.Х., Степанычев Е.И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 // Механика полимеров.- 1971.- №3, сс. 391-397.

Ружицький Ігор Сергійович, молодший науковий співробітник,
Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: glove2000@ukr.net;

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В РУХОМОМУ РЕЗЕРВУАРІ ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ФОРМИ

Ружицький І.С.

На основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського використано метод, застосування якого дозволило отримати розв'язки задачі, пов'язаної з дослідженнями нелінійної динаміки усталених коливань системи, що складається з рухомого резервуару еліпсоїдальної форми та рідини з вільною поверхнею, яка його частково заповнює. При цьому, в ході розв'язання поставленої задачі було виконано введення недекартової параметризації області, яку займає рідина. В побудовану модель було включено десять форм коливань рідини, причому було забезпечено виконання умов розв'язності крайової задачі про коливання рідини уточненим задовільненням умовам неперетікання рідини на стінках резервуару, включаючи неперетікання не лише на змочуваній в незбуреному стані бічній поверхні резервуару, а і на деякому її продовженні, куди можуть досягати гребені хвиль в процесі збуреного руху та розвинуто алгоритми і методи контролю точності розв'язків, включаючи контроль виконання законів збереження та симетрії. Використаний алгоритм дозволив дослідити перехідні процеси, які виникають в системі під дією імпульсних сил та моментів. Отримані чисельні дані узгоджуються з даними експериментальних та теоретичних досліджень розвитку коливань на вільній поверхні рідини інших авторів. В результаті аналізу чисельних даних, в тому числі, за побудованими картинами хвиль для випадку резервуару еліпсоїдальної форми яскраво спостерігаємо, несиметричність профілю хвиль, перевищення висоти горба хвилі над глибиною впадини та переважаючу властивість опускання рідини в центрі резервуару нижче початкового незбуреного рівня, а частота зміни в часі компоненти головного вектора сил тиску на стінки резервуару *Rz* приблизно в 2 рази перевищує частоту зміни *Ry*, що також цілком узгоджується з даними експериментальних та теоретичних досліджень інших авторів.

Виконано дослідження механічної системи що складається, з рухомого резервуару еліпсоїдальної форми та рідини з вільною поверхнею, яка його частково заповнює, в перехідних режимах сумісного руху системи в нелінійному діапазоні зміни параметрів, зокрема, в режимі зародження кругової хвилі. Дослідження руху резервуара в режимі зародження кругової хвилі проведено при спеціальному способі збудження руху резервуара за рахунок збудження руху системи з початкового стану спокою силою з круговим годографом $F_x = A\sin\omega t$, $F_y = B\cos\omega t$. Встановлено діапазони односпрямованого руху кругової хвилі і діапазон, в якому кругова хвиля може певний проміжок часу рухатися в одній площині, або обертатися в зворотному напрямку. Встановлено, що при дії сили з круговим годографом на стінки рухомого резервуару, для великих значень співвідношення маси резервуару до маси рідини дрейф резервуару відбувається в напрямку вісі *Ox*, а при зменшенні значення цього співвідношення характер дрейфу суттєво змінюється, такий же характер впливу на дрейф резервуару відмічено і при збільшенні частоти в збурюючій силі з круговим годографом.

1. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ», 1997. – 338 с
2. Нариманов Г.С., Докучаев И.А., Луковский И.А. Нелинейная динамика летатель-ного аппарата с жидкостью – М: Машиностроение, 1977. – 208 с.

Рущицький Ярема Ярославович, д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу реології, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка e-mail: rushch@inmech.kiev.ua
Сінчило Сергій Володимирович, к.ф.-м.н., науковий співробітник відділу реології, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка
Хотенко Ірина Миколаївна, к.ф.-м.н., старший науковий співробітник відділу реології, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка

НОВІ ДВОВИМІРНІ КУБІЧНО НЕЛІНІЙНІ ХВИЛЬОВІ РІВНЯННЯ, ЩО ВІДПОВІДАЮТЬ ПРУЖНОМУ ПОТЕНЦІАЛУ МУРНАГАНА

Рущицький Я.Я., Сінчило С.В., Хотенко І.М.

Представлені у даній доповіді результати можна вважати такими, що узагальнюють результати публікації [1], оскільки в отриманих хвильових рівняннях враховано як квадратичну, так і кубічну нелінійність. В [1] проведено історичний огляд досліджень нелінійних поверхневих хвиль Релея і отримано нові квадратично нелінійні хвильові рівняння для двовимірного випадку пружного квадратично нелінійного деформування в рамках моделі Мурнагана, які є базовими для аналізу хвиль Релея. Слід зазначити, що теорія хвиль Релея не являє собою закінчений фрагмент класичної теорії; ця теорія розвивається, для підтвердження вкажемо недавні теоретичну [2] і експериментальну [3] публікації.

Для отримання вказаних вище двовимірних нелінійних хвильових рівнянь використано підхід, розвинутий раніше стосовно одновимірної нелінійної теорії пружності, коли зміна деформації описується однією змінною [4]. Особливістю підходу є те, що квадратично нелінійний щодо тензора деформацій потенціал Мурнагана представляється як нелінійний порядків 2-6 щодо градієнта деформацій. В отриманих нових хвильових рівняннях збережено порядки 2 та 3. Нижче показане лише одне з двох хвильових рівнянь

$$\begin{aligned}\rho \ddot{u}_1-(\lambda+2\mu)u_{1,11}-(\lambda+\mu)u_{3,13}-\mu u_{1,33}=\left[3(\lambda+2\mu)+2(A+3B+C)\right]u_{1,1}u_{1,11}+\\
+\left(\lambda+2\mu+\frac{1}{2}A+B\right)\left(u_{1,1}u_{3,13}+u_{1,3}u_{3,11}+2u_{3,1}u_{1,13}+u_{3,1}u_{3,33}+u_{3,3}u_{3,13}\right)+\\
+\left(\mu+\frac{1}{2}A+B\right)\left(u_{1,1}u_{1,33}+2u_{1,3}u_{1,13}+u_{1,3}u_{3,33}+u_{3,1}u_{3,11}+u_{3,3}u_{1,33}\right)+\\
+(\lambda+2B+2C)\left(u_{1,1}u_{3,13}+u_{3,3}u_{1,11}+u_{3,3}u_{3,13}\right)+\\
+\left[3(\lambda+\mu)+6(A+3B+C)\right]u_{1,1}^2u_{1,11}+(\lambda+2B+2C)u_{3,3}^2u_{1,11}+6Cu_{1,1}u_{3,3}u_{1,11}+\\
+\frac{1}{2}\left(\mu+\frac{3}{2}A+3B\right)\left(u_{1,3}^2+u_{3,1}^2\right)u_{1,11}+\ldots\end{aligned}$$

В цих рівняннях лінійні доданки записані у лівих частинах рівнянь, тоді як праві частини включають нелінійні доданки. Кожне рівняння містить квадратично та кубічно нелінійні доданки. Такі доданки в першому і другому рівняннях не повторюються.

1. Rushchitsky J.J., Khotenko E.A. On Rayleigh Wave in Quadratically Nonlinear Elastic Material (Murnaghan Model) // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, **(3)**. – P. 100–108.

2. Zabolotskaya E.A., Il'inskii Yu.A., Hamilton M.F. Nonlinear Rayleigh waves in soft tissue // J. Acoust. Soc. Am. – 2006. – **119**, **(5)**. – P. 3319

3. Liu M., Kim J.-M., Jacobs L., Qu J. Experimental study of nonlinear Rayleigh wave propagation in shot-peened aluminium plates. Feasibility of measuring residual stress // Nondestr. Testing and Experim. International. – 2011. – 44, (1). – P.67-74.

4. Rushchitsky J.J. Interaction of waves in solid mixtures//Appl.Mech.Rev.– 1999.– **52**, N 2.- P. 35-74.

Т.Л. Савчук, инженер; Т. А. Рыбалка, студент; Г. И. Сокол, профессор, д.т.н.
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара
E-mail: majaj@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СЕРДЦА НАСЕКОМОГО

Савчук Т.Л., Рыбалка Т.А., Сокол Г.И.

Вибрационные и акустические колебания оказывают вредное влияние на тело вредителя растений колорадского жука. Особым случаем является совпадение частоты падающей акустической волны с собственной частотой тела или органов насекомого, что обусловлено явлением резонанса. Основными факторами в определении резонансной частоты являются масса и жесткость всего тела или отдельного органа живого насекомого.

Целью настоящей работы является разработка методики определения резонансной частоты механической системы сердца насекомого.

Моделирование сложных механических систем, которые состоят из масс, соединенных между собой элементами упругости, часто проводится с использованием метода электромеханических аналогий. К таким сложным системам относятся электроакустические приборы, механизмы станков, аппаратура и акустические устройства, которые состоят из электрических, механических и акустических элементов. К электрическим элементам относятся индуктивности, емкости, активные сопротивления, трансформаторы; к механическим и акустическим – массы, упругости, сопротивления потерь (например, на трение) и своего рода механоакустические трансформаторы. Эти элементы комбинируют в электрические, механические и акустические системы в виде различного рода контуров и цепочек, а также в виде электромеханических и электроакустических преобразователей.

Одинаковый порядок и форма дифференциальных уравнений описывающих колебания в средах с одной упругой постоянной, то есть акустических процессов, механических и электрических, позволяют установить аналогии между параметрами всех этих процессов.

В данной работе на основе метода электромеханических аналогий разработана методика определения резонансной частоты механической системы, для которой традиционные методы неприемлемы. Это - многокамерная система сердца насекомого.

В частности, для сердца насекомого, как многокамерной системы состоящей из полостей с оболочками, заполненными жидкостью и соединенными между собой, метод электромеханических аналогий позволяет определить параметры, которые дают возможность определить степень влияния акустических колебаний на ткани вплоть до разрыва стенок камер.

Полученный результат отвечает диапазону резонансных частот, которые были определены во время вибрационных испытаний тела насекомого. Это говорит о правильности выбранной методики.

Разработка методики определения резонансной частоты механической системы сердца насекомого позволяет моделировать акустические воздействия на эту систему.

Горбенко Елизавета Владимировна, аспирантка 1 курса, факультет физико-технический,
ДНУ имени Олеся Гончара,
e-mail: lizaveta.tv@rambler.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В РАКЕТАХ

Сокол Г.И., Горбенко Е.В.

При проектировании равнопрочных ракет минимального веса, корпус которых нагружались бы минимальными динамическими нагрузками и имели заданные частотные характеристики, необходимо провести динамический анализ и синтез продольных нагрузок ракет.

Каждую систему, которая исследуется, представляет в виде расчетной схемы, состоящей из масс, которые связаны между упругими связями. Величина упругой связи определяется в виде приведенной жесткости.

При проектировании ракет необходимо выбрать параметры расчетной схемы такими, при которых возникали бы наименее возможные продольные динамические нагрузки с учетом особенностей действия сил малой продолжительности.

Динамический синтез продольных нагрузок осуществляется путем определения параметров расчетной схемы ракеты – приведенных жесткостей и масс такими, чтобы при заданном полном импульсе, характеризующем внешние возмущение силы, величины продольных динамических нагрузок в корпусе ракеты во время переходного процесса были наименее возможными. При решении этой задачи предполагается, что силовая функция не отрицательная и характеризуется полным импульсом и продолжительностью его действия. Нижний предел продольных динамических нагрузок ракет может быть получен путем рационального выбора импульсов, при котором минимизируется полная энергия колебательной системы.

При определении динамических характеристик многоступенчатых ракет расчетная схема содержит большое количество масс и жесткостей, что значительно усложняет динамический расчет ракет даже с использованием вычислительных машин. Расчетная схема с большим количеством масс и жесткостей затрудняет выяснение влияния отдельных параметров на минимальное значение динамической добавки при решении задач динамического синтеза ракет, рассматривая динамические процессы в течение отдельных фаз нарастания и спада силы тяги.

При расчете на колебания многоступенчатых ракет одной из первых задач является определение собственных частот и форм колебаний. Это в большинстве случаев вызывает значительные трудности, возникающие при составлении и решении частотного уравнения. Изменением величин масс и жесткостей можно получить заданную частотную характеристику ракеты, удаленную от резонансных режимов, а также обеспечивающую получение минимальных динамических нагрузок ракет во время переходного процесса.

Пользуясь методом приведения масс и жесткостей, хорошо зарекомендовавшим себя при решении динамических задач, ракету заменяем системой масс, связанных между собой приведенными жесткостями отдельных участков между массами. Причем, каждая ступень представлена с помощью четырехмассовой разветвленной расчетной схемы [1].

1. Косько И.К. Динамический анализ и синтез продольных нагрузок ракет [Текст]: диссертация доктора технических наук / И.К. Косько. – Д., 1971. – 410 с.

Солдатов Леонид Иванович, старший преподаватель Кафедры механики
Одесской государственной академии холода
Адрес для переписки – 65069, Одесса, ул. Ак. Заболотного, 47, кв. 12, д.т. +380482544703

НЕСИММЕТРИЧНЫЙ ТЕПЛОВОЙ УДАР ПО СТЕРЖНЮ

Солдатов Л.И.

Ранее изучался тепловой удар по сферической оболочке. При этом не акцентировалось внимание на силы, передающихся от оболочки её упругим опорам – кольцевым пластинам, конусам, стержням. Вследствие больших расчётных трудностей принималось, что тепловой удар по оболочке - центральносимметричен, т.е. температурное поле имеет шаровую симметрию. В то же время, известны экспериментальные факты, которые для данного случая указывают на наличие осевой, но не центральной симметрии. Реакции опор вблизи плоскости «экватора» при симметричном ударе близки к нулю, в реальном же случае реакции достигают достаточно больших значений. Цель работы показать на сильно упрощённой модели, что на опоры передаются силы, сравнимые по величине с температурными усилиями. Вместо оболочки рассмотрен стержень длиной $2l$, площадью поперечного сечения A. Стержень закреплён посередине с подвеской (опорой), жёсткость которой в направлении оси (оси X) равна C. Материал стержня однороден, изотропен и отвечает закону Гука. Несимметрию температурного поля, воспроизвели мгновенным равномерным нагревом (охлаждением) только одной половины стержня и т.д. Математическая постановка следующая:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0}=0 \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=-l}=0 \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=+l}=\alpha T \tag{3}$$

$$\frac{C}{EA}u(+0,t) + \frac{\partial u(-0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(+0,t)}{\partial x} - \alpha T \tag{4}$$

$$u(+0,t) = u(+0,t) \tag{5}$$

Здесь выражение (1) – уравнение продольных колебаний, $a^2 = \frac{E}{\rho}$ - скорость распространения упругих волн вдоль оси стержня, E – модуль упругости материала стержня, ρ - плотность стержня. Начальные условия определяются соотношениями (2), а граничные – выражением (3). Условия (4) и (5) – это условия сопряжений в сечении крепления упругой опоры, T – перепад температур.

Задача решена методом обобщенных конечных интегральных преобразований (КИП) и интегральных преобразований Лапласа. Получена расчетная формула для вычисления реакции опоры, проведён анализ решения и сделан вывод.

1. Галицын А.С. Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. – Киев: Наукова думка, 1983. – 252с.
2. Диткин В.А.. Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 407с.
3. Мартыненко Н.А., Пустыльников. Конечные интегральные преобразования. – М.: Наука, 1986. – 303с.

Сторожук Євген.Анатолійович, доктор фіз.-матем. наук, проф.,
Чернишенко Іван Семенович, член-кор. НАН України, доктор техн. наук, проф.,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, м. Київ, Україна,
e-mail: desc@inmech.kiev.ua;
Руденко Ірина Борисівна, ст. викладач кафедри вищої математики,
Харенко Світлана Борисівна, ст. викладач кафедри вищої математики,
Національний університет державної податкової служби України, м. Ірпінь, Україна,
e-mail: juvr@ukr.net

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБОЛОНОК

Сторожук Є.А., Чернишенко І.С., Руденко І.Б., Харенко С.Б.

Теоретичне дослідження аналітичними методами нелінійного деформування за межею пружності оболонок з криволінійними отворами, серединні поверхні яких є багатозв'язними областями, пов'язане із значними математичними труднощами. Тому авторами даного повідомлення для розв'язання двовимірних фізично нелінійних задач теорії тонких оболонок з концентраторами напружень (вирізами, отворами) розроблено методику, яка базується на використанні процедури покрокового навантаження в поєднанні з методом додаткових напружень і методом скінченних елементів (МСЕ).

Розглядається тонка оболонка із скінченною кількістю криволінійних (кругових або еліптичних) отворів, яка виготовлена з однорідного ізотропного матеріалу. Контури отворів можуть бути підкріпленими тонкими криволінійними стержнями (кільцями), які опираються розтягу (стиску), згину та крученню. При значних рівнях діючих навантажень в області отворів виникають пластичні деформації, а властивості матеріалу оболонки характеризуються нелінійною діаграмою деформування.

Вирази для компонент тензора деформації тонкої непологої оболонки представлені в векторній формі з використанням гіпотез Кірхгофа-Лява, а фізичні співвідношення наведені для двох варіантів теорії пластичності - теорії текучості з ізотропним зміцненням та теорії малих пружнопластичних деформацій. Неосесиметричні деформації підкріплення описані рівняннями статики криволінійних стержнів двоякої кривини.

Область зміни координат параметризації серединної поверхні багатозв'язної оболонки є складною, в якій не всі контурні лінії співпадають з координатними лініями. Для побудови сітки скінченних елементів розбиваємо серединну поверхню оболонки на криволінійні чотирикутні фрагменти, в кожному з яких вводимо локальну косокутну систему координат.

В класичному варіанті МСЕ для тонких оболонок систему розв'язувальних рівнянь в переміщеннях отримують з умов стаціонарності функціоналу Лагранжа, в якому кути повороту нормалі обчислюються через переміщення у відповідності з гіпотезами Кірхгофа-Лява, що приводить до появи других похідних від переміщень і ускладнює процес дискретизації в багатозв'язних областях. Автори роботи запропонували підхід до ліквідації вказаного недоліку, суть якого полягає в незалежній апроксимації компонент векторів переміщень і кутів повороту та виконанні гіпотез Кірхгофа-Лява в дискретних точках (вузлах скінченного елемента).

З використанням розробленої методики і складених програм чисельно досліджено пружнопластичний стан сферичної, циліндричної і конічної оболонок з двома однаковими або різними круговими отворами, а також циклічно симетричної сферичної оболонки з чотирма, п'ятьома і шістьома круговими отворами, контури яких підкріплені кільцями або жорсткими вставками. Вивчено вплив пластичних деформацій матеріалу, геометричних і фізико-механічних параметрів, кількості отворів і жорсткостей підкріплень на розподіл напружень, деформацій і переміщень в області отворів.

Ткаченко Неоніла Єрмолаївна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: dynamics@inmech.kiev.ua;
Ткаченко Світлана Єрмолаївна, ст. викладач кафедри вищої та обчислювальної математики,
Національний авіаційний університет, Київ, Україна,
e-mail: dynamics@inmech.kiev.ua

СТАТИСТИЧНИЙ ПІДХІД ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПЕРЕНОСУ ЧАСТИНОК ПОТОКАМИ ГАЗУ В ТРУБАХ

Ткаченко Н.Є., Ткаченко С.Є.

При дослідженнях переносу твердих частинок потоками газу по трубах існують різні підходи. Домінуючим в літературі є припущення про перенос частинок за рахунок турбулентної дифузії. В даній роботі використовується статистичний підхід [1], який дає можливість врахувати колективну взаємодію між частинками і не робить припущень, що є основним при русі дисперсної системи.

Для системи частинок будуємо рівняння Ліувілля, яке визначає N- частинну функцію розподілу ймовірності стану системи в узагальненому фазовому просторі. Шляхом осереднення знаходимо ланцюг одночастинних функцій густини розподілу [2]. Динамічний стан частинок в газі на мікрорівні описується системою двох кінетичних рівнянь для одночастинних функцій густини розподілу ймовірностей в фазовому просторі, одне з яких описує рух частинок в середній частині труби, а друга поблизу стінок труби.

В системі існує два параметри релаксації, які характерні для руху на мікрорівні – це параметри густини і дисипації. Розкладемо ці функції в ряди по малому параметру, пов‘язаному з середньою густиною числа частинок.

Інтегруючи по імпульсах функції розподілу ймовірностей в першому наближенні, знайдено рівняння для густини розподілу частинок в польових координатах. Це рівняння враховує рух частинок, пов‘язаний з рухом газу, з дифузією на мікрорівні, з взаємодією між частинками.

Визначено розподіл концентрації частинок в жорсткій циліндричній трубі скінченого розміру при періодичному зовнішньому впливові на одному з торців труби при вільному другому торці. В залежності від частоти збурень на вході концентрація частинок змінюється. Із збільшенням частоти більше частинок зосереджуються біля стінок труби. В окремих випадках виникає зворотній рух частинок.

1. Ткаченко Н.Є., Ткаченко С.Є. Рух системи твердих частинок поблизу твердої поверхні // Збірник праць інституту математики НАНУ. – 2010. – **7**, № 2.– С. 421 – 426.
2. Струминский В.В. О решении цепочки уравненеий кинетической теории газов // Доклады АН СССР. –1966. – **196**, №1. – С. 58 –61.

Ткаченко Неоніла Єрмолаївна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
e-mail: dynamics@inmech.kiev.ua;
Шекера Марфа Карпівна, кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
e-mail: dynamics@inmech.kiev.ua

ДИНАМІЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ СКЛЕЄНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Ткаченко Н.Є., Шекера М.К.

Склеєні циліндричні оболонки широко застосовуються як елементи конструкцій складних механічних систем.

Об‘єктом дослідження є дві тонкі вкладені циліндричні оболонки, які склеєні між собою по всій поверхні контакту. Вони утворюють багатошарову оболонку, яка перебуває під дією динамічного навантаження. Відомі дослідження напружено-деформованого стану (НДС) таких конструктивних елементів виконані у статичній постановці.

В роботі для розрахунку НДС склеєної двошарової циліндричної оболонки під дією зовнішнього динамічного навантаження застосовано наближений теоретичний метод, який запропонований Я.Ф. Каюком. Метод базується на використанні методу можливих переміщень, який розповсюджується на механіку суцільного середовища.

Зазначену механічну систему розділяємо уявно на дві оболонки ((1), (2)) та клеєвий прошарок (КП), який також розглядається як тверде просторове тіло. Вважаємо, що геометричні і механічні характеристики складових системи різні, причому товщина КП істотно менша за товщини оболонок (1), (2). Припускається, що поперечні переміщення КП змінюються за законом квадратичної параболи.

Дослідження динамічного деформування склеєної двошарової циліндричної оболонки виконуємо окремо для кожної її складової з урахуванням умов кінематичного контакту між шарами і КП. Сформульовано співвідношення принципу можливих переміщень для кожної оболонки і КП.

Застосування принципу можливих переміщень, з одного боку дає можливість одержати визначальні рівняння руху з початковими та природними граничними умовами; з іншого боку, можна, не розв‘язуючи відповідні системи диференціальних рівнянь руху, за вдалого вибору координатних функцій при розкладі компонентів переміщень у ряди можна визначити амплітудні коефіцієнти. Отже, задача зводиться до розв‘язування системи звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних коефіцієнтів. Це дозволяє визначити усі характеристики напружено-деформованого стану склеєної двошарової циліндричної оболонки під дією динамічного навантаження у довільній її точці, зокрема й у клеєвому прошарку.

1. Каюк Я.Ф. Построение уточненных соотношений в задачах динамики склеенных балок // Прикладная механика. – 2010. – **46**, № 7.– С. 93 – 109.
2. Каюк Я.Ф., Ткаченко Н.Є, Шекера М.К. Про одну модель динамічного деформування склеєних балкових конструкцій // Тези міжнародн. конф. "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури". – Чернівці, 17-21 жовтня 2010 р. – С. 76.

Фильштинський Леонід Аншелович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Сумський державний університет, Суми, Україна,
e-mail: leonid@mphis.sumdu.edu.ua;
Шрамко Юрій Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук,
Сумський державний університет, Суми, Україна,
e-mail: yshramko@yandex.ru
Заскока Антон Миколайович, студент 4 курсу, факультет ЕЛІТ,
Сумський державний університет, Суми, Україна,
e-mail: yshramko@yandex.ru

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСЕРЕДНЕНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТУ ЗА НАЯВНОСТІ МІЖФАЗНОГО ШАРУ

Фильштинський Л.А., Шрамко Ю.В., Заскока А.М.

В науковій роботі вивчені властивості діелектричних матеріалів, армованих регулярною двоякоперіодичною системою однакових циліндричних волокон, перетини яких довільні достатньо гладкі замкнуті контури, за наявності міжфазного шару матриця-волокно. Припускається, що в структурі задані середні значення компонент вектора електричної індукції. Міжфазний шар моделюється як пористий волокнистий композит з наперед відомими осередненими характеристиками [2].

Загальні подання розв'язку розшукувались в класі квазіперіодичних функцій і описувались за допомогою дзета-функції Вейєрштраса. Гранична задача електростатики зведена до системи регулярних інтегральних рівнянь, яка реалізована чисельно за схемою механічних квадратур.

Метод регулярних структур [1] узагальнений на регулярно-армоване діелектричне середовище за наявності міжфазного шару і побудований алгоритм для визначення макроскопічних параметрів структури.

Як слідує із приведених результатів, у випадку коли в модельованому діелектричному середовищі діє однорідне електричне поле $\left\langle \vec{D} \right\rangle = \left(0.5;0\right)$, в структурі композиту електричне поле неоднорідне: мають місце градієнти в околі включень. При цьому максимальні за величиною компоненти вектора електричної індукції, що виникають в матриці і волокнах, діють у випадку армування матриці трикутними волокнами. Наявність міжфазного шару, осереднена електрична проникність якого менше електричної проникності матриці і волокна, призводить до зменшення значень компонент вектора електричної індукції в структурі композита. Якщо ж матеріал міжфазного шару має електричну проникність більшу, ніж матеріал матриці, то значення компонент вектора індукції для розглянутого випадку не змінюються.

Встановлено, що наявність міжфазного шару приводить до суттєвої зміни приведених характеристик композиту: зменшенню, у випадку моделювання міжфазного шару, як пористого композиту, матриця якого – матеріал матриці вихідного композиту, збільшенню – якщо матеріал матриці шару є матеріал волокна.

1. Григолюк Э.И., Фильштинский Л. А. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. – М.: Изд. фирма «Физико-матем. лит.»., 1994.-335 с.
2. Фильштинский Л.А., Шрамко Ю.В. Усреднение физических свойств волокнистых пьезокомпозитов с дефектами типа пор // Сб. трудов института математики НАН Украины "Физико-технические и технологические приложения математического моделирования". – Киев. – 1998.– С. 245-249.

Хазін Г.А., кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
e-mail: g_khazin@yahoo.com, g_khazin@mail.ru
Поліщук Т.В., ст. викладач,
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
e-mail: polischuk_t@ukr.net
Камінський А.О., доктор фіз.-мат. наук, професор,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua
Кіпніс Л.А., доктор фіз.-мат. наук, професор,
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
e-mail: g_khazin@yahoo.com, g_khazin@mail.ru

СМУГИ ПЛАСТИЧНОСТІ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА

Хазін Г.А., Поліщук Т.В., Камінський А.О., Кіпніс Л.А.

В умовах плоскої деформації розглянуто симетричну задачу про розрахунок початкової зони передруйнування у кусково-однорідному ізотропному пружно-пластичному тілі біля кутової точки межі поділу двох середовищ. Вважається, що тіло складено з різних однорідних частин, які з’єднані між собою тонким з’єднувальним шаром, матеріал якого пластичніший, ніж матеріали цих частин.

Згідно з гіпотезою локалізації, початкові зони передруйнування біля кутових точок – концентраторів напружень є тонкими шарами матеріалу – вузькими смужками, що виходять з концентраторів [1]. Користуючись гіпотезою локалізації та враховуючи властивість з’єднувального матеріалу, вважаємо, що початкова зона передруйнування є парою вузьких смужок, що виходять з кутової точки і розташовані на межі поділу середовищ. Оскільки з’єднувальний матеріал є пружно-пластичним, смужку-зону моделюємо лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює заданій сталій з’єднувального матеріалу.

Враховуючи малість зони передруйнування, з метою здійснення її розрахунку приходимо до плоскої статичної симетричної задачі теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить лінії розриву дотичного переміщення, що виходять з кутової точки і розташовані на межі. На нескінченності формулюється умова, яка дає можливість врахувати вплив зовнішнього поля. Для побудови точного розв’язку задачі використовуються метод Вінера – Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [2-4]. На основі цього розв’язку з умови обмеженості напружень біля кінця лінії розриву виводиться зручна з точки зору практичного користування формула для визначення довжини зони передруйнування.

1. *Панасюк В.В., Саврук М.П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз. – хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, №1. – С. 49 – 68.
2. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
3. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
4. *Каминский А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А.* Исследование напряженного состояния вблизи угловой точки при моделировании начальной пластической зоны линиями скольжения // Прикл. механика. – 2001. – **37**, №5. – С. 93 – 99.

Холостова Ольга Владимировна, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Московский авиационный институт (ГТУ), Москва, Россия,
e-mail: kholostova_o@mail.ru

О ЧАСТНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Холостова О.В.

Рассматривается движение тяжелого твердого тела, одна из точек которого (точка подвеса) совершает вертикальные гармонические колебания высокой частоты и малой амплитуды. Геометрия масс тела и положение точки подвеса в теле произвольны. Проводится исследование частных движений тела.

В рамках полученной ранее [1] приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения проведен анализ существования, бифуркации и устойчивости «боковых» относительных равновесий тела, для которых центр масс G тела и точка подвеса O не лежат на одной вертикали. Исследован весь диапазон допустимых значений параметров задачи. Показано, что при не слишком больших частотах вибраций точки подвеса боковые относительные равновесия отсутствуют (как и для тела с неподвижной точкой подвеса), с ростом этой частоты появляются два относительных равновесия и с дальнейшим ростом — четыре. В случае, когда центр масс тела лежит в главной плоскости инерции тела для неподвижной точки (но не на главной оси инерции) при выполнении специального соотношения, связывающего моменты инерции и координаты центра масс тела, боковые относительные равновесия образуют семейство, для которого множество концов вертикального орта в теле составляет окружность.

Численное и аналитическое исследование характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения показало, что для всех существующих боковых относительных равновесий тела это уравнение имеет корни с положительными вещественными частями. Поэтому все эти равновесия неустойчивы.

Для случая расположения центра масс тела на главной оси инерции рассмотрена полная (неавтономная) система дифференциальных уравнений движения. Проведен нелинейный анализ устойчивости относительных равновесий тела при вертикальном положении оси OG, когда точка G находится выше или ниже точки подвеса. В плоскости параметров задачи выделены области выполнения формальной устойчивости. Найдены условия устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий; отмечены случаи, когда эти условия нарушаются.

В рамках приближенной системы рассмотрен также вопрос о существовании перманентных вращений тела. Показано, что, как и в случае тела с неподвижной точкой, такие вращения возможны только вокруг вертикально расположенных осей. Описано множество допустимых осей в частных случаях геометрии масс тела и проведено их сравнение с соответствующими множествами для тела с неподвижной точкой [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00322, 10-01-00381) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ-3797.2010.1).

1. Маркеев А.П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 6. С. 771-775.
2. Холостова О.В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 128 с.

Хома Іван Юрійович, доктор фіз-мат.наук, ст.н.с.
Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна
e-mail: yuri-khoma@ukr.net

ПРО АНАЛОГІЮ РЕЙСНЕРОВИХ АЛГОРИТМІВ В ТЕОРІЇ ЗГИНУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН

Хома Ю.І.

Для побудови рівнянь рівноваги нетонких пружних пластин використовують різні методи. Одним із ефективних є метод розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра $P_k(\varsigma)$ координати товщини $\varsigma = h^{-1}x_3$, $x_3 \in [-h, h]$. Для задач згину пластин компоненти вектора переміщень $u_j(x_1, x_2, x_3)$ представляються формулами [1]

$$u_\alpha = \sum_{k=1}^{N} u_\alpha^{(2k-1)}(x_1, x_2) P_{2k-1}(\varsigma) \quad (\alpha = 1,2); \qquad u_3 = \sum_{k=0}^{M} u_3^{(2k)}(x_1, x_2) P_{2k}(\varsigma), \tag{1}$$

де $M = N - 1$ або ж $M = N$. Відносно коефіцієнтів розкладу як функцій двох незалежних змінних варіаційним способом виводиться система рівнянь рівноваги і відповідні граничні умови.

Дане повідомлення присвячено побудові аналогічних рівнянь для трансверсально ізотропних пластин, використовуючи метод Рейснерових алгоритмів [2]. Представимо згідно [2, 3] функції $u_\alpha^{(2k-1)}(x_1, x_2)$, $u_3^{(2k)}(x_1, x_2)$ у вигляді

$$u_\alpha^{(2k-1)} = (-1)^k h^{2k-1} \partial_\alpha \Delta^{k-1} u(x_1, x_2); \qquad u_3^{(2k)} = (-1)^k h^{2k} \Delta^k u(x_1, x_2), \tag{2}$$

де $\partial_\alpha = \partial / \partial x_\alpha$, Δ- оператор Лапласа, $u(x_1, x_2)$- довільна достатньо гладка функція. Враховуючи формули (1) і (2), записуються компоненти тензора деформацій і згідно закону Гука компоненти напружень. Із мінімуму потенціальної енергії виводиться відносно функції u диференціальні рівняння і відповідні граничні умови. Так, зокрема, при $N = 1$, $M = 0$ маємо

$$\Delta \Delta u = \frac{3p}{2c_{11}h^2} \tag{3}$$

і такі граничні умови

$$c_{11} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + 2c_{66} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 0; \, c_{12} \Delta u + 2c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0, \tag{4}$$

де $p = p(x_1, x_2)$ - нормальне навантаження на лицьових площинах пластини.

При $N = 1$, $M = 1$ рівняння рівноваги приймає вигляд

$$\Delta^3 u - \frac{5(c_{11} + 6c_{13} + 9c_{33})}{3c_{66}h^2} \Delta^2 u = -\frac{5}{c_{44}h^5}(p - \Delta p) \tag{5}$$

з відповідними граничними умовами. Аналогічним способом виводяться рівняння і граничні умови для вищих наближень.

1. Khoma I.Yu. Representation of solution of the deflection equilibrium equations for thick transversally isotropic plates // J of Math Sciences. – 2001.-103, №3 – P.306-313.
2. Бабушка И., Прагер М. Рейсснеровы алгоритмы в теории упругости // Механика. Сб. переводов. – 1961. -№6. – С.123-128.
3. Hanuŝka A. Contribution to the Reissnerian algorithmi in the theory of bending of elastic plates // Aplikace Matematiky. – 1967. – 6, №12. – P.449-467.

Хоменко Олексій Віталійович, доктор фіз.-мат. наук, доцент
Сумський державний університет, Суми, Україна
e-mail: khom@mss.sumdu.edu.ua
Проданов Микола Вікторович, аспірант
Сумський державний університет, Суми, Україна
e-mail: prodk@rambler.ru
Щербак Юрій Володимирович, студент 5 курсу, факультет електроніки та інформаційних технологій
Сумський державний університет, Суми, Україна
e-mail: sjv@sport.com.ua

КОМПЬЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ НАПРЯМКУ ЗСУВУ НА ТРИБОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ NI I AG НАНОЧАСТИНОК

Хоменко О.В., Проданов М.В., Щербак Ю.В.

В останні роки досить швидко розвивається нова галузь нанотехнології – нанотрибологія, яка розглядає тертя і зношування поверхонь на атомарному рівні. При дослідженні нанотрибологічних явищ потрібні атомарно-гладкі поверхні тертя, тому часто матеріалом для них слугує графіт, який дозволяє відносно легко отримати атомарно-гладкі поверхні. Зсув металевих наночастинок, адсорбованих на поверхні графіту, зондом атомного силового мікроскопу – нова методика вивчення тертя на нанорівні [1]. Вона дозволила відкрити так званий «фрикційний дуалізм», який вказує на можливість суперзмащування в даних системах.

Відсутність всебічних теоретичних досліджень тертя металевих наночастинок є причиною комп’ютерних експериментів, що описуються у даній роботі. Методом молекулярної динаміки досліджено рух Ni і Ag наночастинок, які містять від 5000 до 30000 атомів, по поверхні графену для різних напрямів зсуву. Мета досліджень – виявити вплив напрямку зсуву, який задається кутом θ відносно осі x, що співпадає із зігзаговим краєм графену, на силу тертя, що діє на наночастинку. Наближення моделі до експериментальних умов зумовило використання реалістичних потенціалів для міжатомних взаємодій [2]. Ковалентні атомні зв'язки в шарі графену описуються гармонічним потенціалом, для металевих наночастинок використовується потенціал, заснований на методі зануреного атома. Взаємодія між атомами графену і металевого нанокластеру представлена потенціалом Леннарда-Джонса. Прискорення розрахунків досягається завдяки використанню технології паралельних обчислень на графічних процесорах NVIDIA CUDA.

Отримані результати вказують на те, що залежності компонент сили тертя від відповідних латеральних компонент центру мас наночастинок змінюються із напрямом зсуву. Наприклад, для Ni наночастинок при θ відмінних від 0, зникає пилкоподібна форма залежності, що має місце при зсуві вздовж осі x. Отримано залежності середньої сили тертя від площі контакту і проаналізовано результати з точки зору структурних особливостей нанокластерів.

1. Frictional duality of metallic nanoparticles: Influence of particle morphology, orientation, and air exposure / D. Dietzel, T. Mönninghoff, C. Herding [et al.] // Physical Review B. – 2010. – Vol. 82. – 035401 (9).
2. Khomenko A.V. Study of friction of Ag and Ni nanoparticles: an atomistic approach / A.V. Khomenko, N.V. Prodanov // Journal of Physical Chemistry C. – 2010. – Vol. 114. – P. 19958 – 19965.

Хотенко Елена Александровна, аспирант,
Институт механики им. С.П.Тимошенко Национальной Академии Наук Украины,
e-mail: h.khotenko@gmail.com;

ОБ АНАЛИЗЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В КВАДРАТИЧНО НЕЛИНЕЙНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Хотенко Е.А.

Волна Рэлея относится к классу поверхностных волн и достаточно хорошо исследована в линейном приближении. Теоретические исследования линейных волн Рэлея представлены большим количеством фундаментальных работ, история которых начинается в 1885 году, когда впервые было теоретически получено решение задачи о поверхностных волнах [1, 2].

Нелинейные поверхностные волны Рэлея впервые были рассмотрены в обзорной статье Викторова в 1964 году. В последнее время интерес к нелинейным эффектам в поверхностных акустических волнах связан не только с их применением, но так же с тем фактом, что около 99% их энергии сконцентрировано в тонком слое толщиной около половины длины волны вдоль поверхности подложки. Даже относительно низкие акустические мощности, таким образом, производят достаточно высокую плотность энергии в приповерхностном слое так, что нелинейные эффекты можно наблюдать. Теоретический анализ нелинейностей поверхностных волн является сложной задачей по причине сложной природы самих поверхностных волн.

Для двумерного случая упругого квадратично нелинейного деформирования в рамках модели Мурнагана получены нелинейные уравнения, которые являются базовыми для анализа классических волн Рэлея [3].

В данном исследовании выбран потенциал Мурнагана в виде

$$W = \frac{1}{2}\lambda\left(\varepsilon_{mm}\right)^2 + \mu\left(\varepsilon_{ik}\right)^2 + \frac{1}{3}A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B\left(\varepsilon_{ik}\right)^2\varepsilon_{mm} + \frac{1}{3}C\left(\varepsilon_{mm}\right)^3,$$

где $\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2}\left(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{n,i}u_{i,m}\right)$ – тензор Коши–Грина.

Кроме случая общей нелинейности рассмотрены два частных случая, которые соответствуют учету только одного типа нелинейности – геометрической либо физической. Показано, что в отличие от соответствующих линейных задач о плоских волнах, где необходимо учитывать 3 типа нелинейного взаимодействия, в двумерных задачах необходимо учитывать уже 24 типа нелинейного взаимодействия. Для случая учета только геометрической нелинейности проведен предварительный анализ полученных нелинейных уравнений; получены уравнения второго приближения, из которых следует, что это приближение будет содержать вторые гармоники, как самой гармонической волны, так и амплитуды ее затухания, а так же будет квадратично нелинейно зависеть от начальной амплитуды волны Рэлея и линейно возрастать при увеличении пройденного расстояния.

1. Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокомпозитов. – Киев: Академпериодика., 2010. – 398 с.
2. Рущицький Я.Я., Цурпал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інст.механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
3. Rushchitsky J.J., Khotenko E.A. On Rayleigh Wave in Quadratically Nonlinear Elastic Half–Space (Murnaghan Model) // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N3. – P. 120–128.

Чернишенко Іван Семенович, доктор технічних наук, член-кореспондент НАН України,
e-mail: prikl@mech.kiev.ua;
Малежик Михайло Павлович, доктор фізико-математичних наук, професор,
НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна,
e-mail: malez@ukr.net;
Даруга Віктор Васильович, аспірант,
НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна,
e-mail: youchina5@yahoo.com

МОДЕЛЬ СЕРЕДОВИЩА З МІКРОТРІЩИНАМИ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ПОШКОДЖУВАНОСТІ РАДІОПОЛЯРИЗАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Чернишенко І.С., Малежик М.П., Даруга В.В.

Важливе місце в теорії руйнування займає руйнування від втоми, що відбувається внаслідок поступового розвитку тріщин при повторно-змінному циклічному навантаженні. Таке руйнування виникає в результаті накопичення в матеріалі незворотного пошкодження від повторно-змінних навантажень. При цьому тріщини в матеріалі починають розвиватися задовго до повного руйнування незалежно від того, пластичне це буде руйнування чи крихке.

В даній роботі пропонується для виявлення і визначення параметрів мікротріщиноватості в діелектриках застосовувати радіополяризаційний метод з використанням мікрорадіохвиль ($\lambda = 10 \div 1$мм) [1].

Зародження і розвиток мікротріщин в однорідному діелектрику призводить до зміни його фізичних властивостей, зокрема, і діелектричних також. Розглянувши модель діелектрика з мікротріщинами орієнтованими в одному напрямку, в межах об'єму ΔV та описуючи її діелектричні властивості тензором діелектричної проникності $\{æ\}$, який зв'язує усереднені за об'ємом вектори електричного зміщення D_{cp} і напруженості електричного поля E_{cp} .

$$D_{cp} = \{æ\}E_{cp},$$

отримано вираз для компонент тензора діелектричної проникності:

$$æ_{ij} = (æ_1 aS_i + æ_2 b)/(aS_i + b); i = k, æ_{ik} = æ_{ki} = 0, (i, k = x, y, z), \quad (1)$$

де a і b - об'ємний вміст компонентів тріщини та суцільного середовища; $S_i = b\left(k_i^{-1} - a\right)^{-1}, k_i$ - коефіцієнт поля.

Аналіз діелектричної анізотропії, зумовленою виникненням мікротріщин, здійснюється радіополяризаційним методом [1]. При дослідженні мікротріщиноватості ізостати співпадають з траекторіями переважаючої орієнтації мікротріщин, а ступенем анізотропії характеризується їх упорядкованість.

Експериментально досліджено кінетику утворення мікротріщин в зразках із оргскла, що навантажувались зусиллям P, величина напруження розтягу у яких була 0,8 σ_b даного матеріалу. Показано, що чутливість радіополяризаційної установки дозволяє реєструвати ступінь анізотропії $\left(æ_x - æ_y\right)$ одночасно з оптичними проявами тріщиноутворення. Отримана залежність об'ємного вмісту утворених мікротріщин a від часу втомного навантаження в зразках має виражений нелінійний характер, а в'язкість матеріалу проявляє вплив на тривалість накопичення мікротріщин.

1. Нетребко В.П., Васильченко И.П. Поляризационные методы механики композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 160 с.

Шамровський Олександр Дмитрович, д.т.н., професор,
ЗДІА, Запоріжжя, Україна,
e-mail: adshamr@rambler.ru;
Єгарміна Лариса Миколаївна, аспірант кафедри ПЗАС,
ЗДІА, Запоріжжя, Україна,
e-mail: auster13@ukr.net

ОТРИМАННЯ УТОЧНЕНИХ ОДНОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ СТРИЖНІВ ТА БАЛОК ІЗ ТРИВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Шамровський О.Д., Єгарміна Л.М.

В теорії тонкостінних конструкцій достатньо помітно відрізняються статичні і динамічні задачі. Для статичних задач відповідні рівняння рівноваги стрижнів, пластин та оболонок отримуються, зазвичай, на базі деяких гіпотез – гіпотеза плоских перерізів, гіпотеза прямих нормалей і т.д. Як правило, у статиці такі гіпотези виявляються достатньо обґрунтованими і підтверджуються як теоретично, так і експериментально.

У той же час у динаміці усе набагато складніше. Загальноприйняті у статиці гіпотези виявляються справедливими тільки при відносно повільній зміні у часі, наприклад при невеликій частоті коливань. Із ростом частоти починають яскраво проявлятися порушення цих гіпотез і виявлення просторових явищ.

За допомогою спрощення тривимірних динамічних рівнянь теорії пружності на основі методу асимптотико-групового аналізу, можна отримати одновимірні рівняння динаміки стрижнів та балок без використання будь-яких припущень. Для цього комбінуються раніше досліджені Шамровським О.Д. мінімальні спрощення. У результаті отримуються «немінімальні спрощення», що призводять до одновимірних рівнянь, більш точних ніж загальновідомі [1-4]. Зокрема, ці рівняння враховують тривимірні ефекти поблизу фронтів хвиль, тому швидкості розповсюдження таких фронтів отримуються такими же, як і у задачах теорії пружності [3].

Використання все того ж методу асимптотико-групового аналізу дозволяє не тільки виводити одновимірні рівняння динаміки стрижнів та балок, але також будувати їх аналітичні рішення у вигляді рядів автомодельних функцій. Необхідно особливо відмітити, що результати, отримані на основі уточнених одновимірних моделей, найкращим чином корелюють із тривимірними результатами [3].

1. Шамровский А.Д., Егармина Л.Н. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2009. – №2. –111-115 с.
2. Шамровский А.Д., Егармина Л.Н. Вывод динамических уравнений изгиба балки прямоугольного поперечного профиля при помощи асимптотико-группового анализа уравнений теории упругости // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – Вип. 11. – 306-317 с.
3. Шамровский А.Д., Егармина Л.Н. Моделирование распространения продольной волны в стержне с помощью уточненных динамических уравнений// Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2010. – №2. –139-145 с.
4. Шамровский А.Д., Егармина Л.Н. Уточненные динамические уравнения изгиба балки с учетом трехмерной картины напряженно-деформированного состояния в поперечном сечении балки //Сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании '2010». Том 5. Технические науки. – Одесса: Черноморье, 2010. – 28-37с.

Шевченко Виктория Алексеевна,
Запорожская государственная инженерная академия, Запорожье, Украина,
e-mail: shevictory@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ СОВМЕСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА С ЛОПАСТЯМИ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Шевченко В.А.

При выборе математической модели, позволяющей рассчитывать собственные частоты и формы колебаний вала с лопастями, основным требованием, которое предъявлялось к модели, была ее способность давать качественную картину происходящих в системе динамических процессов. Такому требованию удовлетворяют, прежде всего, дискретные модели, называемые также дискретными моделями с пониженным числом степеней свободы. Поэтому в качестве модели вала с лопастями было решено использовать соответствующую дискретную модель. Выбранная дискретная модель состоит из абсолютно твердого вала, на который насажено n абсолютно твердых упруго соединенных с валом прямоугольных пластин с постоянным шагом $2\pi/n$. Оси, относительно которых поворачиваются пластины относительно вала, составляют с осью вала некоторый угол α.

При исследовании собственных форм колебаний было учтено свойство круговой симметрии используемой модели, что позволило разделить все множество собственных форм колебаний на осесимметричные формы, формы с одним узловым диаметром и формы с несколькими узловыми диаметрами. Последние из перечисленных форм являются самоуравновешенными, а первые две несамоуравновешенными. Для гидротурбин наибольший интерес представляют низкочастотные формы колебаний, к которым относятся несамоуравновешенные формы. Эти частоты лежат в пределах, соответствующих режимам разгона и торможения гидротурбин.

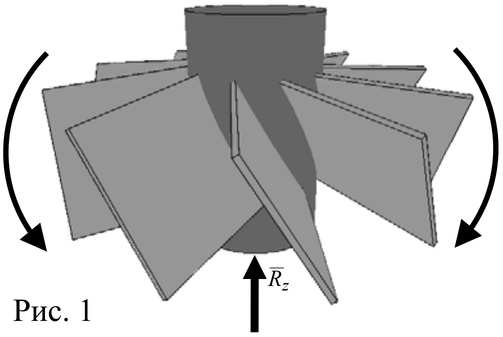


Рис. 1

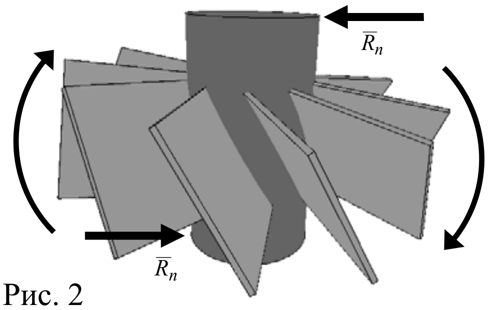


Рис. 2

Анализ показал, что осесимметричные колебания венца лопастей сопровождаются колебаниями вала вдоль вертикальной оси и вокруг нее. Все лопасти одновременно смещаются вдоль оси вала то в одну, то в другую сторону. Вследствие того, что в реальности оба конца вала закреплены, а также вследствие большой суммарной массы лопастей, при таких колебаниях в процессе эксплуатации гидротурбин возникают большие продольные реакции в опорных подшипниках (рис. 1).

При колебаниях с одним узловым диаметром колебания лопастей сопровождаются колебаниями вала вдоль узлового диаметра и вокруг оси, которая лежит в горизонтальной плоскости. При этом половина венца лопастей движется в одном направлении вдоль оси вала, а другая половина – в противоположном (рис. 2). При закреплении концов вала при таких колебаниях возникает значительная поперечная реакция $\overline{R}_n$ в опорных подшипниках.

Полученные результаты имеют важное практическое значение для анализа поведения турбин во время их работы, разработки мероприятий по избежанию повреждений турбин и аварийных ситуаций.

Шпачук Володимир Петрович, доктор техн. наук, професор, завідувач кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
Харківська національна академія міського господарства, Харків, Україна,
e-mail: shpachukvp@mail.ru;
Нікітіна Ганна Олександрівна, аспірант кафедри ТіБМ,
ХНАМГ, Харків, Україна,
e-mail: ann.nikitina@mail.ru;
Супрун Тетяна Олександрівна, студентка 5 курсу, факультет електричного транспорту,
ХНАМГ, Харків, Україна

ВИЗНАЧЕННЯ УМОВ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ ФОРМ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЇ СИСТЕМИ “ПІДРЕСОРЕНА МАСА ВАГОНА – КОЛЕСО – РЕЙКА”

Шпачук В.П., Нікітіна Г.О., Супрун Т.О.

Досліджено динамічну ударну взаємодію контактуючої пари "колесо – рейка" з урахуванням конструктивної швидкості руху і завантаження вагона, а також геометричних параметрів стику шляху.

Розв’язано задачу визначення умов ортогональності форм коливань задля отримання невідомих констант загального розв’язку руху досліджуваної механічної дискретно-континуальної системи. При цьому прийняті наступні припущення: після фази балістичного руху коливання колісної пари і головки рейки відбуваються в безвідривному режимі; прогини рейки реалізуються без порушення суцільності баластового шару; демпфіруючи властивості баластового шару не враховуються, оскільки прогин рейки розглядається лише на першій за часом фазі його зростання.

Рішення диференціальних рівнянь руху заданої механічної системи отримано для перших п’яти форм коливань.

Визначено і проаналізовано умови ортогональності коливань:

$$\rho F\int_0^L z^s(x)z^j(x)dx + m_1\lambda_1^s\lambda_1^j + m_2\lambda_2^j\lambda_2^s = \delta^{js}\left(\rho F\int_0^L {z^s}^2(x)dx + m_1{\lambda_1^s}^2 + m_2{\lambda_2^s}^2\right),$$

де m_1, m_2 – приведені маси колеса і вагона відповідно;

$z(x)$ – власна форма прогину рейки;

λ_1 – власна форма для координати l^*;

l^* – відстань від краю рейки до колеса в момент зіткнення;

λ_2 – власна форма для координати y_2.

y_2 – переміщення приведеної маси вагона m_2;

$\delta^{js} = 0\big|_{j\neq s}, \delta^{js} = 0\big|_{j=s}$

У результаті показано, що прогин рейки з урахуванням підресореної маси вагона і ненульових початкових умов визначається за виразом:

$$w(t,x) = \sum_{s=1}^{5} z^s(x)D_s \sin\omega_s t.$$

Результати досліджень використовуються на практиці при дослідженні параметрів динамічної ударної взаємодії контактуючої пари "вагон – колесо – рейка" з урахуванням конструктивної швидкості руху і завантаження вагона, а також геометричних параметрів стику. На їхній основі розв’язується задача впливу механічних і конструктивних параметрів транспортного засобу на прогини віддаючої і приймаючої рейок. Також використовуються при дослідженні і аналізі залежності пружного осідання першої шпали приймаючої рейки для різних типів взаємодії і граничних умов її закріплення.

Юшутин Владимир Станиславович, аспирант
МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия,
e-mail: vladimir.yushutin@gmail.com;

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКИХ СТЕПЕННЫХ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛЕ С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Юшутин В. С

Классическое решение Пуазейля задачи о стационарном течении ньютоновской жидкости в цилиндре имеет вид параболического профиля продольной компоненты скорости. Задача о радиальном нагружении толстостенной трубы известным давлением также имеет точное решение. Но в обоих случаях предполагаются стационарность и независимость решений от продольной координаты. В работе же исследуется смешанная, более общая постановка, когда давление среды растягивает канал, а его форма динамически влияет на течение. Деформирование оболочки и течение среды предполагается осесимметричным. На стенках сосуда ставится условие прилипания среды, а сама среда считается несжимаемой. Моделируется течение вязкой жидкости со степенным реологическим законом:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu v_{ij}^{n} \qquad (1)$$

Для решения задачи применяется интегральный метод [1,2] - параметризация задачи новыми неизвестными функциями, зависящими только от продольной координаты и времени: $Q(z,t)$, $R(z,t)$, $P(z,t)$. Эти функции являются характеристиками поперечных сечений сосуда и имеют механический смысл расхода через сечение, его радиуса и среднего интегрального давления в сечении соответственно. Уравнения движения и неразрывности среды приводятся к интегральному виду и замыкаются уравнением движение оболочки [3] для определения интегральных характеристик:

$$\frac{\partial Q(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(3n+1)Q(z,t)^2}{(2n+1)\pi R(z,t)^2}\right) + \frac{\mu}{\rho}\frac{(3n+1)^n 2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} Q(z,t)^n}{n^n \pi^{n-1} R(z,t)^{3n-1}} + \frac{\pi R(z,t)^2}{\rho}\frac{\partial P(z,t)}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial Q(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial\left(\pi R^2(z,t)\right)}{\partial t} = 0 \qquad (3)$$

$$\rho_s h_s \frac{\partial^2 R(z,t)}{\partial t^2} + \beta\left(R(z,t) - R_0\right) = P(z,t) \qquad (4)$$

Стационарные решения системы (2)-(4) могут быть получены аналитически. Оказывается, что при некоторых значениях безразмерных параметров проявляется неколебательная неустойчивость (дивергенция) стенок сосуда. Иная, колебательная форма потери устойчивости - флаттер - также возможна [4].

В случае линейного флаттера в пространстве безразмерных параметров выделены области неустойчивости для произвольного n. *Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One-dimensional models for blood flow in arteries// J.Eng.Math. -- 2003. -- **47**, № 3-4. -- P. 251-276.

1. *Юшутин В.С.* Вязкопластические течения по каналам с переменным по длине сечением и деформируемыми стенками// Известия РАН. Серия физическая. -- 2010. -- **74**, №12. -- с.1836-1840.
2. *Nobile F., Vergara C.* An effective fluid-structure interaction formulation for vascular dynamics by generalized Robin conditions// MOX-Report -- 2007 -- **1**.
3. *Pedley T.J.* 1980 The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge: Cambridge University Press.

Янютин Евгений Григорьевич, доктор техн. наук, профессор,
НТУ «ХПИ», Харьков, Украина;
Воропай Наталья Игоревна, аспирант,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет (ХНАДУ), Харьков, Украина,
e-mail: voropay_natasha@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАСТИНЕ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО ОБЖАТИЯ

Янютин Е.Г., Воропай Н.И.

Рассматриваются нестационарные колебания упругой прямоугольной изотропной пластины под воздействием импульсных нагрузок. Уравнения динамики пластины, на основе которых исследовались ее колебания, были получены двумя способами: непосредственно на основе трехмерных уравнений теории упругости согласно подходу, описанному в работе [1], и на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского [2]. Вывод уравнений движения осуществлялся в рамках уточненной теории высокого порядка, которая учитывает влияние инерции вращения и сдвига и учитывает поперечное обжатие. Укажем, что аналогичная система нелинейных уравнений представлена в работе [3]. Используемая авторами модель основывается на следующих кинематических гипотезах:

$$\begin{aligned} u^z &= u + z \cdot \psi_x, \\ v^z &= v + z \cdot \psi_y, \\ w^z &= w + z \cdot \psi_z, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $w(x,y,t)$ – перемещение точек срединной поверхности; $\psi_x(x,y,t)$, $\psi_y(x,y,t)$ – углы поворота нормали к срединной плоскости; $\psi_z(x,y,t)$ – линейная деформация поперечного обжатия; $z \in [-h/2; h/2]$, причем h – толщина пластины.

В результате получена система шести дифференциальных уравнений в частных производных, в которых независимыми переменными являются две пространственные координаты и время. Каждое из уравнений второго порядка.

Представлено решение прямой задачи теории упругости для сосредоточенного нестационарного воздействия на пластину силы, которая касательная к ее срединной плоскости.

Рассматривается также решение обратной некорректной задачи теории упругости с использованием регуляризирующего алгоритма Тихонова А.Н. [4], в результате решения которой определяется (идентифицируется) нестационарная касательная нагрузка, воздействующая на прямоугольную пластину. При этом в качестве исходных данных задаются значения перемещений в срединной плоскости.

Численные результаты, полученные на основе решения прямой и обратной задач, представлены в виде графиков, характер которых проанализирован.

1. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates / R.D. Mindlin // J. Appl. Mech. – 1951. – Vol. 18, № 1. – P. 31-38.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – Москва: Наука, 1972. – 432 стр.
3. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Э.А. Штанцель. – Киев: Киевский университет, 2005. – 536 с.
4. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – Москва: Наука, 1979. – 288 с.

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION

MODELLING

&

STABILITY

Section 4

MATHEMATICAL METHODS OF CONTROL AND OPTIMIZATION

Борисенко Олег Федорович, кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры ВМ
Белорусского госуниверситета информатики и радиоэлектроники
Адрес для переписки – 220027, Беларусь, Минск, ул.Бровки 6, БГУИР, кафедра ВМ
Тел. +375(17)2239744,
e-mail: inform@bsuir.by

QUASINORMALITY AND ERROR BOUND PROPERTY IN NONLINEAR PROGRAMMING

Borisenko O.F. , Minchenko L.I., Tarakanov A.N.

Constraint qualifications play an important role in optimization problems. Their main role is to provide the validity of Lagrange's principle in its normal form or in other words to guarantee that the set of Lagrange multipliers for any continuously differentiable function *f* is non empty at the points of its local minimum on the set *C.* The most known constraint qualification in nonlinear programming is the Mangasarian-Fromovitz condition [1]. On the other hand, there are programs where this condition does not hold though some weaker constraint qualifications can be fulfilled. One of such weak constraint qualifications is the quasinormality by Hestenes [2]. Our goal is to show that quasinormality implies the so-called error bound property (or R-regularity) [3-5].

Consider a set $C = \{ y \in R^m \mid h_i(y) \le 0 \;\; i \in I, h_i(y) = 0 \;\; i \in I_0 \}$, where $h_i(y)$ $i=1,\ldots,p$ are C^1 - functions from R^m to R, $I = \{1,\ldots,s\}$ and $I_0 = \{s+1,\ldots,p\}$ or $I_0 = \varnothing$.

Following [3-5], we say that a feasible point $y \in C$ is *quasinormal* if there are no nonzero vector $\lambda \in R^p$ and no sequence $\{y^k\}$, such that

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0 \;,\; \lambda_i \ge 0 \quad i \in I,$$

$$y^k \to y \text{ and } \lambda_i h_i(y^k) > 0 \text{ for all } k \text{ and all } i \text{ with } \lambda_i \ne 0 .$$

Let $\rho(x,C)$ be Euclidian distance from a point y to a set *C*.

We say that a set *C* satisfies the error bounds property (R-regularity) at a point y^0 if there exist a number $\alpha > 0$ and a neighborhood $V(y^0)$ of the point y^0 such that $\rho(y,C) \le \alpha \max\{ 0, h_i(y) \; i \in I, |h_i(y)| \; i \in I_0 \}$ for all $y \in V(y^0)$.

Theorem. Let a point $y^0 \in C$ be quasinormal. Then *C* satisfies the error bonds property at this point.

Note that there are counterexamples which show that the reciprocal is not true.

1. Mangasarian O.L., Fromovitz S.: The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints. J. Math. Anal. Appl. 17, 37-47(1967).
2. Hestenes M.R.: Optimization theory – the finite dimensional case. New York, 1975.
3. Luderer B, Minchenko L. and Satsura T.. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer, Dordrecht, 2002.
4. Fedorov V.V.: Numerical methods of maxmin. Nauka, Moscow (1979)
5. Ioffe A.D.: Regular points of Lipschitz functions. Trans. Amer. Math. Soc. 251, 61-69 (1979)

Boychuk Leonid Michailovich, doctor of technical sciences,
Köln, Germany/Ukraine,
e-mail: lboychuk@web.de

DYNAMICAL PROJECTIVE CONTROLLERS TO REJECT DISTURBANCES

Boychuk L.M.

A system to be considered consists of multivariable plants (object and regulator) that are arranged in an one-dimensional feedback loop. The regulator (dynamic controller) contains a subsystem that realizes a demanded control law by adjusting of its matrix and gives also an opportunity to obtain derivatives of the regulator output by measure of its inner variables. An equation of the controlled system and its solution (for plants matrices of a full rank) are so:

$$\begin{vmatrix} L_o(s) & -b_o c_r^T \\ b_r c_o^T & L_r(s) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_o(s) \\ x_r(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_o(s) \\ b_r r_o(s) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_o(s) \\ x_r(s) \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} \hat{\Delta}(s) L_o^{-1}(s) + \widetilde{\Delta}(s) P_o(s) & \hat{\Delta}(s) H_{or}(s) \\ -\hat{\Delta}(s) H_{ro}(s) & \hat{\Delta}(s) L_r^{-1}(s) + \widetilde{\Delta}(s) P_r(s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_o(s) \\ b_r r_o(s) \end{vmatrix},$$

where $\Delta(s) = \hat{\Delta}(s) + \widetilde{\Delta}(s) = \hat{d}_o(s)\hat{d}_r(s) + \widetilde{d}_o(s)\widetilde{d}_r(s)$ is a characteristic polynomial of the system. Here $H_{or}(s) = L_o^{-1}(s) b_o c_r^T L_r^{-1}(s)$, $H_{ro}(s) = L_r^{-1}(s) b_r c_o^T L_o^{-1}(s)$, $\widetilde{d}_o(s)/\hat{d}_o(s) = c_o^T L_o^{-1}(s) b_o = \omega_o(s)$, $\widetilde{d}_r(s)/\hat{d}_r(s) = c_r^T L_r(s) b_r$ and $P_o(s)$, $P_r(s)$ are projectors of feedback reaction.

Rejection of disturbances for a steady-state mode of operation only is possible under integral control. To achieve it the regulator matrix is assumed to be a sum of projectors:

$$L_r(s) = s^\alpha P_{r,\alpha} + s^{\alpha-1} P_{r,\alpha-1} + \dots + P_{r,0},\ P_{ri} = q_i v_i^T : P_{ri} P_{ri} \equiv P_{ri}, P_{ri} P_{rk} \equiv 0, k \neq i, \deg L_r(s) = \alpha$$

under α as a given degree of astatism. If number of regulator variables $n_r = \alpha + 1$, the matrix has a full rank. Then its inverse matrix and controllable /observable conditions of regulator are so:

$$L_r^{-1}(s) = s^{-\alpha} P_{r,\alpha} + s^{1-\alpha} P_{r,\alpha-1} + \dots + P_{r,o};\ rank|\dots q_{i-1} \dots b_r| = rank|\dots v_{i-1} \dots c_r| = n_r,\ i = 1 \dots n_r.$$

It brings the regulated output $y_o(s) = c_o^T x_o^T(s) = s^{\alpha+1}(*, f_o)$ to zero at a great interval of time.

Rejection of disturbance at all modes of operation is possible under degenerated regulator ($\det L_r(s) \equiv 0$). The degeneration is ensured structurally due to a projective matrix of the regulator and is realized if $n_r \succ rank L_r(s)$. Then for $n_r = \alpha + 2$ one obtains:

$$\begin{vmatrix} x_o(s) \\ x_r(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_o(s) & L_o^{-1}(s) b_o c_r^T P_{rr} / \omega_o(s) \\ -P_{rr} b_r c_o^T L_o^{-1}(s) / \omega_o(s) & P_r(s) + P_{rr} / \omega_o(s) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_o(s) \\ r_o(s) \end{vmatrix},$$

where P_{rr}: $P_{rr} L_r(s) = L_r(s) P_{rr} \equiv 0$, $c_r^T P_{rr} b_r = 1$, $rank P_{rr} = 1$ and $rank P_r(s) = n_r - 1$. To ensure stability and no impulse motions the same demands to control structure as by use of a regulator in a form of an amplifier ($k \to \infty$) are to be fulfilled.

Boychuk Leonid Mikhailovich, doctor of technical sciences,
Köln, Germany/Ukraine,
e-mail: lboychuk@web.de

PHYSICAL ESSENCE OF FEEDBACK IN AUTOMATIC CONTROL

Boychuk L.M.

The systems to be considered consist of an amplifier (*k*) and of an object that is described by a triple $\{L_o(s); b_o; c_o\}$, $L_o(s) = \{l_{ij}(s)\}, i, j = 1...n_o$. The object presents a set of n_o links $l_{ii}(s)$ and interconnections $l_{ij}(s)$, its dynamical degrees: $\deg l_{ij}(s) \prec \;\prec \deg l_{ii}(s) = \nu_o \leq 2.$ It is necessary to clear up rejection of non-measurable disturbances f_o under feedback control that is made by use of an error $r_o(s) - y_o(s),$ where $y_o(s) = c_o^T x_o(s)$. An equation of the system is written with regard to outputs of object (x_o) and regulator (y_r). This equation and its common solution are so:

$$\begin{vmatrix} L_o(s) & -b_o \\ c_o^T & 1/k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_o(s) \\ y_r(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_o \\ r_o(s) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_o(s) \\ y_r(s) \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} \hat{d}_o(s) L_o^{-1}(s) + k\tilde{d}_o(s) P_o(s) & k\hat{d}_o(s) L_o^{-1}(s) b_o \\ -k\hat{d}_o(s) c_o^T L_o^{-1}(s) & k\hat{d}_o(s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_o(s) \\ r_o(s) \end{vmatrix},$$

where $\Delta(s) = \hat{d}_o(s) + k\tilde{d}_o(s)$, $c_o^T L_o^{-1}(s) b_o = \tilde{d}_o(s) / \hat{d}_o(s) = \omega_o(s)$. Here a projector P_o is applied, it being subjected to conditions: $L_o(s) P_o(s) + H_o(s) L_o^{-1}(s) \equiv I_o$, $H_o(s) = b_o c_o^T / \omega_o(s)$ and $c_o^T P_o(s) \equiv 0,\ P_o(s) b_o \equiv 0$. Reaction of the object on disturbances consists of two items. The first one (L_o^{-1}) reflects properties of an open loop and the second one (P_o) - of a closed loop (feedback). The more greater is an amplifying coefficient k, the more effective is feedback and hence - rejection of disturbances, but it is constrained by stability. In a stable system compensation of disturbances is realized by its "transfer" on the regulator: $y_r(s) = -(\ *, f_o\ )$. This reaction of the regulator contains disturbance signal that is not measured, it being the main advantage of feedback.

Best of all physical essence of feedback is cleared up when k trends to infinity. Then output of regulator is equal to $y_r(s) = -c_o^T L_o^{-1}(s) f_o(s) / \omega_o(s)$ under $y_o(s) = 0$. At this case reaction of the object on disturbances is determined by feedback projector only. For the most available control scheme, when $c_o^T = |1;0...0|,\ b_o^T = |0...0;1|$, the projector has a specific structure:

$$P_o(s) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{L}_o^{-1}(s) & 0 \end{vmatrix} \Leftarrow L_o(s) = \begin{vmatrix} l_{11}(s) & \tilde{L}_o(s) \\ l_{no,1}(s) & l_{no,no} \end{vmatrix}.$$

It follows from this expression that regulated output of the object is fully undisturbed, but its uncontrolled outputs are influenced by disturbances (absorbtion by object), it being determined by matrix $\tilde{L}_o^{-1}(s)$. But a new effect - impulse motions of the outputs stated above - arises. To avoid it, the feedback projector and the regulator output are to be subjected to conditions: $\deg P_o(s) \leq 0$, $\deg y_r(s) \leq 0$. It may be realized if $\deg l_{1,no}(s) = \nu_o$, $\deg g(s) = \nu_o$, where $g(s)$ is a transfer function of a device to differentiate regulator (or object) output.

Similar kinds of disturbance rejection (compensation and absorbtion) are also known in different self-regulated and homeostatic systems, for instance, in mechanics (dynamic shock dampers), in nature (Le Chatelier effect), in electrical engineering (Lenz effect), etc.

Gilimyanov Ruslan Failevich, Cand. Sci. (Eng.),
Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia,
e-mail: Gilimyanov@gmail.com

PATH DEFORMATION METHOD IN ROBOT MOTION PLANNING PROBLEMS

Gilimyanov R.F.

One of the classical problems of robot motion planning is to find a collision-free path for a robot from one configuration to another [1, 2]. This problem is often referred to as path planning. Path planning uses a map of the environment and model of the robot to compute a path to the goal. Often path planners are designed to find any feasible path with little attention to its smoothness. Generally, the planned path is represented as a sequence of line segments. Following such a path may be either impossible or require much time and/or energy. Therefore, it is desirable that planned path be smooth and have low curvature.

After planning, the collision-free path is passed to the robot for execution. However, in the course of robot's motion, there may appear obstacles on the precomputed path due to changes in the environment. To prevent collisions, real-time collision avoidance, or reactive control, methods may be used. However, these methods are local and cannot guarantee achieving the goal configuration. There is another approach to solve the problem under consideration, in the framework of which the preplanned path is deformed to bypass the obstacles detected in the course of motion [3-6]. In this way, we obtain a collision-free path from the initial configuration to the goal one.

In the paper, a new method for deformation of a preplanned path is proposed to generate smooth collision-free paths. It is assumed that there is an initial collision-free path for a robot to follow, which was created by means of an environment map. If, due to changes in the environment, unexpected obstacles are detected on the path, the remaining part of the path is deformed by shifting the reference points. New positions of the shifted points are calculated by solving an unconstrained optimization problem. The functional to be minimized includes potential function defined by the obstacles (which prevents the path to pass through them), penalty for increasing the path length, and penalty associated with deviations from the original positions. To smooth and reduce curvature of the path, additional terms may be added.

1. LaValle S.M. Planning Algorithms. Cambridge University Press, 2006.
2. Choset H. et al. Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations. MIT Press, 2005.
3. Quinlan S., Khatib O. Elastic bands: connecting path planning and control // In Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation – 1993. – P. 802-807.
4. Quinlan S. Real-Time Modification of Collision-Free Paths: Ph.D. thesis / Stanford University. 1994.
5. Khatib M., Jaouni H., Chatila R., Laumond J.P. Dynamic path modification for car-like nonholonomic mobile robots // In Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation – 1997. – P. 2920-2925.
6. Lamiraux F., Bonnafous D., Lefebvre O. Reactive path deformation for nonholonomic mobile robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation – 2004. V. 20(6). – P. 967-977.

Айсагалиев Серикбай Абдигалиевич, доктор технических наук, профессор,
Институт математики и механики КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: aisagaliev@kaznu.kz
Кабидолданова Асем Алтаевна, кандидат физико-математических наук,
Институт математики и механики КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: kabasem@mail.ru
Кенжебаева Мерей Омаровна, магистрантка 2-года обучения механико-математического факультета,
КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А., Кенжебаева М.О.

Разработан метод решения краевой задачи оптимального управления линейных систем с квадратичным функционалом при наличии ограничений на значения управления, фазовых координат и интегральных ограничений.

Постановка задачи. Найти управление $u(t) \in U$, при котором решение системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)x_0 + D(t)x_1 + f(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

удовлетворяет краевым условиям

$$(x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S \subset R^{2n}, \tag{2}$$

фазовым ограничениям

$$x(t) \in G(t): \quad G(t) = \{x \in R^n \,/\, \gamma(t) \le L(t)x + \overline{f}(t) \le \delta(t), \quad t \in I\}, \tag{3}$$

интегральным ограничениям

$$g_j(x, u, x_0, x_1) \le c_j, \;\; j = \overline{1, m_1}, \;\; g_j(x, u, x_0, x_1) = c_j, \;\; j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \tag{4}$$

а функционал

$$J(x, u, x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_j(x, u, x_0, x_1, t)dt \tag{5}$$

достигает своей нижней грани. Здесь моменты времени t_0, t_1 фиксированы, $U \subset L_2(I, R^r)$ S - - ограниченные выпуклые замкнутые множества, $g_j(x, u, x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_j(x, u, x_0, x_1, t)dt$, $F_j(x, u, x_0, x_1, t) = x^*(t)Q_j(t)x(t) + u^*(t)R_j(t)u(t) + x_0^*E_j(t)x_0 + x_1^*\Sigma_j(t)x_1 + q_j(t)x(t) + r_j(t)u(t) + e_j(t)x_0 + \sigma_j(t)x_1 + f_{0j}(t)$, $j = \overline{0, m_2}$, элементы заданных матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $Q_j(t)$, $R_j(t)$, $E_j(t)$, $\Sigma_j(t)$, $j = \overline{0, m_2}$, и вектор-функции $f(t)$, $t \in I$, кусочно-непрерывны, функции $f_{0j}(t)$, $j = \overline{0, m_2}$, элементы матрицы $L(t)$, а также вектор-функций $\gamma(t), \delta(t), \overline{f}(t)$, $q_j(t), r_j(t), e_j(t), \sigma_j(t)$, $j = \overline{0, m_2}$, $t \in I$, непрерывны, c_j, $j = \overline{1, m_2}$, -- заданные числа.

Предлагается аналитико-численный метод решения задачи оптимального управления в два этапа: **1.** исследование существования решения краевой задачи и построение допустимого управления путем применения принципа погружения [1]; **2.** построение оптимального управления путем сужения множества допустимых управлений.

1. *Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. - Алматы: Казак университети, 2002. -- 348 с.

Аминаров Арвид Владимирович, аспирант 3 курса, факультет математики и информационных технологий, *Ульяновский Государственный Университет, Ульяновск, Россия;*
Павликов Сергей Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Камская государственная инженерно-экономическая академия, Набережные Челны, Россия;
Шепелев Георгий Александрович, аспирант 2 курса, факультет математики и информационных технологий, *Ульяновский Государственный Университет, Ульяновск, Россия,*
e-mail: geo.shepelev@gmail.com;

ОБ УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В СТРУКТУРЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Аминаров А.В., Павликов С.В., Шепелев Г.А.

Рассматривается управляемая система, описываемая векторным уравнением:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x_t, u\right),\ f\left(t, 0, 0\right) \equiv 0, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_t \in C$, C – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : \left[-h, 0\right] \to \mathbb{R}^n\ \left(h = const > 0\right)$, $u \in \mathbb{R}^m$ – управление. Исследуется в нелинейной постановке задача нахождения управления u вида $u = u\left(t, \varphi\right)$ из класса кусочно-непрерывных функций $U : \mathbb{R}^+ \times C \to \mathbb{R}^m$, обеспечивающих стабилизацию или слежение положения $x \equiv 0$. Покажем, что решение этой задачи достигается эффективным образом на основе метода знакопостоянных функционалов и функций Ляпунова с применением соответствующих теорем из [1 – 3] и их развития.

Пусть $u^0 \in U$ – есть некоторое управление. Исследуем соответствующее ему функционально-дифференциальное включение:

$$\dot{x}(t) \in F^0\left(t, x_t\right),\ F^0 = f\left(t, \varphi, u^0\left(t, \varphi\right)\right). \tag{2}$$

Через $a_i\left(y\right)$ обозначим функции типа Хана: $a_i\left(y\right)$ монотонно не убывающие, $a_i\left(0\right) = 0$ и $a_i\left(y\right) > 0$ при $y > 0$.

Теорема. Пусть для системы (1) может быть найдено управление $u^0 \in U$ и функционал Ляпунова $V = V\left(t, \varphi\right)$ такие, что

1. $V\left(t, 0\right) \equiv 0$, $V\left(t, \varphi\right) \le a_1\left(\left\|\varphi\right\|\right)$, его производная в силу системы (2) $\dot{V}^+ = \sup\limits_{y \in F(t, \varphi)} \left(\dfrac{\partial V}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i}\left(t, \varphi\right) y_i + \partial V_\varphi\right)$ в области $\left\{V(t, \varphi) > 0\right\}$ удовлетворяет неравенству
$$\dot{V}^+\left(t, \varphi\right) \le a_2\left(V\left(t, \varphi\right)\right);$$
2. решение $x = 0$ включения (2) равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $\left\{V\left(t, \varphi\right) = 0\right\}$.

Тогда управление u^0 является стабилизирующим.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект МД-7549.2010.1), ФЦП НК-408П «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № П/2230) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)» (проект 2.1.1/11180).

1. Анрдеев А.С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений / А.С. Андреев. – Ульяновск: УлГУ, 2005. – 328 с.
2. Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости / С.В. Павликов. – Набережные Челны: Изд-во института управления, 2006. – 264 с.
3. Седова Н.О. Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений / Н.О. Седова // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, № 3. – С. 468—472.

Андреев Александр Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
e-mail: andreevas@ulsu.ru
Артемова Александра Олеговна, аспирант,
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
e-mail: sasenka.05@mail.ru
Петровичева Юлия Владимировна, аспирант,
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

О МОДЕЛИРОВАНИИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Андреев А.С., Артемова А.О., Петровичева Ю.В.

Исследуется задача о составлении точных нелинейных дифференциальных уравнений управляемого движения механических систем твердых тел в матричной форме. Движение системы n твердых тел согласно принципу Даламбера описывается уравнениями [1]

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\delta\overline{r}_i\left(\overline{F}_i+\overline{U}_i-m_i\ddot{\overline{r}}_i\right)+\delta\overline{\pi}_i\left(\overline{M}_i+\overline{M}_i^{u}-\dot{\overline{L}}_i\right)\right]+\delta W=0$$

$$\dot{\overline{L}}_i=\overline{I}_i\dot{\overline{\omega}}_i+\overline{\omega}_i\times\overline{I}_i\overline{\omega}_i \quad (i=1,..,n), \tag{1}$$

где m_i, $\overline{r}_i$, $\overline{L}_i$, $\overline{I}_i$, $\overline{\omega}_i$, $\overline{F}_i$, $\overline{M}_i$ $\overline{U}_i$, $\overline{M}_i^u$ обозначают массу тела i, радиус-вектор его центра масс относительно полюса, фиксированного в инерциальном пространстве, момент количества абсолютного движения относительно этого центра масс, центральный тензор инерции и абсолютную угловую скорость, главный вектор и главный момент внешних и управляющих сил, действующих на тело i, соответственно. Слагаемое δW представляет собой полную возможную работу, совершаемую в шарнирах системы.

В работе показано, что если ввести в качестве переменных, определяющих движение системы, радиус-вектор центра масс системы $\overline{r}_c$, абсолютные вращения $\overline{\pi}_1,...,\overline{\pi}_n$, относительные перемещения $\overline{z}_1,...,\overline{z}_n$, тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$M\ddot{\overline{r}}_c=\overline{F}+\overline{U},\ \ (\delta\overline{\pi}^T\times\overline{B}-\delta\overline{Z}^T(T\mu))(\overline{F}+\overline{U}+m\overline{B}^T\times\dot{\overline{\omega}}+m(T\mu)^T(\overline{Z}''+2\overline{h})-m\overline{g}')+$$
$$+\delta\overline{\pi}^T(\overline{M}+\overline{M}_U-\overline{I}\dot{\overline{\omega}}-\overline{V})-\delta\overline{Z}^T\cdot\overline{X}^{(a)}+\delta\overline{\pi}^T S\overline{Y}^{(a)}=0 \tag{2}$$

Если вариации $\delta\overline{\pi}$ и $\delta\overline{Z}'$ являются независимыми, при этом шарниры являются шаровыми, допускающими независимые смещения, т.е. вариации $\delta\overline{\pi}$ независимы, и не зависят от $\delta\overline{Z}$, тогда получаем следующие уравнения

$$M\ddot{\overline{r}}_c=\overline{F}+\overline{U},$$

$$\overline{B}\times m\overline{B}^T\times\dot{\overline{\omega}}-\overline{I}\dot{\overline{\omega}}+\overline{B}\times m(T\mu)^T\overline{Z}''+\overline{B}\times\overline{F}+\overline{B}\times\overline{U}+\overline{B}\times 2m(T\mu)^T\overline{h}-\overline{B}\times m\overline{g}'+\overline{M}+\overline{M}_U-\overline{V}+S\overline{Y}=0$$

$$\delta\overline{Z}'^T((T\mu)m\overline{B}\times\dot{\overline{\omega}}+(T\mu)m(T\mu)^T\overline{Z}''+(T\mu)\overline{F}+(T\mu)\overline{U}+2(T\mu)m(T\mu)^T\overline{h}-(T\mu)m\overline{g}'+\overline{X})=0 \tag{3}$$

На основе этих уравнений разработана программа моделирования управляемого движения системы связанных твердых тел, при этом за параметры определяющих вращения тел приняты параметры Родриго-Гамильтона [2].

1. *Виттенбург Й.* Динамика системы связанных тел. – М.: Наука. 1980. 290 с.
2. *Бранц В.Н., Шмыглевский И.Г.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.:Наука. 1973. 320 с.

Андреев Александр Сергеевич Д.ф.м.н.
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,
email: AndreevAS@ulsu.ru;
Калеева Елена Игоревна, К.ф.м.н.,
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,
email: mtu@ulsu.ru
Дмитриева Ольга Геннадьевна, Аспирант,
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,
email: olenka-ul@mail.ru

РЕЛЕЙНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Андреев А. С, Калеева Е. И., Дмитриева О. Г.

Рассматривается механическая система с голономными нестационарными связями, движение которой описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q+U, \qquad (1)$$

где $q'=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ --- вектор обобщенных координат, $T=T_2+T_1+T_0$ --- кинетическая энергия системы, Q и U --- соответственно обобщенные внешние силы и управляющие силы.

Пусть $(q_0(t),\dot{q}_0(t))$ --- некоторое программное движение системы (1) из заданной совокупности $V^0=\{(q_0(t),\dot{q}_0(t))\}$ таких движений.

В докладе излагается разработанный алгоритм построения управления, обеспечивающего нелокальную стабилизацию этого программного движения. Предложен следующий закон управления

$$U'=(U_1,U_2,\ldots,U_n),\quad U_k=-\mu_k sign(\dot{q}_k-\dot{q}_k^0(t)+f_k(t,q-q^0(t))),\quad (k=1,2,\ldots,n) \qquad (2)$$

где $f'=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$, $f(t,0)=0$, --- некоторые функции, выбираемые из условия равномерной асимптотической устойчивости и нелокального притяжения нулевого решения $\dot{y}=f(t,y)$.

Представлена программа, позволяющая определить параметры управления (2), обеспечивающего стабилизацию каждого движения $(q_0(t),\dot{q}_0(t))\in V^0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП Развитие научного потенциала высшей школы (2.1.1/11180), ФЦП Научные и научно-педагогические кадры иннвационной России (госконтракты П/2230 и 2011-1.4-503-005-005(5)).

Анікушин А. В.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
e-mail: anik_andrii@ukr.net

АПРІОРНІ ОЦІНКИ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Анікушин А.В.

В циліндричній області $(t,x)\in Q=(0,T)\times\Omega$, де $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ --- обмежена однозв'язна область з регулярною межею $\partial\Omega$ розглянемо інтегро-диференціальний оператор

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_D+\mathcal{L}_I,\ \mathcal{L}_D u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A(u),\ \mathcal{L}_I u=\int_0^t\sum_{i=1}^n K_i(t,\tau)u_{x_i x_i}(x,\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Оператор A не залежить від змінної t і задається диференціальним виразом другого порядку

$$A(u)\equiv-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)u.$$

Ядра $K_i(t,\tau)$ --- неперервні на $[0,T]^2$ та неперервно-диференціойвні за змінною τ. Будемо вважати, що $a_{ij}=a_{ji}$ і оператор A є рівномірно еліптичним в області $\overline{\Omega}$. Функція $u(t,x)$ задовольняє початкові

$$u|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0 \tag{2}$$

та крайові умови

$$u|_{\partial\Omega}=0. \tag{3}$$

Позначимо L_0 --- множину функцій $u(t,x)\in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють умови (2) і (3), L_T --- множина функції $v(t,x)\in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють умови (3) і $v|_{t=T}=\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=T}=0.$

Нехай H_0^1, S_0^0 --- поповнення множини L_0 за нормами

$$\|u\|^2_{H_0^1}=\int_Q(u_t)^2+\sum_{i=1}^n(u_{x_i})^2dQ,$$

$$\|u\|^2_{S_0^0}=\int_Q u^2+\sum_{i=1}^n\left(\int_0^t u_{x_i}\,d\tau\right)^2dQ+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left(\int_0^T u_{x_i}\,d\tau\right)^2d\Omega+\int_\Omega u^2|_{t=T}\,d\Omega,$$

відповідно, H_T^k, S_T^k --- поповнення множини L_T за нормами

$$\|v\|^2_{H_T^1}=\int_Q(v_t)^2+\sum_{i=1}^n(v_{x_i})^2dQ,\qquad \|v\|^2_{V_T^1}=\|v\|^2_{H_T^1}+\sum_{i=1}^n\int_\Omega(v_{x_i})^2|_{t=0}\,d\Omega,$$

відповідно.

У роботі [1] для диференціального оператору $\mathcal{L}_D$ доведено оцінки

$$\|u\|_{S_0^0}\leqslant c_1\|\mathcal{L}_D u\|_{(V_T^1)^*}\leqslant c_2\|\mathcal{L}_D u\|_{(H_T^1)^*}\leqslant c_3\|u\|_{H_0^1}\,. \tag{4}$$

У доповіді доведено, що аналогічні оцінки справедиві для інтегро-диференціального оператору $\mathcal{L}$.

1. *Анікушин А.В., Номіровський Д.А.* Траєкторно-фінальна керованість гіперболічними системами в різних класах узагальнених функцій // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки -- 2008. -- № 3. -- С. 119-124.

Арсірій Анастасія Василівна,
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
e-mail: a-arsiry@ukr.net

ОБҐРУНТУВАННЯ МОЖЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНОЮ СИСТЕМОЮ З ПОХІДНОЮ ХУКУХАРИ

Арсірій А.В.

Розглянуто задачу керування лінійною системою, яка описується диференціальним рівнянням з похідною Хукухари:

$$D_h X(t,u) = \varepsilon[A(t)X(t,u)+B(t)u(t)+F(t)], \qquad X(0)=X_0, \qquad (1)$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр; $t\in R_+=[0,+\infty)$; $X(t,u):R_+\times R^n\to Conv(R^n)$ – багатозначне відображення, що визначає стан системи; $D_hX(t)$ – похідна Хукухари; $A(t)$ – матриця $(n\times n)$; $B(t)$ – матриця $(n\times m)$; $u(t)\in U$ – керований вплив, $U\in Conv(R^n)$; $F(t):R_+\to Conv(R^n)$ – багатозначне відображення.

Припущення. Нехай рівняння (1) задовольняє умови:
1) матриця $A(t)$ – вимірна на R_+ та існує така стала $a>0$, що $\|A(t)\|\le a$ для майже усіх $t\in R_+$;
2) матриця $B(t)$ – вимірна на R_+ та існує така стала $b>0$, що $\|B(t)\| \le b$ для майже усіх $t\in R_+$;
3) множина $U\in Conv(R^m)$;
4) багатозначне відображення $F(t)$ вимірне на R_+ та існує така стала $f>0$, що $h(F(t),\{0\})\le f$ для майже усіх $t\in R_+$.

Для початкового рівняння (1) побудовано усереднене рівняння

$$D_h Y(t) = \varepsilon[\overline{A}Y(t)+v(t)+\overline{F}], \quad Y(0)=X_0, \qquad (2)$$

де $\overline{A}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T A(t)dt,\ \overline{F}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t)dt,\quad v(t)\in V=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T B(t)Udt.$

Встановлено відповідність між керуванням $u(\cdot)$ початкового рівняння (1) та керуванням $v(\cdot)$ усередненого рівняння (2).

Керуванню $u(\cdot)$ поставлено у відповідність керування $v(\cdot)$ наступним чином:

1. Обчислюються $w_i=\frac{1}{T_1}\int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)u(t)dt,\quad$ i=0,1,2,... , де T1>0 – стала.

2. Будується керування v(t)={vi(t), iT1≤t≤(i+1)T1}, де vi(t) знаходимо із умови

$$\min_{\overline{v}(t)\in V}\| w_i-\overline{v}(t)\|=\| w_i-v_i(t)\|.$$

Керуванню $v(\cdot)$ поставлено у відповідність керування $u(\cdot)$ наступним чином:

1. Обчислюється $w_i=\frac{1}{T_1}\int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} v(t)dt,\quad$ i=0,1,2,... , де $T_1>0$ – стала.

2. Будується керування $u(t)=\{u_i(t),\ iT_1\le t\le(i+1)T_1\}$, де $u_i(t)$ знаходимо із умови

$$\min_{\overline{u}(t)\in U}\left\|\frac{1}{T_1}\int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)\overline{u}(t)dt-w_i\right\|=\left\|\frac{1}{T_1}\int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)u_i(t)dt-w_i\right\|.$$

Встановлено близькість розв’язків початкового і усередненого рівнянь (1) і (2) а також близькість значень термінальних критеріїв якості у однозначному та багатозначному випадках.

Бабинюк О. І., пошукач кафедри вищої математики факультету інформаційних систем і технологій
ДВНЗ «Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана»
e-mail: sahb@ukr.net

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ НАПРЯМІВ ІНВЕСТУВАННЯ

Бабинюк О.І.

Теорія стохастичного керування, розроблена в роботах [1,2], має застосування в розв'язуванні багатьох задач економіки та фінансів, зокрема задачі оптимального керування інвестиціями.

Нехай $x(t)$ - капітал деякого інвестора в момент часу t. Припустимо, що інвестор може обирати один з двох напрямів вкладання коштів. Вважатимемо, що ціна $p_1(t)$ одного з напрямів в момент часу t задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$dp_1 = p_1 a dt + p_1 \alpha d\nu(t), \qquad (1)$$

де $\nu(t)$ - вінерівський процес, $a, \alpha > 0$ - сталі, які виражають середню відносну швидкість зміни ціни p_1 і рівень перешкод відповідно. Це ризикове інвестування. Ціна p_2 іншого напряму задовольняє рівняння

$$dp_2 = p_2 b dt \qquad (b < a).$$

Це без ризикове інвестування. В <u>кожний</u> час інвестор вибирає частину u капіталу, яку він вкладає в ризиковий напрям, отже частина коштів в без ризиковий напрям складатиме $(1-u)$. Отже матимемо рівняння для капіталу $x(t)$:

$$dx(t) = x(t)\cdot(au + b(1-u))dt + \alpha u \cdot x_t d\nu(t)$$

Зрозуміло, що починаючи з капіталу $x_0(t) = x_0$ в момент часу t інвестор має бажання отримати максимальний прибуток. За умови $x \ge 0$ (тобто умови, що інвестор не буде мати боргів) така задача зводиться до задач стохастичного керування, тобто пошуку функції $\Phi(s,)$ і керування $u_0 = u_0(t, x(t))$ таких, що

$$\Phi(s,x) = \sup\left\{J^u(s,x), 0 \le u \le 1\right\},$$

де $J^u(s,x) = \langle N(x(T),u)\rangle$, $\langle\bullet\rangle$ - символ математичного сподівання, N - функція корисності, $N(0)=0$, T - момент виходу з області D - області на якій розглядається задача оптимального керування.

Доведено, що в цій постановці задачі при функції корисності виду $N(x) = x^\beta$, $0 < \beta < 1$ існує і знаходиться у явному вигляді оптимальне керування

$$u_0(t,x) = \frac{a-b}{\alpha^2(1-\beta)} = c = const,\ 0 < c < 1.$$

1. *Валеев К.Г., Джалладова І. А* .Оптимізація випадкових процесів. -Київ: КНЕУ, 2003.- 295с.

2. Острем К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973. — 322 с.

Барсегян Тигран Ваняевич, магистрант 1 курса, факультета математики и механики,
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения,
e-mail: t.barseghyan@mail.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

Барсегян Т.В.

Задачи управления и оптимального управления динамических объектов, когда в процессе функционирования системы могут изменяться параметры объекта, имеют важные теоретическое и прикладное значения. Подобные задачи встречаются при энергосберегающем управлении тепловыми аппаратами и объектами производственно-технологического назначения. В частности, модель динамики управляемого объекта с изменением состояний функционирования в жестко ограниченных временных интервалах приведена в работе [1], которая описывает процесс нагрева жидкости в тепловом аппарате. Важным фактором обеспечения эффекта энергосбережения является определение оптимальных управляющих воздействий с учетом изменений состояний функционирования системы.

В настоящей работе, для модели процесса нагрева жидкости в тепловом аппарате [1], построено оптимальное управляющее воздействие, в зависимости от изменения состояния функционирования на границах временных интервалах [2]. Исследование задачи проведено в предположениях, что в промежуточные моменты времени фазовые состояния не фиксированы и или они принадлежат некоторым компактным множествам. Поэтому оптимальное управляющее воздействие и оптимальное движение зависят от промежуточных значений фазового вектора. Следовательно, наименьшее значение функционала также будет зависеть от этих значений. Проведя повторную минимизацию функционала найдены значение фазового вектора на границах временных интервалов, которые доставляют минимальное значение функционалу. Получены явные выражения оптимального управляющего воздействия и соответствующего движения. Для конкретных числовых значений параметров системы построены соответствующие оптимальное управляющее воздействие и оптимальное движение.

1. Матвейкин В.Г., Муромцев Д.Ю. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения. – Москва: 2007. - 128с.
2. Барсегян В.Р. О задаче оптимального управления поэтапно меняющимся линейными системами с фазовыми ограничениями в промежуточные моменты времени. //Ученые записки ЕГУ, Ереван, Армения. - 2002. - №1, с.118-119.

Белоусов Александр Андреевич, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: abelousov@ukr.net;
Кривонос Ирина Юрьевна, кандидат физ.-мат. наук,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ В НОРМЕ ПРОСТРАНСТВА L_1

Белоусов А.А., Кривонос И.Ю.

Динамика игры задаётся линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \quad z(0) = z^0, \tag{1}$$

где $z \in \mathsf{R}^n$, $u \in \mathsf{R}^m$, $v \in \mathsf{R}^l$, A, B, C – постоянные матрицы размера $n \times n$, $n \times m$, $n \times l$.

Терминальное множество M является линейным подпространством R^n.

Управления игроков ограничиваются единичными шарами пространства L_1:

$$\int_0^\infty \| u(t) \| dt \le 1, \quad \int_0^\infty \| v(t) \| dt \le 1. \tag{2}$$

Если рассматривать лишь суммируемыми управлениями, то множество достижимости для системы (1) может быть незамкнутым, хотя и ограниченным. Причина этого состоит в том, что множество управлений, удовлетворяющих (2), не ограничено (по норме) в обычном смысле и содержит функции, которые сколь угодно близки к управлениям типа δ-функций.

Для исследования задачи (1), (2) расширим игру с помощью импульсных управлений:

$$U(t) = u(t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \delta(t - \eta_i), \quad V(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta(t - \theta_j), \tag{3}$$

где $u(t)$ и $v(t)$ – суммируемые функции, последовательности моментов импульсов $\{\eta_i\}$ и $\{\theta_j\}$ не имеют конечных точек сгущения, векторы $b_i \in \mathsf{R}^m$ и $c_j \in \mathsf{R}^l$ определяют величины импульсов.

Обозначим π – оператор проектирования из R^n на ортогональное дополнение к M.

Условие. Существует такое число λ, $0 \le \lambda < 1$, что для всех положительных t выполняется включение:

$$\pi e^{At} C D_v \subset \lambda \pi e^{At} B D_u, \quad \text{где } D_u = \{u \in \mathsf{R}^m : \|u\| \le 1\} \text{ и } D_v = \{v \in \mathsf{R}^l : \|v\| \le 1\}. \tag{4}$$

Теорема. Полагаем, что выполнено условие (4) на параметры игры (1), (2). Предположим, что существует момент $T = T(z^0)$ такой, что

$$\pi e^{AT} z^0 \in (1 - \lambda) \bigcup_{0 \le t \le T} \pi e^{At} B D_u .$$

Тогда дифференциальная игра преследования может быть закончена в момент T в классе контруправлений для импульсных управлений вида (3).

В докладе продолжаются и развиваются исследования [1, 2].

1. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями // Диф. уравнения. 1992. Т. 28, № 2. С. 219–223.
2. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 4. – С. 290–301.

Богачевська О.І., аспірантка кафедри інформаційного менеджменту
ДВНЗ « Київський національний економічний університет ім. В.Гетьмана»
e-mail:Laura-romanova@yandex.ru

ПОБУДОВА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ РЕКЛАМНИХ АГЕНЦІЙ

Богачевська О.І.

Стрімкий розвиток галузей реклами та телебачення веде не стільки до дефіциту персоналу, якій працює з кінцевими користувачами середньої та високої ланки, спеціалістах маркетингу і т.п., скільки до зростаючої потреби в персоналі, якій задіяний в створенні самого рекламного та телевізійного продукту. Це призводить до використання так званого тимчасового персоналу, який наймається на необхідний термін, який використовується на короткострокових і середньострокових проектах або на роботах терміном від одного дня до двох-трьох місяців. Кадровий чинник організації будь-якого бізнесу завжди належав до вирішальних. Його значення істотно зростає на перехідних періодах соціально-економічного розвитку і у кризових ситуаціях, коли потрібно засвоювати нові підходи до організації управління й виробництва, які б відповідали умовам не лише сьогодення, а й майбутнього.

Використання тимчасового персоналу надає необхідну гнучкість можливості адаптування до змін на ринку: ефективно перерозподілити статті бюджету; оптимізувати кількість співробітників; раціоналізувати витрати, пов'язані з розрахунком і виплатою заробітної платні. Така кадрова стратегія рекламних і телевізійних компаній в першу чергу пов'язана із специфікою бізнесу. Оскільки використання тимчасового персоналу походить з заходу, це з самого початку є прерогативою західних компаній. Тому це питання в Україні майже не розглядалось. Але сьогодні ситуація змінюється і до тимчасового персоналу звертається все більше компаній, а компанії, що займаються рекламною й телевізійною діяльністю, що потребують використання великої кількості тимчасових робітників, в основному для створення телевізійного і рекламного продукту, взагалі не можуть без них обійтись. Тому ця проблема є дуже актуальною. А зважаючи на специфіку рекламної діяльності, швидку плинність тимчасового персоналу, питання підбору та забезпечення ним є найважливішою задачею. Недостатня розробленість означеного комплексу проблем зумовило необхідність створення економічно-математичної моделі формування і використання баз даних модельних агенцій (персоналу, задіяного при виробництві рекламної та телевізійної продукції), яка адекватно описує процес взаємодії між модельними агенціями і користувачами, а також дозволяє розробити тактику і стратегію формування бюджету на розподіл коштів. Описання статистичних закономірностей використання персоналу модельних агенцій аналітичними методами створює умови для своєчасного і якісного надання рекламних послуг, оптимізації мережі модельних агенцій, ефективного використання баз даних, а також визначають фактичну потребу в тимчасовим персоналі і його структурі.

Аналіз діяльності рекламних агенцій в Україні свідчить про існування негативних тенденцій і призводить до зниження конкурентоспроможності. В ринкових умовах значна кількість рекламних агенцій (агенції по підбору персоналу) припинила своє існування.

Вихід полягає у вивченні змін користування персоналом, проведенні структурних перетворень в кадрових агенціях, економічно обґрунтованому оновленню баз даних, удосконаленню системи керування з використанням економічно-математичних методів, які дають можливість провести оптимізацію процесу підбору персоналу і здійснювати прогнозування і планування ефективного розвитку агенції. В роботі побудовано модель визначення оптимальної адаптивної структури персоналу агенцій із застосуванням методів теорії нечітких множин. За критерій оптимальності приймається величина очікуваного прибутку. Метою є мінімізація втрат через надлишок чи недостачу персоналу.

Брадул Наталья Валерьевна, Шайхет Леонид Ефимович,
Донецкий государственный университет управления,
83050, Донецк, ул. Челюскинцев, 159, e-mail: bradnv@ukr.net, leonid.shaikhet@usa.net

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Брадул Н.В., Шайхет Л.Е.

Пусть на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, S, P\}$ задан частично наблюдаемый случайный процесс $(x(i), y(i))$, у которого наблюдается только вторая компонента $y(i)$. Рассмотрена задача фильтрации, которая заключается в построении оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки величины $x(N)$ по результатам наблюдений $y(i)$, $0 \le i < N$.

Задача фильтрации поставлена и решена А. Н. Колмогоровым для стационарных случайных последовательностей и Н. Винером для систем с непрерывным временем. Н. Винер свел решение поставленной задачи к решению так называемого интегрального уравнения Винера–Хопфа. Рассмотрена задача фильтрации в случае, когда $x(i)$ – гауссовский процесс, ненаблюдаемый процесс задан стохастическим разностным уравнением

$$y(i+1) = A(i)x(i-h) + \xi(i+1), x(j) = 0, -h \le j < 0, y(0) = 0.$$

Здесь $x(i) \in R^n$, $\xi(i) \in R^k$ F_i-измеримые гауссовские случайные величины с независимыми значениями, $E\xi(i) = 0$, $E\xi(i)\xi'(j) = 0$, $i \neq j$, $E\xi(i)\xi'(i) = S(i)$, матрица $S(i)$ равномерно положительно определена, неслучайная матрица $A(i)$ размерности $k \times n$, $Ex(i) = 0$, $Ex(i)x'(j) = R(i, j)$, $Ex(i)\xi'(j) = Q(i, j)$, $Q(i, j) = 0$, при $i < j$, матрицы $S(i)$, $R(i, j)$, $Q(i, j)$ имеют соответствующие размерности.

Известно, что если $E|x(N)|^2 < \infty$, то оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой оптимальной траектории является условное математическое ожидание $m(N) = E(x(N)/F_N^y)$, где F_i^y – минимальная σ-алгебра, порожденная процессом $y(j)$, $0 \le j \le i$. Доказано, что такая оценка представима в виде

$$m_0(N) = \sum_{j=0}^{N-1} u_0(j) y(j+1), \tag{1}$$

где $u_0(j)$ – некоторая детерминированная матрица, $y(j)$ – наблюдаемый процесс.

Теорема. Матрица $u_0(j)$, определяющая оценку (1), является единственным решением уравнения типа Винера–Хопфа $u_0(j)S(j+1) + \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)Z(i, j) = P(j), \quad j = 0,1,\dots,N-1.$

Здесь
$$P(j) = R(N, j-h)A'(j) + Q(N, j+1),$$
$$Z(i, j) = A(i)R(i-h, j-h)A'(j) + Q'(j-h, i+1)A'(j) + A(i)Q(i-h, j+1).$$

Рассмотрена двойственность задачи оптимального управления. Показано, что если в качестве ненаблюдаемого процесса рассматривать оценку траектории $m_u(i)$, представимую в виде $m_u(i) = \sum_{j=0}^{i-1} u(i, j) y(j+1)$, то решение задачи фильтрации можно получить как решение некоторой задачи оптимального управления.

1. *Kolmanovskii V. B., Shaikhet L.E.* Control of Systems with Aftereffect: Translations of mathematical monographs. – Providence (RI): American Mathematical Society, 1996. – Vol. 157. – 336 p.

Востриков Анатолий Сергеевич, доктор техн. наук, профессор,
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия,
e-mail: vostrikov@sintez.nstu.ru
Мальцев Александр Сергеевич, аспирант
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия,
e-mail: alexandr-maltsev@inbox.ru
Шпилевая Ольга Яковлевна, кандидат техн. наук, доцент
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия,
e-mail: oyas07@yandex.ru

АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ

Востриков А.С., Мальцев А.С., Шпилевая О.Я.

Рассматриваются различные виды алгоритмов настройки параметров регулятора, полученные на основе метода локализации [1]. Первоначально метод был разработан для синтеза систем регулирования. Его применение способствует локализации характеристик объекта и возмущений в подсистеме, структурно организуемой обратными связями по старшим производным выходных переменных или полному вектору первых производных координат состояния, что позволяет подавить действие внешних возмущений, обеспечить требуемые динамические и статические свойства по выходу системы.

В докладе излагается последовательность синтеза алгоритмов адаптации методом локализации при различных видах переменных возмущений (параметрических, аддитивных, комбинированных). Синтезированные адаптивные системы характеризуются процессами, протекающими с разными темпами [2]. Это связано с присутствием фильтров оценки требуемых производных выходных переменных или переменных состояния для реализации адаптивных алгоритмов управления. Данные фильтры представляют собой линейные малоинерционные подсистемы. Кроме того, разнотемповость процессов порождается и особыми свойствами адапторов, состоящими в компенсации действия возмущений, темпы которых соизмеримы или выше темпов основных процессов замкнутой системы. Таким образом, в зависимости от характеристик возмущений в адаптивных системах существуют двух- или трехтемповые движения. Самые быстрые процессы организуются в контурах, основными составляющими которых являются фильтры оценки производных. Медленные процессы при устойчивых быстрых движениях удовлетворяют требуемым точностным показателям. Следует отметить, что частным случаем рассматриваемых адаптивных систем являются системы с параметрическим управлением, особенности структуры и свойств которых рассмотрены на примере стабилизации давления в [3].

В докладе приводятся условия сходимости процессов к эталонной траектории, полученные с помощью второго метода Ляпунова и метода разделения движений. Основные свойства адаптивных систем иллюстрируются результатами моделирования, выполненного в программной среде MATLAB.

1. Востриков А.С. Синтез систем регулирования методом локализации / А.С. Востриков. - Новосибирск: НГТУ, 2007. - 251 с.
2. Шпилевая О.Я. Исследование разнотемповых процессов в адаптивной системе / О.Я. Шпилевая // Известия РАН. Теория и системы управления, 2009. - №6. - С. 46-52.
3. Востриков А. С., Мальцев А.С. Параметрическая стабилизация давления / А.С. Востриков, А.С. Мальцев // Научный вестник НГТУ, 2009. - № 4(37). - С. 3–10.

Глебена Мирослава Іванівна, викладач, математичний факультет,
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород, Україна,
e-mail: HlebenaM@gmail.com;
Цегелик Григорій Григорович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua.

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Глебена М.І., Цегелик Г.Г.

В [1], використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, побудовано чисельний метод нульового порядку відшукання екстремуму довільних, як гладких, так і негладких вгнутих (опуклих) функцій від двох дійсних змінних $f(x, y)$, визначених в деякій області $D = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$. В [2] побудовано чисельний метод нульового порядку типу покоординатного підйому, який можна використати як для відшукання екстремуму довільних вгнутих (опуклих) функцій багатьох дійсних змінних, так і для відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких функцій багатьох змінних, які в області визначення задовольняють умові Ліпшиця за всіма змінними з деякою сталою L. В основу цього методу покладено використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично.

В доповіді, використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, розглядається побудова нового чисельного методу нульового порядку відшукання екстремуму довільної як гладкої, так і негладкої логарифмічно вгнутої функції $f(x, y)$, визначеної в деякій області *D*. При цьому припускається, що $f(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in D$. Якщо ця умова не виконується, то розглядається функція $f(x, y) + C$, де $C -$ деяка стала, така, що $f(x, y) + C > 0$ для всіх $(x, y) \in D$. Клас логарифмічно вгнутих функцій є ширший за клас додатних вгнутих функцій. Збіжність побудованого методу не залежить від вибору початкового наближення. Нами проведено порівняльний аналіз ефективності методу з методом покоординатного підйому.

1. Глебена М.І. Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних. / М.І.Глебена, Г.Г.Цегелик // Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". –2007. –Вип. 5.– С. 17–21.
2. Глебена М.І. Чисельний метод покоординатного підйому відшукання абсолютного максимуму негладких і розривних функцій багатьох змінних / М.І.Глебена, Г.Г.Цегелик // Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". –2009. –Вип. 7.– С. 78–82.

Гончаренко Юлия Валериевна, старший преподаватель,
Классический приватный университет, Запорожье, Украина,
e-mail: gontcharenko.yu@rambler.ru

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ В УСЛОВИЯХ РЫНКА

Гончаренко Ю.В.

Современное состояние экономики Украины в условиях рыночной экономики требует особого внимания к базовым отраслям. Электроэнергетика является одним из основных секторов экономики и имеет непосредственное влияние на промышленное развитие страны, а также играет значительную роль в обеспечении социального благополучия населения.

Снижение абсолютного уровня тарифов ниже уровня затрат на производство электроэнергии привело к появлению перспектив банкротства электроэнергетики, которые отодвигались ростом кредиторской задолженности. Кроме того, низкий уровень цен на электрическую энергию с одной стороны не стимулирует предприятия внедрять новые технологи, а с другой – не дает возможности развития энергогенерирующих мощностей. Поэтому повышение эффективности энергетических экономических систем является на сегодняшний день достаточно актуальной задачей.

В настоящее время производство электроэнергии полностью зависит от следующих факторов:
– от спроса на электроэнергию;
– от времени года – в период осенне-зимнего периода (I и IV кварталы) спрос резко увеличивается, а в II и III кварталы уменьшается;
– от времени суток;
– от стоимости электроэнергии, поставляемой в ОРЭ;
– от конкурентоспособности электроэнергии, поставляемой на рынок другими генерирующими компаниями.

В работе разработаны следующие модели процесса оптимизации производства электроэнергии:

1) когнитивная модель управления производством электроэнергии в условиях трансформационной экономики, исследование которой показало, что рассматриваемая система является достаточно устойчивой, т.е. никакое изменение управляющих факторов не вызовет изменение цели в нежелательном направлении;

2) модель минимизации затрат на производство электроэнергии, при этом за целевую функцию для выбора оптимальных значений параметров приняты суммарные затраты, связанные с производством и отпуском электроэнергии за определенный период;

3) динамическая модель взаимосвязи отпущенной электроэнергии в ОРЭ теплоэлектростанцией и основным ресурсом данной отрасли – топлива – для ее бесперебойной работы.

Результаты оптимизации производства электроэнергии свидетельствуют о том, что вследствие снижения закупок природного газа и незначительного увеличения закупок угля, но более высокой калорийности в сравнении с фактической, можно достигнуть снижения производственных затрат.

Анализ динамической модели взаимосвязи ТЭС и поставщика топлива показал, что для обеспечения непрерывности и постоянного единства производства и потребления электроэнергии необходимо, чтобы ежедневные поставки топлива находились в окрестности некоторой постоянной величины, значение которой определяется расходами топлива на единицу электроэнергии, спросом на электроэнергию и максимальным уровнем запасов топлива, которые сохраняются на складе электростанции.

Джалладова Ірада Агаверді , доктор фіз.-мат. наук, доцент
КНЕУ імені Вадима Гетьмана, Київ, Україна
e-mail: irada-05@mail.ru

ПОБУДОВА МОМЕНТНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ СИСТЕМИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД СУСІДНІХ ЗНАЧЕНЬ МАРКОВСЬКОГО ЛАНЦЮГА

Джалладова І.А.

На ймовірносному просторі розглянемо неоднорідну систему рівнянь

$$x_{k+1} = A(k, \xi_{k+1}, \xi_k)x_k + B(k, \xi_{k+1}, \xi_k) \qquad (1)$$

де ξ_k - скінченнозначний марковський ланцюг якій набуває значень $\theta_1, \theta_2 ..., \theta_n$ з ймовірностями $p_j(k) = P\{\xi_k = \theta_j\}$, $j = 1,...,n$, які задовольняють систему рівнянь.

$$p_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \pi_{js}(k) p_s(k) = 1 \quad , \; j = 1,...,n; k = 0,1,...$$

$$\pi_{js}(k) \geq 0 \quad , \; \sum_{s=1}^{n} \pi_{js}(k) = 1 \quad , \; j = 1,...,n; k = 0,1,2,...$$

Теорема. Нехай частинні щільності $f_j(k,x)$ розподілу випадкових величин (x_k, ξ_k) задовольняють систему функціональних рівнянь

$$f_j(k+1, x) = \sum_{S=1}^{n} \pi_{jS}(k) f_S\left(k, A_{jS}^{-1}(k)\right)\left(x - B_{jS}(k)\right)\left|\det A_{jS}^{-1}(k)\right|, \text{j=1,…,n}.$$

Тоді частинні моменти першого порядку $M_j(k) = \int\limits_{E_m} x f_j(k,x) dx$ задовольняють систему

$$M_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} {}_1^1\pi_{js}(k)\left(A_{js}(k) M_s(k) + p_s(k) B_{js}(k)\right)$$

Для частинних початкових моментів другого порядку $D_j(k) = \int\limits_{E_m} xx^* f_j(k,x) dx$ виконується

система рівнянь

$$D_j(k+1) = \sum_{S=1}^{n} \pi_{js}(k)\big(A_{js}(k) D_s(k) A^*{}_{js}(k) + B_{js}(k) M^*{}_s(k) A^*{}_{js}(k) +$$
$$+ A_{js}(k) M_S(k) B^*{}_{jS}(k) + p_S(k) B_{jS}(n) B^*{}_{jS}(k) \;\big), A_{jS} \equiv A(k, \theta_j, \theta_S), B_{jS} \equiv B(k, \theta_j, \theta_S), j, s = 1,...,n$$

Крім того, відповідно перший і другий момент знаходяться за формулами

$$M(k) = \sum_{j=1}^{n} M_j(k), D(k) = \sum_{j=1}^{n} D(k) .$$

Зокрема, в модельній задачі $x_{k+1} = x_k + b(\xi_{k+1}, \xi_k),$ (2)
де ξ_k набуває два значення з ймовірностями, що задовольняють систему різницевих рівнянь

$$p_1 = (1-\lambda)p_1 + \upsilon p_2, p_2 = \lambda p_1 + (1-\upsilon)p_2,$$

матимемо, що перший момент розв'язку (2) задовольняє рівняння

$$M(k+1) = M(k) + \frac{(1-\lambda)v}{\lambda+v} b_{11} + \frac{\lambda v}{\lambda+v} b_{12} + \frac{\lambda v}{\lambda+v} b_{21} + \frac{(1-v)\lambda}{\lambda+v} b_{22}.$$

1. Джалладова І.А.Теорія ймовірності та теорія випадкових процесів. – К.: КНЕУ, 2009. – 378с.

Елкин Владимир Иванович, д.ф.м.н.
Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия,
e-mail: elk_v@mail.ru;

НЕДООПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Елкин В. И

Рассматриваются управляемые системы следующего вида:

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset R^n, \quad u \in R^r. \tag{1}$$

Здесь y - фазовые переменные, u - управления, M - фазовое пространство, являющееся областью. Предполагается, что f_0 - гладкое векторное поле; f - $n \times r$-матрица, столбцы которой f_α, $\alpha = 1,\ldots,r$, - гладкие векторные поля и $rankf(y) = const$. Решением системы называется непрерывная кусочно-гладкая функция $y(t)$, для которой существует такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, удовлетворяющее соотношениям (1).

Управляемую систему можно представить в виде недоопределенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(y)\frac{dy^i}{dt} + \omega_0^k(y) = 0, \quad k = 1,\ldots,q < n, \quad y \in M \subset R^n. \tag{2}$$

Система (2) получается из соотношений (1) исключением переменных u (т.е. выражением управлений u из одних уравнений через y, $\dot{y}$ и подстановкой в остальные уравнения). Решения систем (1) и (2) совпадают. Систему (2) можно записать в виде системы уравнений Пфаффа

$$\sum_{i=1}^{n} \omega^k = \omega_i^k(y)dy^i + \omega_0^k(y)dt = 0, \quad k = 1,\ldots,q. \tag{3}$$

Представление управляемой системы (1) в виде системы (3) может быть полезным для решения различных задач управления, например, для исследования проблем эквивалентности и классификации. Две управляемые системы вида (1) называются эквивалентными, если существует диффеоморфизм фазовых пространств, переводящий решения одной системы в решения другой. Классификация - это описание систем с точностью до эквивалентности. Для систем Пфаффа также есть понятие эквивалентности. Две системы Пфаффа вида (3) называются эквивалентными, если одна из другой может быть может быть получены с помощью следующих операций: 1) замены координат (диффеоморфизма), 2) линейного невырожденного преобразования. Оказывается, что управляемые системы эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие системы Пфаффа. Это позволяет использовать хорошо развитые методы теории систем Пфаффа для изучения эквивалентности, классификации и других задач теории управления системами вида (1).

Калайда Олексій Феофілович, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
КНУ імені тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: akalayda@i.com.ua

ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ І КРИВИЗНА

Калайда О.Ф.

Розглянемо варіаційну задачу для функціоналу J,

$$y \mapsto J(y) = \int_a^b (k(x)y + \sqrt{1+y'^2})dx \qquad (1)$$

$$y(a) = a_1,\ y(b) = b_1 \qquad (2)$$

(при $k(x) \equiv 1$ та з множником Лагранжа λ при $\sqrt{1+y'^2}$ - це перша відома ізопериметрична задача - задача Дідони (в [1] її назва - задача Дідо)). Ця задача цікава тим, що відповідне їй рівняння Ейлера має вигляд

$$k(x) = y''/(1+y'^2)^{3/2} = y''/\sqrt{1+y'^2} - y'^2 y''/(1+y'^2)^{3/2},$$

тобто при заданій функції y - це формула кривизни кривої $y = y(x)$, а при заданій функції k - рівняння для відповідної їй функції y (при $k(x) \equiv const$ користувались першим інтегралом цього рівняння, тому цього не помічали). Отже, функція y з заданою кривизною $k(x)$ реалізує екстремум (легко переконатись, що це мінімум) функціоналу J. З такої точки зору розв'язок задачі Дідони очевидний – шукана функція y є функція з сталою кривизною, тобто коло радіуса $r = 1/\lambda$, його рівняння $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (1/\lambda)^2$, а тому, наприклад, при $y_0 = 0,$ та $a_1 = b_1 = 0$ в (2) це буде півколо, його довжина $l = \pi/\lambda \Rightarrow r = l/\pi$. Тому $S_{\max} = \pi(1/\lambda)^2/2 = l^2/2\pi.$

Як бачимо, задачі типу (1), (2) пов'язані з кривизною плоскої кривої – це може бути варіаційна задача на безумовний екстремум або, при наявності в (1) параметра при одному з доданків, двоїсті ізопараметричні задачі, причому у разі $k(x) \neq const$ маємо узагальнення задачі Дідони. Задача (1), (2) легко узагальнюється й на випадок декількох функцій $x \mapsto y_j(x)$.

Задачу (1), (2) (а також задачу Дідони) можна узагальнити й на випадок функцій декількох змінних. Для цього розглянемо функціонал V (для задачі Дідони – з параметром),

$$u \mapsto V(u) = \int_\Omega (k(X)u + (1+\sum_{j=1}^n p_j^2)^{1/2})dx_1 \dots dx_n,\ p_j = u'_{x_j},\ X = (x_1, \dots, x_n),$$

при відповідно заданих умовах на межі $\partial\Omega$ однозв'язної області Ω. Рівняння Ейлера тут є

$$k(X) = \Delta u/(1+\sum_{j=1}^n p_j^2)^{1/2} - (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j u''_{x_i x_j})/(1+\sum_{j=1}^n p_j^2)^{3/2},\ \Delta u = \sum_{j=1}^n u''_{x_j x_j}.$$

Як бачимо, для лінійної функції $u,$ як і в одновимірному випадку (1), $k(X) \equiv 0.$ Для сфери ця функція (знову-таки, як і в одновимірному випадку (1)) є стала, пропорційна радіусу сфери. Тому функцію $X \mapsto k(X)$, за аналогією, можна назвати своєрідною кривизною поверхні $u = u(X)$. Функція u надає функціоналу V теж мінімального значення (при $n = 1, 2, 3$ безпосередньо перевірено, що для квадратичної форми другої варіації цього функціоналу виконується додатній критерій Сильвестра, тобто вона додатня).

1. Мышкис А. Д. Математика для втузов. Специальные курсы. Москва: «Наука», ГРФМЛ, 1971. – 632 с.

Калайда Олексій Феофілович, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
КНУ імені тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: akalayda@i.com.ua

ДЕЯКІ РІВНОСТІ ТА НЕРІВНОСТІ В ЙМОВІРНІСНИХ МОДЕЛЯХ

Калайда О.Ф.

Теорема 1. Якщо для множини чисел x_j виконуються рівності

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j = \mu, \sum_{j=1}^{k}\hat{\alpha}_j x_j = \mu, \text{ де } k < n, \alpha = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j = 1, \hat{\alpha}_j = \alpha_j / \hat{\alpha}, \hat{\alpha} = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{k}\hat{\alpha}_j = 1, \quad (1)$$

то виконується також рівність

$$\sum_{j=k+1}^{n}\breve{\alpha}_j x_j = \mu, \text{ де } \breve{\alpha}_j = \alpha_j / \breve{\alpha}, \breve{\alpha} = \sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j \Rightarrow \sum_{j=k+1}^{n}\breve{\alpha}_j = 1. \quad (2)$$

Доведення. З (1), (2) випливає рівність $\hat{\alpha} + \breve{\alpha} = 1,$ а тому маємо

$$\mu = \hat{\alpha}\mu + \sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j x_j \Rightarrow \mu(1-\hat{\alpha}) = \sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j x_j \Rightarrow \sum_{j=k+1}^{n}\breve{\alpha}_j x_j = \mu.$$

Наслідок. При $\alpha_j = 1/n$ маємо $\hat{\alpha}_j = 1/k, \breve{\alpha}_j = 1/(n-k)$, тобто теорема 1 справедлива для середнього арифметичного чисел x_j. Зокрема, якщо середнє арифметичне μ нулів алгебричного многочлена $n-$го степеня являеється його $k-$кратним нулем, то середнє арифметичне залишкового многочлена (многочлена з вилученим нулем μ) теж дорівнює μ.

Таким чином, при знаходженні математичного сподівання випадкових величин множини значень цих величин можна мінімізувати вілученням зайвих підмножин.

Теорема 2. Якщо для множини чисел x_j виконуються рівності

$$\eta = (\prod_{j=1}^{n}x_j)^{\alpha} = \nu, \hat{\eta} = (\prod_{j=1}^{k}x_j)^{\beta} = \nu, \quad (3)$$

то виконується рівність

$$\breve{\eta} = (\prod_{j=k+1}^{n}x_j)^{\gamma} = \nu, \text{ де } \gamma = \alpha/(1-\alpha/\beta). \quad (4)$$

Доведення. З рівностей (3) маємо

$$\eta = \hat{\eta}^{\alpha/\beta}(\prod_{j=k+1}^{n}x_j)^{\alpha} \overset{(3)}{=} \nu^{\alpha/\beta}(\prod_{j=k+1}^{n}x_j)^{\alpha} = \nu \Rightarrow (\prod_{j=k+1}^{n}x_j)^{\alpha} = \nu^{1-\alpha/\beta} \Rightarrow (\prod_{j=k+1}^{n}x_j)^{\gamma} = \nu.$$

Наслідок. При $\alpha = 1/n, \beta = 1/k, k < n,$ маємо рівності (3), (4) для середнього геометричного чисел $x_{j.}$

Для математичного сподівання дискретних та неперервних величин маємо рівність $M(xy - MxMy) = M((x-Mx)(y-My)).$ Звідси за нерівністю Коші – Буняковського дістаємо нерівність ($D\xi -$дисперсія) $(M(xy - MxMy))^2 \le M(x-Mx)^2 M(y-My)^2 = DxDy.$ Для інтегралів ця нерівність має вигляд ($J(h) = \int_{\Omega} h(x)d\omega_x$, $\rho = mes\Omega \ne \infty$) $(J(fg) - J(f)J(g)/\rho)^2 \le$

$\le \int_{\Omega}(f(x) - J(f)/\rho)^2 d\omega_x \int_{\Omega}(g(x) - J(g)/\rho)^2 d\omega_x.$ А з відомої нерівності $M(x\text{-}Mx)^2 \ge 0 \Rightarrow$ $Mx^2 \ge (Mx)^2$ маємо нерівність $(\int_{\Omega} f(x)d\omega_x)^2 \le \rho\int_{\Omega} f^2(x)d\omega_x.$

Кіфоренко Борис Микитович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: bkifor@ukr.net;
Васильєв Ігор Юрієвич, кандидат фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: igor_v@univ.kiev.ua;
Ткаченко Ярослав Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: yaroslavvt@ukr.net;
Харитонов Олексій Михайлович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail:kharytonov@univ.kiev.ua;

МОДЕЛЮВАННЯ І КЕРУВАННЯ РУХОМ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ З ПЕРСПЕКТИВНИМИ РАКЕТНИМИ ДВИГУНАМИ

Кіфоренко Б.М., Васильєв І.Ю., Ткаченко Я.В., Харитонов О.М.

Найбільш актуальними завданнями сучасної космонавтики є автоматизоване дослідження небесних тіл, що відносяться до ближнього космосу, суттєве збільшення вантажопотоків між монтажною і геостаціонарною орбітами, та здійснення пілотованих експедицій до планет Сонячної системи. Підвищення ефективності маршових рушійних систем пов'язується, насамперед, з впровадженням нових енергоустановок малої тяги на базі сонячних батарей та з ядерним джерелом енергії. Проте, набір параболічної швидкості за допомогою установок малої тяги вимагає великих затрат часу. Тому було висунуто ідею здійснення перельотів до ближніх небесних тіл із комбінуванням великої та малої тяги.

Головною вимогою здійснення наукового супроводу розробки перспективних ракетних двигунів є дослідження проблем оптимізації параметрів і керувань роботою відповідних рушій них систем. Це вимагає розробки нових математичних моделей як власне двигунів, так і бортових джерел енергопостачання. На відміну від класичних моделей ідеально регульованого і нерегульованого двигунів, нові моделі повинні більш адекватно відтворювати регулювальні та масові властивості реальних двигунів.

Розроблено математичну модель плазмового електрореактивного двигуна з енергопостачанням від сонячної батареї, яка враховує особливості фізичних процесів генерування тяги і обмеження області зміни напруги і току сонячної батареї. При проведенні з допомогою принципу максимума Л.С. Понтрягіна аналізу оптимального керування величиною тяги вдалося провести звуження множини допустимих керувань до дуги вольт-амперної характеристики батареї від точки максимума тяги до напруги холостого ходу. Це звуження інваріантне по відношенню до крайових умов і функціоналу задачі Майера. Проведено оцінку ефективності змінного оптимального керування величиною тяги і релейного керування. Запропоновано новий спосіб керування, близький за ефективністю до оптимального і зберігаючий простоту реалізації класичного релейного керування.

Розроблено математичну модель ядерного ракетного двигуна, яка враховує обмеження на теплову потужність реактора, величину витрати робочого тіла, на допустимі термічні навантаження на конструкцію і можливість генерації залишкової тяги під час охолодження вимкненого реактора. Проведено аналіз оптимального керування роботою двигуна вздовж регулярних дуг оптимальних траєкторій. На прикладі переводу космічного апарату з орбіти супутника Землі на орбіту супутника Марса досліджено ефективність як ядерного ракетного двигуна великої тяги, так і дворежимного ракетного двигуна, який використовує як велику, так і малу тягу електроракетного двигуна, що входить до цієї комбінованої рушійної системи.

Козоріз В.В.,
Інститут високих технологій Київського національного університету ім. Т. Шевченка,
vasyl.kozoriz@gmail.com
Рибальченко О.І., студентка
Київського національного університету ім. Т. Шевченка.

МОДЕЛЮВАННЯ ОКУПНОСТІ НОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТРАНСПОРТУ

Козоріз В.В., Рибальченко О.І.

Сучасний стан економік багатьох країн суттєво залежить від сировинних енергоресурсів. Традиційні ресурси (нафта, газ) виснажуються, неконтрольовано зростають в ціні, а сучасні технології на основі їх використання суттєво впливають на погіршення екології та клімату. Тому важливим є потреба в технологіях, які не використовують або в значній мірі не залежать від традиційних енергоресурсів, а також дослідження економічної ефективності нових пропозицій в енергозберігаючих технологіях. В роботі пропонується підхід до моделювання проблеми окупності магнітолевітуючого транспорту, який базується на електриці, не має вихлопних газів і зношення, значно зменшує енергоспоживання та ін.. Такий транспорт на основі німецьких та японських розробок вже оперує в Китаї і Японії і викликає значний інтерес як альтернатива сучасним автомобілям та літакам. В дослідженні окупності досліджуються три маглев технології: німецька, базована на керованій електромагнітні підвісці, японська, що використовує надпровідні магніти на вагоні, та технологія, базована на використанні феномену «магнітна потенціальна яма» (МПЯ). Вважається, що витрати на кожну технологію до моменту окупності складаються з двох частин. Перша – це витрати на її закупівлю і будівництво. Вони залежать від довжини маглев лінії і визначаються відомими оцінками вартості побудови одиниці довжини траси. Друга частина – витрати на функціонування (операційні витрати). Оскільки всі технології, що оцінюються, не мають зношення (відсутні витрати на ремонт), є високотехнологічні і автоматизовані (малі витрати на обслуговуючий персонал), основна частина операційних витрат пов'язана з витратами на електричну енергію. Для оцінки витрат на енергію використано сучасний рівень тарифів на електроенергію в різних країнах світу і припущення лінійного зростання цих цін з часом. Якщо прийняти до уваги високу енергетичну ефективність лінійних моторів маглев транспорту, можна вважати, що основна частина операційних витрат визначатиметься витратами енергії на підвіс вагонів. Таке припущення відповідає відносно малій протяжності маглев ліній, коли втрати енергії на аеродинамічний опір знехтувально малі. Тоді для відомого пасажиропотоку можна оцінити річні операційні енерговитрати і загальну суму витрат, які повинні бути повернуті за час окупності проекту. Для трьох розглянутих стратегій вибору вартості проїзду як єдиного джерела повернення інвестиційних коштів (мінімальна, що відповідає рівню тарифу на енергію на момент введення траси в дію, максимальна стала вартість, та змінна з часом вартість) отримано співвідношення, що дозволяє оцінити термін окупності маглев проекту. Як приклад, термін окупності міської маглев-лінії в Києві «Вокзал - Борщагівка», базований на основі МПЯ-технології, оцінюється в 8-10 років.

Кривонос Ирина Юрьевна, кандидат физ.-мат. наук,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина;
Чикрий Кирилл Аркадиевич, кандидат физ.-мат. наук,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: chik@insyg.kiev.ua

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ДЛЯ СИСТЕМ С ТОЛЧКАМИ

Кривонос И.Ю., Чикрий К.А.

Рассматриваются игровые задачи для линейных динамических систем с разрывными траекториями, подверженных одновременно непрерывному и импульсному управлению двух сторон. Моменты импульсных воздействий на систему предполагаются фиксированными, однако величины импульсов находятся в распоряжении игроков и принадлежат некоторым компактам.

В описанной ситуации первый игрок доступными ему средствами пытается вывести траекторию процесса на заданное цилиндрическое множество, второй – ему препятствует. Данный конфликтно управляемый процесс анализируется с помощью метода разрешающих функций [1–3]. Схема метода предполагает введение специальных многозначных отображений и их опорных функций, изучение их свойств на предмет суперпозиционной измеримости. Предполагая выполненным условие Понтрягина, получаем возможность измеримого выбора управлений первого игрока в непрерывной части. Имея аналогичное преимущество по ресурсам в дискретной части, строится импульсное управление.

Аналогичный эффект может быть достигнут с помощью управлений-мер.

Благодаря свойствам разрешающих функций они могут быть найдены в явном виде для широкого круга задач с линейной динамикой и сравнительно простыми областями управления первого игрока. Так для шарообразных и эллипсоидальных областей эти функции являются большими положительными корнями соответствующих квадратных уравнений. Это обстоятельство позволяет, в частности, обосновать классическое правило параллельного сближения для импульсных систем [4].

Разрешающие функции, по существу, оценивают эффективные условия первого игрока при известном управлении второго в заданный момент. Полученные при этом бонусы суммируются и являются критерием окончания игры. Накопительная система оценки качества позволяет включить в исходную схему метода разрешающих функций первый прямой метод Понтрягина. При этом первому прямому методу соответствует бесконечное значение разрешающей функции. Приведено сравнение гарантированных времен упомянутых выше методов в терминах конусов. Схема метода дает возможность охватить такой важный класс игровых задач как групповое преследование и получать геометрически наглядные достаточные условия сближения.

Результаты иллюстрируются на многочисленных модельных примерах игровых задач для систем с толчками.

1. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. – К.: Наук. думка, 1992. – 384 с.
2. Чикрий А.А., Матичин И.И., Чикрий К.А.. Конфликтно управляемые процессы с разрывными траекториями // Кибернетика и системный анализ, 2004. – № 6. – С. 15–29.
3. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. – К.: Наук. думка, 2005. – 220 с.
4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Вища школа, 1987. – 288 с.

Кузенков Олег Анатольевич К.ф.м.н.
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, ф-т ВМиК, Нижний Новгород, Россия,
email: kuoa7@uic.nnov.ru;

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В СЕМЕЙСТВАХ МЕР

Кузенков О. А

Системы динамики вероятностных и положительных мер широко используются при описании многочисленных процессов самой разнообразной природы. Можно отметить, что почти все основные физические законы формулируются относительно плотности распределения тех или иных величин - массы, заряда и т. п. Большое значение имеет динамика вероятностной меры, связанная с описанием случайных процессов, в частности, марковских процессов. В терминах динамики мер выражаются процессы адаптации, обучения, распознавания образов. Не менее значимой является проблема оптимального управления такими процессами. Несмотря на то, что дифференциальные уравнения в семействах мер можно рассматривать как частный случай соответствующего уравнения в банаховом пространстве, существует много специфических свойств, характерных только для эволюции меры.

В работе получены результаты по системам динамики вероятностных и положительных мер. В частности, наиболее просто и естественно выражен критерий сохранения положительного решения, доказаны условия принадлежности решения семейству абсолютно непрерывных мер, исследована проблема ограниченности решения. Доказаны необходимые и достаточные условия принадлежности решения дифференциального уравнения семейству вероятностных мер, выведена универсальная форма правой части уравнения, обладающего таким свойством, доказаны теоремы о разрешимости таких уравнений, исследован вопрос о предельных характеристиках системы при стремлении времени к бесконечности. Выведены необходимые и достаточные условия оптимальности для процессов, допускающих такое описание, решен ряд задач оптимизации, в том числе при неограниченном времени управления. Рассмотрены разнообразные приложения построенной теории для конкретных задач математической физики.

1. *Кузенков О.А., Рябова Е.А.* Математическое моделирование процессов отбора. -- Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.
2. *Кузенков О.А., Новоженин А.В.* Уравнения динамики меры. -- Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2010.

Леонтьева Виктория Владимировна, к. ф.-м. н., доцент кафедры прикладной математики и механики,
Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина.
e-mail: vleonteva@mail.ru
Кондратьева Наталия Александровна, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры прикладной математики и механики,
Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина.
e-mail: n-kondr@mail.ru

НАБЛЮДАЕМОСТЬ В РАЗОМКНУТОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОЗИТИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БАЛАНСОВОГО ТИПА

Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А.

В работе рассматривается разомкнутая математическая модель позитивной динамической системы балансового типа, описываемая линейным разностным векторно-матричным уравнением [1, 2] вида

$$X_{t+1} = (I - B)^{-1}(A - B)X_t + (I - B)^{-1}C_t, \qquad (1)$$

где время t предполагается дискретным; X_t, X_{t+1} – n – мерные векторы состояния системы соответственно в моменты времени t и $t+1$, причем предполагается, что о векторах состояния нет полной информации, т.е. не все их компоненты доступны для измерения, C_t – n – мерный вектор управления системы, являющийся либо заданным, либо функционально установленным, A, B – постоянные матрицы размерностей $n \times n$, I – единичная матрица размерности $n \times n$. На матрицы коэффициентов в модели, описываемой векторно-матричным уравнением (1), накладываются некоторые ограничения, обеспечивающие получение неотрицательных решений на бесконечном интервале времени при неотрицательности входных параметров и начальных условий системы: матрицы $A, B, (A - B), (I - B)^{-1}(A - B)$ должны быть неотрицательными и продуктивными.

Для того, чтобы имелась принципиальная возможность восстановления вектора состояния системы (1) по измерениям ее наблюдаемой переменной $Y_t = DX_t$, где $D = (d_{ij})$– известная матрица постоянных коэффициентов соответствующей размерности, объект исследования должен обладать свойством наблюдаемости [1].

Исходя из необходимого и достаточного условия полной наблюдаемости, представляемого в виде рангового условия

$$rang\left[D^T \vdots \left(\widetilde{A}^T D^T\right) \vdots \left(\left(\widetilde{A}^T\right)^2 D^T\right) \vdots \ \ldots \ \vdots \left(\left(\widetilde{A}^T\right)^{n-1} D^T\right)\right] = n,$$

для рассматриваемой системы определено, что она является *полностью наблюдаемой*, что означает, что любое ее состояние X_t можно восстановить по известным значениям Y_t, измеренным на интервале $0 \le t \le T$, и использовать (после определения соответствующей оценки вектора состояния) для управления.

1. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 656 с.
2. Леонтьева В.В. Разомкнутая дискретная математическая модель позитивных динамических систем балансового типа и ее анализ / В.В. Леонтьева, Н.А. Кондратьева // Зб. наук. праць. Вісник ЗНУ. – Запоріжжя, 2009. – №1. – С. 132-137.

Лещенко Юрий Юрьевич, кандидат физ.-мат. наук,
Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого, Черкассы, Украина,
e-mail: ylesch@ua.fm;
Зоря Людмила Викторовна, студентка 4 курса, ННИ ФМКИС,
Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого, Черкассы, Украина,
e-mail: zorialv@gmail.com.

КОММУТИРУЮЩИЕ ГРАФЫ ГРУПП ВЕРХНИХ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Лещенко Ю.Ю., Зоря Л.В.

Теория групп, являющаяся одним из разделов современной абстрактной алгебры, тем не менее, имеет широкий спектр применений в разных отраслях науки (в квантовой механике, кристаллографии, криптологии) и техники (при распознании образов, анализе изображений, а также в робототехнике). Теория групп находит применения везде, где возникает проблема поиска, идентификации, формализации и количественного описания симметрий. За последнее десятилетие опубликовано немало статей, в которых осуществлялись попытки охарактеризовать абстрактные группы (или “визуализировать” их свойства) на основании свойств сопутствующих графов (коммутирующих графов [1-2]; некоммутирующих графов [3-4]; графов простых чисел [5]). В частности, в работе [1] были исследованы свойства коммутирующих графов для колец вырожденных, нильпотентных, идемпотентных, инволюционных, а также верхних треугольных (невырожденных и вырожденных) матриц над телом.

В данных тезисах мы рассматриваем свойства коммутирующих графов группы верхних унитреугольных матриц над конечным полем. Для произвольной группы G центр группы определяют как $Z(G)=\{x\in G \mid \forall y\in G\,(xy=yx)\}$. *Коммутирующим графом* (commuting graph) $\Gamma(G)$ группы G называется простой (без петель и кратных ребер) неориентированный граф, вершины которого – нецентральные элементы группы G, при этом две вершины смежные тогда и только тогда, когда $xy=yx$ [1]. *Диаметром* $\operatorname{diam}(\Gamma)$ *графа* Γ называется максимальное расстояния между вершинами графа. *Верхней треугольной* называется матрица (a_{ij}) такая, что $a_{ij}=0$ при $i>j$. Верхняя треугольная матрица называется (*верхней*) *унитреугольной*, если $a_{ii}=1$ для всех допустимых i. Множество всех унитреугольных матриц размерности $n\times n$ образует группу $UT_n(F)$ по умножению (F – поле).

Теорема. *Для произвольного конечного поля* F *:*

1) $\Gamma(UT_3(F))$ *имеет* $|F|+1$ *компоненту связности, каждая из которых является полным графом на* $|F|^2-|F|$ *вершинах;*

2) $\Gamma(UT_n(F))$ *при* $n\geq 4$ *является связным, при этом* $\operatorname{diam}(\Gamma(UT_n(F)))=3$.

1. Akbari S. Commuting graphs of some subsets in simple rings / S. Akbari, P. Raja // Linear algebra and its Applications. – 2006. – Vol. 416. – P. 1038-1047.
2. Giudici M. The diameters of commuting graphs of linear groups and matrix rings over the integers modulo m / M. Giudici, A. Pope. – arXiv:1003.0156v3. – 9 Apr 2010.
3. Abdollahi A. Non-commuting graph of a group / A. Abdollahi, S. Akbari, H.R. Maimani // Journal of Algebra. – 2006. – Vol. 298. – P. 468-492.
4. Могхаддамфар А.Р. О некоммутативных графах, ассоциированных с конечной группой / А.Р. Могхаддамфар, В.Д. Ши, В. Чжоу, А.Р. Зокай // Сибирский математический журнал. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 416–425.
5. Заварницин А.В. О распознавании конечных групп по графу простых чисел / А.В. Заварницин // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, № 4. – С. 390–408.

ЛІСНЯК Віктор Савич, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
v-lisnyak@univ.kiev.ua

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ ВЗАЄМОДІЇ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ

Лісняк В.С.

Задачі математичного моделювання й оптимізації охоплюють і такі, де досліджується взаємодія (зокрема накладання) конкретних фізико-механічних векторних полів.

Розглянемо два векторні поля $\mathbf{K}$ та $\mathbf{L}$ у точковому просторі E_n з векторами $\mathbf{k}$ та $\mathbf{l}$ відповідно. Віднесемо E_n до рухомого ортореперу $\mathbf{R} \equiv (\mathbf{A}; \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ з вершиною A, базисними ортами $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ і дериваційними рівняннями $d\mathbf{A} = \omega^r \mathbf{e}_r$ та $d\mathbf{e}_h = \omega_h^s \mathbf{e}_s$, де $\omega_r^s + \omega_s^r = 0$, а індекси $\alpha, ... = 1, ..., n-1;\ a, ... = 1, ..., n$. У локальному (з вершиною у спільній точці прикладення векторів $\mathbf{k}$ та $\mathbf{l}$) репері $\mathbf{R}$ (нульового порядку) маємо подання $\mathbf{k} = k^i \mathbf{e}_i$, а $\mathbf{l} = l^i \mathbf{e}_i$. З $d\mathbf{A} = \mathbf{0} \Rightarrow \{d\mathbf{k} = \mathbf{0},\ d\mathbf{l} = \mathbf{0}$ виходить $\omega^s = 0 \Rightarrow \{dk^r + k^s \omega_s^r = 0,\ dl^r + l^s \omega_s^r = 0$, а внаслідок $\omega^1 /\backslash \omega^2 /\backslash \cdots /\backslash\, \omega^n \neq 0$ одержуємо $dk^r + k^s \omega_s^r = k_u^r \omega^u,\ dl^r + l^s \omega_s^r = l_v^r \omega^v$.

У разі геометричної чи фізичної однотипності полів $\mathbf{K}$ та $\mathbf{L}$ після певного узгоджен-ня системи одиниць означена їх сума $\mathbf{E} = \mathbf{K} + \mathbf{L}$ з локальними представниками $\mathbf{e} = \mathbf{k} + \mathbf{l}$ і тому з $\mathbf{e} = m^s \mathbf{e}_s$ виходить $\omega^j = 0 \Rightarrow dm^r + m^s \omega_s^r = 0$. Після позначення $z_h^\varepsilon = m_h^\varepsilon$ дістаємо $z_k^m = x_k^m + y_k^m$. Залежності об'єктів $\mathbf{E}$ вищих порядків від $\mathbf{K}$ та $\mathbf{L}$ вже значно складніші.
Це не заважає переходом до належно адаптованого (так що $\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}_n$ і $\lambda > 0$) до по-ля $\mathbf{E}$ 1-реперу $\mathbf{R}$ задовільнити вимогу $m^\alpha = 0$, а $dm^r + m^s \omega_s^r = m_w^r \omega^w$ звести до вигляду

$$\theta_\alpha \equiv -\omega_\alpha^3 + a_{\alpha k} \omega^k = 0,\ D\theta_\pi \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \theta_\varepsilon); \quad \Lambda \equiv -d\lambda + \lambda_h \omega^h = 0,\ D\Lambda \equiv 0. \qquad (1)$$

Тут позначено $a_{\alpha r} = -z_r^\alpha \big|_{m^\alpha = 0}$, а $\lambda = m^n \,|_{m^\alpha = 0}$. Це вихідні диференціальні рівняння для поля $\mathbf{E}$ в адаптованому до нього $\mathbf{R}$. Функції $a_{\pi h}$ та λ_d є компонентами фундамента-льного геометричного об'єкту першого порядку (ф.г.о.-1) $(a_{\sigma l}, \lambda_\nu)$ результуючого поля $\mathbf{E}$.
Серед полів $\mathbf{K}$ та $\mathbf{L}$ можуть бути і нестаціонарні. Тоді алгоритмічно найважливіші з рівнянь виду (1) постають (зі врахуванням ще й $n = 3$) у вигляді

$$-\omega_\alpha^3 + a_{\alpha k} \omega^k + a_{\alpha 4} \omega^4 = 0; \quad -d\lambda + \lambda_h \omega^h + \lambda_4 \omega^4 = 0, \qquad (2)$$

де $\omega^4 \equiv dt$ – диференціал плинного часу t. Зовнішні диференціальні продовження систем (1) чи (2) приводять до побудови компонент ф.г.о.-h поля $\mathbf{E}$ як функцій полів $\mathbf{K}$ та $\mathbf{L}$. Це дозволяє конструювати (і неголономну [1,2]) геометрію $\mathbf{E}$ та (з використанням дос-ліджень доц. Галини Сергіївни Польці) з'ясувати проективно-інваріантні властивості $\mathbf{E}$.

Величини векторів $\mathbf{k}$ й $\mathbf{l}$ на практиці можуть відрізнятися на дуже багато порядків, проте це не завада побудові й оптимізації уточнених геометричних моделей у пору до-сліджень конкретних природничих явищ у масштабах нанорозмірів і вже й фемтосекунд.

1. Лісняк В.С. Диференціально-геометричні об'єкти поля електростатично-магнітної си-ли / Тези доповідей міжнар. конф. "Геометрія в Одесі – 2011".– Одеса, 2011. – с. 24.
2. Лісняк В.С. Дослідження з неголономної геометрії.// Київ. ун-т. – Київ, 1994. – 23 с. – Бібл. 126 назв.– Укр.– Деп. у ДНТБ України 20.07.94, № 1318-Ук94.

Мазко Алексей Григорьевич, д.ф.м.н.,
Институт математики НАН Украины, Киев, Україна,
e-mail: mazko@imath.kiev.ua;
Шрам Виталий Викторович, аспирант,
Институт математики НАН Украины, Киев, Україна,
e-mail: shramvitaliy@mail.ru;

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СЕМЕЙСТВА ПСЕВДОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Мазко А. Г., Шрам В. В.

Рассматривается псевдолинейная система управления с неопределенными матричными коэффициентами

$$\dot{x} = A(x,t)x + B(x,t)u, \quad y = C(x,t)x + D(x,t)u, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^l$ - векторы соответственно состояния, управления и наблюдения объекта, а значения непрерывных матричных коэффициентов принадлежат соответствующим политопам:

$$\begin{gathered} A \in P_a = \mathrm{Co}A_1,\ldots,A_{\nu_a}, B \in P_b = \mathrm{Co}B_1,\ldots,B_{\nu_b}, \\ C \in P_c = \mathrm{Co}C_1,\ldots,C_{\nu_c}, D \in P_d = \mathrm{Co}D_1,\ldots,D_{\nu_d}. \end{gathered} \tag{2}$$

Множество стабилизирующих регуляторов определяется в виде

$$u = K(x,t)y, \quad K(x,t) \in E \triangleq K : K^* P^{-1} K \le Q, \tag{3}$$

где P и Q - симметричные положительно определенные матрицы, описывающие эллипсоидальное множество $E \subset \mathbb{R}^{m\times l}$.

Теорема 1. *Пусть некоторые симметричные матрицы $X(t)$ и $Y(t)$ удовлетворяют условиям $X(t) \ge X_0 > 0$, $Y(t) \ge 0$ ($X_1 \ge X(t) \ge X_0 > 0$, $Y(t) \ge Y_0 > 0$), где X_0, X_1 и Y_0 - постоянные матрицы, и системе матричных неравенств*

$$D_s^T Q D_s < P^{-1}, \begin{bmatrix} \dot{X} + A_i^T X + XA_i + Y & XB_j & C_k^T \\ B_j^T X & -P^{-1} & D_s^T \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{4}$$

$$t \ge 0,\ i = \overline{1,\nu_a},\ j = \overline{1,\nu_b},\ k = \overline{1,\nu_c},\ j = \overline{1,\nu_b},\ s = \overline{1,\nu_d},$$

Тогда любое управление (3) обеспечивает устойчивость (равномерную асимптотическую устойчивость) нулевого решения каждой системы (1), (2) и общую функцию Ляпунова $v(x,t) = x^T X(t) x$.

Предлагается построение множества управлений вида (3), стабилизирующих семейство систем (1), (2) и обеспечивающих заданную оценку функционала качества

$$J(u,x_0) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) \right] dt \le \gamma, \tag{5}$$

где $S \equiv S^T > 0$, $R \equiv R^T > 0$ - заданные матрицы, $x_0 = x(0)$. На данном множестве определяется субоптимальное управление, минимизирующее значение γ.

1. *О.Г. Мазко, В.В. Шрам.* Робастна стійкість лінійних керованих систем з невизначеними коефіцієнтами // Математичні проблеми: механіки: Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2010. - Т. 7, № 3. - С. 248-260.

Матвієнко Володимир Тихонович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: matv@unicyb.ki.au

ОПТИМАЛЬНЕ ТЕРМІНАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ ДИСКРЕТНИМ СИСТЕМАМИ

Матвієнко В.Т.

Задача керування по переводу системи керування з початкової точки фазового стану у фінальний стан є основною задачею теорії керування (задача термінального керування). У разі системи керування з дискретним аргументом для цієї задачі описано повну множину її розв'язків. Цікавішим з практичної точки зору є задача оптимального переводу початкового стану динамічної системи у фінальний стан.

Розглянемо для цілком керованої дискретної системи керування задачу термінального керування, що переводить систему

$$x(i+1) = A(i)x(i) + B(i)u(i)\,,\ i = 0,1,2,\ \ldots,\ N \tag{1}$$

з початкового стану $x(0) = 0$ в кінцевий стан $x(N+1) = x_{(1)}$ і при цьому мінімізується наступний критерій якості

$$I(v) = \sum_{i=1}^{l} \big(x(k_i) - \overline{x}(k_i)\big)^T F(k_i)\big(x(k_i) - \overline{x}(k_i)\big). \tag{2}$$

Тут $F(k_i)$ – симетричні вагові матриці розмірності $n \times n$, наперед задані вектори $\overline{x}(k_i)$ розмірності n, $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_l$, v – вектор довільних параметрів розмірності $m(N+1)$. Ця постановка задачі дозволяє визначити оптимальне термінальне керування, при цьому траєкторія системи (1) проходитиме найближче до наперед заданих точок $\overline{x}(k_i)$, $i = 1,2,\ldots,l$.

Записавши необхідні умови мінімуму критерію (2), одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення вектора параметрів $v^T = \big(v^T(0), v^T(1), \ldots, v^T(N)\big)$,

$$Qv = d\,. \tag{3}$$

Елементи матриці Q і вектора $d^T = \big(d^T(0), d^T(1), \ldots, d^T(N)\big)$ при цьому мають наступний вигляд

$$d(k) = \sum_{i=1}^{l} \left\{ \left[W^T(k_i,k) - W^T(N+1,k)\big(WW^T\big)^{+} \sum_{j=0}^{k_i-1} W(N+1,j) \right] F(k_i) \times \right. \qquad k = 0,1,2,\ldots,N\,,$$
$$\left. \times \left[\overline{x}(k_i) - \sum_{j=0}^{k_i-1} W(k_i,j) W^T(N+1,j)\big(WW^T\big)^{+} x_{(1)} \right] \right\},$$

$W(i,j) = 0$ при $j \ge i$, елементи матриці Q наступного вигляду

$$q_{pk} = \sum_{i=1}^{l} \left\{ \left[W^T(k_i,k) - W^T(N+1,k)\big(WW^T\big)^{+} \sum_{j=0}^{k_i-1} W(N+1,j) \right] F(k_i) \times \right. \qquad p = 0,1,\ldots,N\,,$$
$$\left. \times \left[W(k_i,p) - \sum_{j=0}^{k_i-1} W(k_i,j) W^T(N+1,j)\big(WW^T\big)^{+} W(N+1,p) \right] \right\},$$

$k = 0,1,2,\ldots,N$, $W(i,j) = 0$ при $j \ge i$.

Одержано оптимальний розв'язок задачі термінального керування з дискретним аргументом, при цьому траєкторія системи проходитиме найближче до наперед заданих точок. Знайдений розв'язок дозволяє розв'язати ряд практичних задач з обмеженнями на траєкторії.

Маханець Любов Леонідівна, кандидат екон. наук, доцент,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: liuba_max@rambler.ru

ОЦІНКА ПОЛІТИЧНОГО РИЗИКУ МЕТОДАМИ ЕКОНОФІЗИКИ

Маханець Л.Л.

У сучасній економічній науці нелінійна динаміка, синергетика, детермінований хаос, фрактали, генетичні алгоритми, нечіткі множини і інші новітні наукові поняття проникають в теорію, змушуючи переглянути досягнуті раніше результати та зроблені висновки. Виникають нові дослідницькі програми, націлені на більш достовірне пояснення складних явищ. До їх числа належить дисципліна, яка зовсім недавно сформувалася і отримала назву "еконофізика".

Еконофізика є одним з перспективних напрямків розвитку економічної науки. Вона, як і інші міждисциплінарні дослідження, дозволяє зіставити нові методи аналізу і знайти можливо більш дієві методи моделювання і прогнозування економічних систем.

Виходячи з цього, пропонуємо використовувати деякі поняття квантової механіки в аналізі політичного ризику.

При визначенні ступеня політичного ризику, як правило, використовуються рейтингові оцінки, що визначають ризик як деякі дискретні величини. Ці дискретні величини можна інтерпретувати як кванти, які широко використовуються в квантовій механіці.

Квант – елементарна дискретна неподільна порція певної фізичної величини. Поведінку квантів описує хвильова функція, яка може бути знайдена в результаті розв’язання хвильового рівняння Шредінгера.

Хвильова функція $\psi(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ залежить від координат системи $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і, в загальному випадку, від часу, і формується таким чином, щоб квадрат її модуля показував густину ймовірності w виявити систему в стані, що описується координатами $x_1 = x_{01}$, $x_2 = x_{02}, \ldots, x_n = x_{0n}$, у момент часу t:

$$w = \frac{dp}{dV} = \left|\psi(x_1, x_2, ..., x_n, t)\right|^2 .$$

Тоді в заданому квантовому стані системи, що описується хвильовою функцією, можна розрахувати ймовірність p того, що частка буде виявлена в області простору об’єму V':

$$p = \int_{V'} \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})dV ,$$

де ψ^* – комплексно спряжена функція.

Набір координат, які виступають в ролі аргументів хвильової функції – це повний набір величин, які можна виміряти в системі. У квантовій механіці можливо вибрати кілька повних наборів величин, тому хвильова функція одного і того ж стану може бути записана від різних аргументів.

Аналогічно можна моделювати ступінь ризику в економічній системі. Політичний ризик, як відомо, визначається набором кількісних випадкових величин. Він залежить від цих величин і від часу. Так само, як і в квантовій механіці, можна створити кілька повних наборів цих величин.

У роботі запропоновано в якості кількісних характеристик політичного ризику вибрати найбільш вагомі макроекономічні характеристики: ВВП, рівень інфляції, обсяг інвестицій, державний борг і за допомогою хвильової функції розрахувати ймовірності настання певного значення рейтингу політичного ризику.

Минченко Леонид Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
БГУИР, Минск, Беларусь,
e-mail: leonidm@relsoft.by;
Стаховский Сергей Михайлович, ассистент,
БГУИР, Минск, Беларусь,
e-mail: inform@bsuir.by

ОБОБЩЕННОЕ УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ МАНГАСАРЯНА-ФРОМОВИЦА

Минченко Л.И., Стаховский С.М.

Рассмотрим задачу (*P*) математического программирования

$$f(y) \to \min, \quad y \in C$$

с непустым множеством допустимых точек $C = \left\{ y \in R^m \mid h_i(y) \le 0 \quad i \in I \ , \ h_i(y) = 0 \quad i \in I_0 \right\}$, где $y \in R^m$, I={1, …, s}, I$_0$={s+1,…, p} или I$_0$=∅, $f(y)$, $h_i(y)$ $i = 1,2,...,p$ - непрерывно дифференцируемые функции из R^m в *R*.

Для задачи (*P*) введем множество множителей Лагранжа в точке *y*

$$\Lambda(y) = \{\lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla f(y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \ \lambda_i \ge 0 \ i \in I, \ \lambda_i h_i(y) = 0 \ \ i \in I\}.$$

Пусть $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$. В точке $y \in C$ рассмотрим линеаризованный касательный конус $\Gamma_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \le 0 \quad i \in I(y), \ \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\}$ и положим $I^0(y) = \{i \in I(y) \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0 \quad \forall \bar{y} \in \Gamma_C(y)\}$.

Будем говорить, что в точке $y_0 \in C$ выполнено обобщенное условие Мангасаряна-Фромовица (GRMF), если система векторов $\{\nabla h_i(y) \ \ i \in I_0 \cup I^0(y_0)\}$ сохраняет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y_0.

Теорема 1. Пусть условие GRMF имеет место в точке $y_0 \in C$ и данная точка является решением задачи (*P*). Тогда $\Lambda(y_0) \ne \varnothing$.

Частным случаем условия GRMF являются классические условия регулярности Мангасаряна-Фромовица [1] и постоянного ранга [2]. Простые примеры показывают, что условие GRMF может выполняться также в точках, в которых не выполняются условия регулярности [3-5].

1. Mangasarian O.L., Fromovitz S. The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints //Journal on Mathematical Analysis and Applications. V.17, 1967. P. 37-47.

2. Janin R. Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming// Mathematical Programming Study. V.21, 1984. P.110-126.

3. Andreani R., Martinez J.M., Schuverdt M.L. On the relations between constant positive linear dependence condition and quasinormality constraint qualification //J. Optimization Theory and Applications. -2005. - V.125. P. 473-485.

4. Minchenko L., Tarakanov A. On error bounds for quasinormal programs // J. Optimization Theory and Applications. – 2011. – V.148. P. 571-579.

5. Minchenko L., Stakhovski S. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming/ Minchenko L., Stakhovski S. //Optimization. – 2011.- V.60. P.1-12.

Моторина Дарья Юрьевна, аспирантка факультета математики и информационных технологий,
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,
e-mail: motorina.dyu@gmail.com

О ПОСТРОЕНИИ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНОГО КОЛЕСНОГО РОБОТА ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТА ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ КОЛЕС

Моторина Д.Ю.

Рассматривается задача слежения для мобильного омни-робота при учете эффекта проскальзывания колес и в предположении, что в структуре управления присутствует неизвестное запаздывание, зависящее от времени.

Робот состоит из платформы и трех колес, на которых закреплены ролики. Подобная конструкция колес позволяет роботу перемещаться в любом направлении без предварительного разворота. Рассматривается такое движение робота, когда платформа перемещается по ровной горизонтальной поверхности и вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр масс, при этом колеса робота проскальзывают относительно опорной поверхности.

Робот управляется посредством трех независимых электродвигателей, которые формируют управляющие моменты, приложенные к колесам. Предполагается, что в структуре управления присутствует ограниченное запаздывание, зависящее от времени. Необходимо найти такой закон управления, который обеспечит отслеживание заданной траектории платформы робота при наличии эффекта проскальзывания колес.

Вопросы синтеза управления с запаздыванием в структуре рассматриваются в известной работе [1], в которой представлен метод построения релейного запаздывающего управления. Использование релейных управлений обладает рядом преимуществ, но приводит к возникновению значительных колебаний в устройствах управления.

Для решения проблемы автоколебаний предлагается использовать непрерывное управление с насыщением [2], которое представляет собой комбинацию релейного управления и быстро меняющегося линейного управления, т.е. его можно рассматривать как непрерывную аппроксимацию релейного управления.

Для рассматриваемого мобильного омни-робота разработан алгоритм синтеза запаздывающего управления с насыщением. Предлагаемый алгоритм позволяет найти необходимые параметры управления, максимальную величину запаздывания и величину начальных отклонений от отслеживаемой траектории.

Численное моделирование движения робота подтверждает эффективность управления с насыщением и уменьшение автоколебаний по сравнению с использованием релейного управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (Госконтракт № 14.740.11.0685), Совета по грантам Президента РФ (проект МД–7549.2010.1) и РФФИ (проект 11.01.00541).

1. Перегудова О.А. К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении / О.А. Перегудова // АИТ. – 2009. – №5. – С. 95–105.
2. Моторина Д.Ю. Управление с насыщением в задаче слежения для механических систем с учетом запаздывания / Д.Ю. Моторина // Автоматизация процессов управления. – 2010. – № 1. – С. 24–30.

Набивач Владимир Евгеньевич, кандидат техн. наук, старший научный сотрудник,
Институт космических исследований НАНУ-НКАУ, Киев, Украина,
e-mail: nve@bigmir.net;
Набивач Анастасия Владимировна, студентка 4 курса, факультета электроники,
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина,
e-mail: nabina@bigmir.net

ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ И УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ

Набивач В.Е., Набивач А.В.

Теорию катастроф следует рассматривать как прикладной аспект теории особенностей гладких отображений [1]. Она представляет собой теорию устойчивости особых точек динамических систем, поведение которых определяется семействами непрерывных потенциальных функций $P(x_i, C_m)$.

Особенностью в теории катастроф является скачкообразное изменение состояния сложной системы при непрерывном изменении ее параметров, что и используется при моделировании соответствующих явлений.

Широкое приложение методов теории особенностей гладких отображений (катастроф) началось после выхода в свет книги одного из создателей этой теории — Рене Тома [2], где теория катастроф была применена для изучения теории морфогенеза (формообразования) в биологии.

Методы теории катастроф используются для моделирования скачкообразных процессов в физике (механике и оптике), биофизике, биологии, психологии, общественных науках. Многие из этих приложений теории катастроф могут быть рассмотрены с позиции управления рисками.

Скачкообразные процессы часто сопряжены с действительно катастрофическими явлениями. Возникающее новое положение равновесия во многих случаях является нежелательным, связано с разрушением конструкции или системы, а в отдельных случаях – с утратой функциональности сложных систем. Это остойчивость судов, прощелкивание упругой балки и т.д.

Катастрофическое поведение внутренне присуще многим сложным системам. Для них характерны общие закономерности, которые могут быть выявлены на основе методов нелинейной динамики и системного анализа.

В работе с позиций теории катастроф, на основе рассмотрения особенности коразмерности два «сборка», представлены задачи управления рисками в динамических системах с несколькими устойчивыми положениями равновесия, рассмотрены также и более сложные особенности. Указано, что в областях унимодальности системы не подвержены риску, а бифуркационные многообразия можно рассматривать как многообразия риска даже в системах, которые не демонстрируют катастрофическое поведение.

Рассмотрены признаки рискованного поведения систем, предвестники рискованного и закритического поведения системы.

В работе с позиций теории катастроф рассмотрены задачи управления рисками в космических системах критического назначения. Задача повышение надежности космических систем критического назначения рассмотрена с точки зрения минимизации риска фатального отказа.

1. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений.- М.: Наука, 1984.- 336 с.
2. *Thom R.* Stabilite structurelle et morphogenese. N. Y., 1972.- 362 p.

Неймарк Юрий Исаакович, доктор технических наук, профессор, академик РАЕН,
ННГУ имени им.Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: neymark@pmk.unn.ru;
Гельфер Ирина Самуиловна, научный сотрудник,
НИИ прикладной математики и кибернетики, ННГУ имени им.Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: neymark@pmk.unn.ru

О НОВЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ КВАЗИИНВАРИАНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Неймарк Ю.И., Гельфер И.С.

Возможность осуществления квазиинвариантного управления объектом при наличии произвольного внешнего ограниченного возмущения была показана в [1]. В системе управления объектом x

$$\begin{aligned} A_n(p)x &= -B_m(p)\big(u+\xi(t)\big), \\ \mu u &= D_q(p)x, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $A_n(p)$, $B_m(p)$, $D_q(p)$ - полиномы с постоянными коэффициентами степеней n, m и q, $m<n$, $q=n-m-1$, $p=d/dt$, μ - малый параметр, $\xi(t)$ - неизвестное внешнее ограниченное воздействие и u - управление, можно при устойчивом $B_m(p)$ и надлежащим образом выбранными μ и устойчивом $D_q(p)$ после переходного процесса обеспечить требуемую малость ошибки управления $|x|$. В данной работе показано, как можно расширить реальные возможности квазиинвариантного управления путём введения дополнительного параллельного элемента даже при неустойчивом. $B_m(p)$. Устойчивость системы управления (1) и хорошее качество её работы (малость $|x|$ в установившемся режиме, быстрота его установления, ограниченность $|u|$) обеспечиваются подходящим выбором параметров системы.

Проведено аналитическое и компьютерное исследование конкретной модели управления неустойчивым объектом четвёртого порядка, $A_4(p)=p^4-p^3+2p^2+3p-2$, с неустойчивым $B_2(p)=p^2-2p+3$. Проведены численные расчёты и построены графики поведения траекторий. Полученные результаты показывают, как можно обеспечить устойчивость системы управления в целом и удовлетворить требованиям её работы с помощью подбора параметров параллельной и обратной связей, а также, как можно добиться улучшения показателей качества управления объектом путём изменения в процессе работы системы как малого параметра μ, что было осуществлено в работе [2], так и других параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 11-01-00379.

1. Неймарк Ю.И. Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного управления / Ю.И. Неймарк // А и Т. 2008.- №10.- С. 48-56.
2. Неймарк Ю.И. Нелинейность, как расширение возможностей квазиинвариантного управления / Ю.И. Неймарк, И.С. Гельфер // Труды VIII Всероссийской научной конференции "Нелинейные колебания механических систем", Н.Новгород, 2008.- Т.1. – С.132-136.

Новицький Віктор Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу аналітичної механіки, *Інститут математики НАН України, Київ, Україна,*
e-mail: novyc@imath.kiev.ua;
Коломійчук Олег Петрович, кандидат фіз.-мат. наук, молодший науковий співробітник, *Інститут математики НАН України, Київ, Україна*
e-mail: kolomithyk@rambler.ru

ПОБУДОВА СПОСТЕРЕЖНИКА ПОВНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ СЛАБКОСПОСТЕРЕЖНОЇ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ ГІРОСКОПІЧНОЇ СИСТЕМИ

Новицький В.В., Коломійчук О.П.

Робота присвячена побудові спостережника для стаціонарних гіроскопічних систем, рівняння яких записані у формі Лагранжа другого роду. Після зведення цих рівнянь до форми Коші, показано, при яких умовах гіроскопічні системи набувають властивостей майже консервативних динамічних систем.

Для майже консервативної гіроскопічної системи розвинена спрощена методика аналітичного пошуку матриці підсилення спостережника повного порядку, яка ґрунтується на декомпозиції матричного рівняння Ляпунова. Як наслідок, за допомогою розвиненої методики отримано алгоритм побудови спостережника повного порядку розглядуваної гіроскопічної системи. Наводиться приклад застосування запропонованої методики та алгоритму, до механічної моделі гіроскопічного компаса, як представника майже консервативних гіроскопічних систем.

1. Коломійчук О.П. Фільтрація в гіроскопічних системах / О.П. Коломійчук, В.В. Новицький // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. –Т.4,   № 2. – С. 72–77.

2. Коломійчук О.П. Застосування другого метода Ляпунова для побудови спостережника майже консервативної динамічної системи / О.П. Коломійчук, В.В. Новицький // І Український математичний конгрес 2009 (до 100-річчя від дня народження М.Боголюбова), 27-29 серпня 2009р. м. Київ : Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2009.

Новоженин Алексей Владимирович Аспирант
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
email: a.novozhenin@gmail.com;
Кузенков Олег Анатольевич, К.ф.м.н.,
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, ф-т ВМиК, Нижний Новгород, Россия,
email: kuoa7@uic.nnov.ru

ПРИНЦИП МИНИМУМА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Новоженин А. В, Кузенков О. А.

Пусть B -- банахово пространство. Пусть оператор $A : B \to B$ -- линейный, замкнутый с областью определения $D(A)$ плотной в B, резольвента $R(\lambda, A)$ оператора A удовлетворяет условию $\| [R(\lambda, A)]^n \| \leqslant M\lambda^{-n}$ при $\lambda gt; 0$, $n = 1, 2, \ldots$, где значения λ принадлежат резольвентному множеству оператора A, M -- некоторая константа. Поставлена задача оптимального управления следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + U(t)x,\ 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$x(0) = x_0$$

$$J_0(U(\cdot)) = \int_0^T (F_1(x(t), t) + F_2(U(t), t))dt + \Phi(x(T)) \to \inf,$$

где $x = x(t)$ -- функция, зависящая от времени, переводящая пространство R^1 в банахово пространство B; $U = U(t)$ -- операторная функция управления, зависящая от времени, значения которой в каждый момент времени принадлежат некоторой области управления G в множестве $[B]$ линейных ограниченных операторов, действующих из пространства B в пространство B; $F_1(x,t)$, $F_2(U,t)$, $\Phi(x)$ -- функционалы, непрерывные по совокупности своих переменных, имеющие производные по Гато $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$, также непрерывные по совокупности своих переменных. Время управления T будем предполагать фиксированным.

Для поставленной оптимизационной задачи доказан принцип минимума: пусть в поставленной задаче существует сильно кусочно-непрерывное оптимальное управление $\bar{U}$, и пусть $\bar{x}$ -- соответствующая ему оптимальная траектория, тогда функция Гамильтона $H_t[U] = \psi U(t)\bar{x} + F_2(U,t)$ в области управления $G \subset [B]$ достигает своего минимума в точке $\bar{U}(t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$, за исключением, быть может, конечного числа точек: $H_t[\bar{U}(t)] = \min\limits_{U \in G \subset [B]} H_t[U]$. Здесь $\psi(t)$ -- решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^*\psi - \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(\bar{x}(t), t), \\ \psi(T) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(\bar{x}(T)), \end{cases}$$

где A^* -- сопряженный оператор к оператору A, ψ -- элемент сопряженного пространства к пространству B.

Онищенко Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт математики НАН Украины, Киев,
e-mail: onis33s@uos.net.ua;
Малоед Марина Николаевна, аспирантка,
Национальный авиационный университет, Киев, Украина,
e-mail: marishka.s06@rambler.ru

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В ВЕРХНЕМ ПОЛОЖЕНИИ РАВНОВЕСИЯ

Онищенко С. М., Малоед М. Н.

Стабилизация математического маятника в верхнем (неустойчивом) положении равновесия с интегрирующим управляющим органом [1], математическая модель которого представляется системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений 3-го порядка, рассматривается в качестве примера, иллюстрирующего практическую возможность реализации метода прямого жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации (ПЖС НСС).

Как известно [2], этот метод заключается в построении такой матрицы C в управлении $u = -C(x,t)\,x \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R_m}$, $m \le n$, из некоторого выпуклого множества $\mathbf{U}$ в $\mathbf{R_m}$, чтобы замкнутая система n-го порядка

$$\dot{x} = \left[A(x,t) - B(x,t)\,C(x,t)\right]x, \quad x(t_0) = x_0,$$

представленная в квазилинейной матричной форме [3], превратилась в равномерно асимптотически устойчивую (даже если исходная разомкнутая нелинейная система, как в рассматриваемом случае, была априори неустойчивой) и гарантированно удовлетворяла матричному уравнению Ляпунова

$$D(A - BC) + (A - BC)^{\mathrm{T}} D = -Q \tag{1}$$

при условии $D = const$ и *жестко фиксированной* мультипликативной параметризации произвольными невырожденными квазитреугольными блочными матрицами D_*, Q_* матриц $D = D_* D_*^{\mathrm{T}}$, $Q = Q_* Q_*^{\mathrm{T}}$ коэффициентов двух положительно определенных квадратичных форм $V = xDx^{\mathrm{T}}$, $W = xQ(x,t)x^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющих известному уравнению Ляпунова $\dot{V} = -W$ в виде (1).

В докладе анализируются построенное оптимальное управление по критерию А.А. Красовского [4] для математического маятника и условия его стабилизируемости.

1. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Дополнение IV к кн. Малкина А.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. – С. 475 – 514.
2. Онищенко С.М. Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза // Проблемы управления и информатики, 2000, № 3, с. 17 – 25.
3. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
4. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. - М.: Наука., 1973. - 560с.

Перетятько Анастасія Сергіївна, аспірантка 1 року навчання, факультет прикладної математики,
Дніпропетровский національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровськ, Україна,
e-mail: _nastya_@ua.fm
Косолап Анатолій Іванович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Дніпропетровский національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровськ, Україна,
e-mail: anivkos@ua.fm

ВИКОРИСТАННЯ НАПІВВИЗНАЧЕНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПОШУКУ МАКСИМАЛЬНОГО РОЗРІЗУ ГРАФА

Перетятько А.С., Косолап А.І.

Пошук максимального розрізу графа (в англомовній літературі ця проблема називається max-cut) є однією зі стандартних NP-складних задач у комбінаторній оптимізації та найпростішою з задач розфарбування графа.

Розглянемо неорієнтований граф G з вершинами $N = \{1, \ldots, n\}$ та множиною дуг E. Нехай $w_{ij} = w_{ji}$ – вага дуги $(i, j) \in E$. Будемо вважати, що $w_{ij} \geq 0$ для усіх $(i, j) \in E$. Задачею max-cut називається задача визначення підмножини S вершин N, для якої сума ваг дуг, що йдуть з S в $\overline{S}$, максимальна ($\overline{S} = N \setminus S$).

Нехай $x_j = 1$ для $j \in S$ та $x_j = -1$ для $j \in \overline{S}$. Тоді задача max-cut формулюється як задача цілочислової оптимізації:

$$\max\left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} (1 - x_i x_j) \,\middle|\, x_j \in \{-1, 1\}, \quad j = 1, \ldots, n \right\}. \tag{1}$$

Введемо позначення: $Y = xx^T$, W – матриця, (i, j)-й елемент якої рівний w_{ij}. Тоді задача (1) може бути записана у вигляді:

$$\max\left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} - \frac{1}{4} WY \,\middle|\, Y = xx^T,\ \mathrm{diag}(Y) = 1,\ \mathrm{rank}(Y) = 1,\ j = 1, \ldots, n \right\}. \tag{2}$$

Якщо ми в (2) не будемо враховувати обмеження на ранг матриці (напіввизначена релаксація), то отримаємо наступну задачу напіввизначеної оптимізації:

$$\max\left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} - \frac{1}{4} WY \,\middle|\, Y \succeq 0,\ \mathrm{diag}(Y) = 1, \quad j = 1, \ldots, n \right\},$$

яку можна переписати у вигляді:

$$\min\left\{ WY \mid Y \succeq 0,\ \mathrm{diag}(Y) = 1 \right\}. \tag{3}$$

Задача (3) розв'язувалась за допомогою узагальненого симплекс-методу [1], який шукає розв'язок задачі напіввизначеної оптимізації у вигляді:

$$Y = \sum a_j Y_j,$$

де Y_j – матриці рангу одиниця, число доданків в сумі більше розмірності Y та $a \geq 0$. Тоді задача напіввизначеної оптимізації (3) перетвориться до вигляду:

$$\min\left\{ W \cdot \sum a_j Y_j \mid diag(\sum a_j Y_j) = 1,\ a \geq 0 \right\}. \tag{4}$$

На кожній ітерації знаходиться нова матриця Y_k рангу одиниця, що зменшує значення цільової функції задачі (4). Якщо ранг матриці Y дорівнює одиниці, то одержуємо точний розв'язок задачі (1).

Узагальнений симплес-метод для розв'язку задачі max-cut був реалізований програмно. Проведені експерименти підтверджують ефективність обраного методу.

1. Косолап А.И. Обобщение симплекс-метода для решения задач полуопределенной оптимизации / А.И. Косолап // Математичне та комп'ютерне моделювання. – 2010. – С. 99–106.

Ряшко Лев Борисович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Башкирцева Ирина Адольфовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Уральский государственный университет, Екатеринбург, Россия
E-mail: lev.ryashko@usu.ru

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ: ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ

Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А.

В докладе рассматриваются сложные колебательные режимы (периодические и квазипериодические) для нелинейных динамических систем, моделируемых стохастическими диффернеиальными уравнениями Ито.

Теоретической основой анализа стохастической устойчивости и синтеза стабилизирующих регуляторов для возможных нелинейных колебаний в таких системах является разработанный общий вариант метода функций Ляпунова [1], ориентированнй на исследование систем с произвольными компактными инвариантными многообразиями. С помощью конструкции стохастического линейного расширения, понятия P-устойчивости и теории положительных операторов получен критерий, позволяющий свести вопрос об экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном исследуемого колебательного режима к оценке спектрального радиуса некоторого линейного оператора.

Данный теоретический результат служит основой для построения конструктивных методов анализа стохастической устойчивости и разработки алгоритмов синтеза стабилизирующих регуляторов.

В докладе обсуждаются некоторые итерационные процедуры решения вычислительных задач, возникающих в ходе анализа устойчивости.

В управляемой системе величина спектрального радиуса оператора стохастической устойчивости определяется структурой и параметрами используемого регулятора. В рамках разрабатываемого подхода классическая задача стабилизации может трактоваться как задача минимизации спектрального радиуса соответствующего оператора по параметрам регулятора. При этом минимальное значение спектрального радиуса позволяет ответить на вопрос о стабилизируемости системы регуляторами заданной структуры. Для возникающих здесь возможных задач минимизации обсуждаются конструктивные алгоритмы.

Предсталяемые в докладе общие теоретические результаты иллюстрируются на примерах стабилизации стохастически возмущенных предельнх циклов и торов.

1. Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А. Стохастические аттракторы нелинейных динамических систем. - Екатеринбург. Изд-во Уральского университета, 2010. - 251 с.

Работа частично поддержана грантами РФФИ №09-01-00026, №09-08-00048, 10-01-96022урал, ФЦП 02.740.11.0202.

Семенов Владимир Викторович, д.ф.м.н.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев, Україна,
e-mail: semenov.volodya@gmail.com;
Кочулова Елена Григорьевна
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев, Україна,

ПОИСК НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ФЕЙЕРОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Семенов В. В., Кочулова Е. Г.

Фейеровские операторы и порожденные ими процессы, введенные и изученные И.И. Ереминым и коллегами, имеют важное значение в оптимизационной алгоритмике. Однако в других областях вычислительной математики эти плодотворные конструкции, к сожалению, не достаточно известны. В докладе предложено и обосновано два метода аппроксимации неподвижных точек фейеровских операторов.

Пусть H -- гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$, C -- выпуклое замкнутое подмножество H. Для оператора $T: C \to C$ обозначим через $F(T)$ множество неподвижных точек, т. е. $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$.

Определение. Оператор $T: C \to C$ называем фейеровским, если $F(T) \neq \varnothing$ и $|Tx - y| \leq |x - y|$ $\forall$ $x \in C$ $\forall$ $y \in F(T)$. Предположим, что $T: C \to C$ -- замкнутый фейеровский оператор. Рассмотрим задачу поиска элементов $F(T)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 in (0,1)$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Алгоритм 1. *Пусть* $\alpha_n \in [0, a]$, $a \in [0,1)$. *Начиная с* $x_0 \in C_0 = C$ *генерируем последовательность элементов* $x_n \in C$ *при помощи схемы*

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\left(\lambda_0 x_n + \lambda_1 T_1 x_n\right), \\ C_{n+1} = \left\{z in C_n : |y_n - z| \leq |x_n - z|\right\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0. \end{cases}$$

Алгоритм 2. *Пусть* $\alpha_n \in (0,1)$ *и* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. *Начиная с* $x_0 \in C$ *генерируем последовательность элементов* $x_n \in C$ *при помощи схемы*

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)\left(\lambda_0 x_n + \lambda_1 T x_n\right), \\ C_0 = \left\{z \in C : |y_0 - z|^2 \leq |x_0 - z|^2 + \alpha_0 |x_0|^2\right\}, \\ C_n = \left\{z \in C_{n-1} \bigcap Q_{n-1} : |y_n - z|^2 \leq |x_n - z|^2 + \alpha_n \left(|x_0|^2 + 2(x_n - x_0, z)\right)\right\}, \\ Q_0 = C, \\ Q_n = \left\{z \in C_{n-1} \bigcap Q_{n-1} : (x_n - z, x_n - x_0) \leq 0\right\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0. \end{cases}$$

Алгоритмы 1, 2 -- модификации методов поиска неподвижных точек нерастягивающих операторов. Доказано, что порожденные алгоритмами последовательности (x_n) сильно сходятся к точке $P_{F(T)} x_0$, где $P_{F(T)}$ -- оператор метрического проектирования на $F(T)$.

О. В. Соловьева.
Одесский национальный политехнический университет, г.Одесса,
e-mail: sita@ukr.net

УСРЕДНЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАНДАРТНОГО ВИДА С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Соловьева О.В.

Рассматривается задача оптимального управления вида.

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \tag{1}$$

$$R(x(0,\varepsilon), x(T,\varepsilon)) = 0. \tag{2}$$

$\mathrm{R, X} -$ n $-$ мерные вектор - функции, $\varepsilon > 0 -$ малый параметр, $\mathrm{T = L\varepsilon^{-1}, L > 0} -$ постоянная, $\mathrm{x \in R^n}$.

С помощью необходимых условий оптимальности исходная, сводится к краевой задаче, для решения которой применяется метод усреднения. Усредненная краевая задача соответствующая (1), (2) имеет вид.

$$\dot{\xi} = \varepsilon \overline{X}(\xi),$$

$$R(\xi(0), \xi(L)) = 0,$$

где $\overline{X}(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} X(t, x)dt.$

Применение метода усреднения краевых задач иллюстрируется на примере системы с разрывной правой частью.

$$\ddot{x} + x = \varepsilon\left[-2\lambda\dot{x} + \mu x^3 + u\right]$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

u-скалярное управление.

Требуется найти управление $u(t) \in U = \{|u| \le u_0\}$, минимизирующее функционал

$J(u) = \dfrac{x^2(T) + \dot{x}^2(T)}{2}$ используя замену $x = a\sin(t + \varphi), \dot{x} = a\cos(t + \varphi)$.

Получим задачу оптимального управления для системы стандартного вида. Решение усредненной системы можно провести непосредственным интегрированием. Тогда получим оптимальную траекторию и оптимальное управление.

При помощи пакета прикладных программ можно получить численное решение системы дифференциальных уравнений. В качестве начального условия можно взять решение усредненной системы. Полученное решение сравнивают с решением соответствующей усредненной системы. Сравнительная оценка показала, что решения отличаются на незначительно малое число.

1. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. – Одесса : Лыбидь , 1992. – С 87-94.
2. Плотников В.А. Зверкова Т.С. Метод усреднения для систем стандартного вида с разрывными правыми частями // Диф. уравн. – 1982. − №6. – С. 1091-1093.

Тарасенко Оксана Володимирівна
Ніжинський державний університет ім. М. Гоголя, м. Ніжин, Україна
e-mail: oxana.tarasenko@gmail.com

ПРО АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Тарасенко О.В.

Розглядається задача оптимального керування процесом, який описується лінійною системою диференціальних рівнянь з малим параметром при похідних.

Розв'язується питання про знаходження оптимальної траєкторії та відповідного оптимального керування, під дією якого ситема переходить з одного стану в інший за фіксований проміжок часу, мінімізуючи квадратичний функціонал.

Подібна задача, яка описується системою диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, розглядалась в [1], [2], де передбачалось, що корені відповідного характеристичного рівняння уявні.

Нами розглядається більш загальний випадок. Зокрема, детально досліджується випадок кратних коренів характеристичного рівняння.

Застосувавши принцип максимуму Понтрягіна та методи асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь [3], [4], побудовано розв'язок даної задачі та проведено його асимптотичний аналіз.

1. *Шкиль Н.И.* Об асимптотическом решении задачи оптимального управления для систем с медленноменяющимися коэффициентами / Н. И. Шкиль, В. Н. Лейфура // Докл. АН УССР. Сер. А. --- 1976. --- № 7. --- С. 604 -- 608.

2. *Шкиль Н.И.* К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления системами с медленноменяющимися коэффициентами в случае кратных корней / Н. И. Шкиль, В. Н. Лейфура // Межвед. респ. сб.: Вычисл. и прикл. математика. --- К., 1977. --- Вып. 31. --- С. 81 -- 92.

3. *Шкиль Н.И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. --- К.: Вища шк., 1991. --- 207 с.

4. *Самойленко А.М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. --- К.: Вища школа, 2000. --- 294 с.

Тимофієва Надія Костянтинівна, доктор технічних наук, с.н.с., провідний наук. співроб.
Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України,
e-mail: TymNad@gmail.com;

ЗАЛЕЖНІСТЬ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ВІД УПОРЯДКУВАННЯ ПЕРЕСТАНОВОК ТА ТРАНСПОЗИЦІЇ ЇХНІХ ЕЛЕМЕНТІВ

Тимофієва Н.К.

Вхідні дані в задачах комбінаторної оптимізації, які задано матрицями, змоделюємо функціями натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1),\dots,\varphi(m))$, одна з яких - комбінаторна $\beta(f(j),\omega^k)|_1^m = (\beta_1(f(1),\omega^k),\dots,\beta_m(f(m),\omega^k))$, де $m = \frac{n(n-1)}{2}$, n - кількість елементів базової множини $A_n = a_1,...,a_n$, якою задається певна задача, $\omega^k = (1,...,n) \in \Omega$ - перестановка, Ω - їхня множина, $k \in 1,\dots,n!$. Запишемо цільову функцію $F(\omega^k) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(j) : \beta_j(f(j),\omega^k)$. Уведемо системи комбінаторних функцій H і H', де $\beta(f(j),\omega^k)|_1^m \in H$ - комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $\omega^k \in \Omega$, утворена з елементів $a_s \in A_n$; $\beta'(f(j),\omega'^t|_1^m \in H'$ - комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $\omega'^t \in \Omega'$, утворена з елементів базової множини $A_m = a_1,...,a_m$. Якщо $\beta(f(j),\omega^1)|_1^m = \beta'(f(j),\omega^1)|_1^m$, де ω^1, ω'^1 - перші перестановки в Ω, Ω' і $\beta(f(j),\omega^1)|_1^m \in H$, $\beta'(f(j),\omega'^1)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$.

Теорема 1. Якщо $\beta'(f(j),\omega'^1)|_1^m = (1,...,m)$, $\varphi(j)|_1^m = (1,\dots,m)$, а перестановка ω'^i утворена з ω'^t транспозицією $\alpha(\omega_s'^t,\omega_r'^t)$, яка переводить $\omega_s'^t,\omega_r'^t$ в інверсію, то значення цільової функції $F(\omega'^i)$ зменшується. Якщо $\alpha(\omega_s'^t,\omega_r'^t)$ переводить $\omega_s'^t,\omega_r'^t$ у прямий порядок, то значення $F(\omega'^i)$ збільшується.

Теорема 2. Якщо $\beta_j'(f(j),\omega'^1) \in R$, $\varphi(j) \in R$, а цільова функція для $\omega'^t \in \Omega'$ набуває найбільшого значення, то найменше її значення для перестановки $\omega'^i \in \Omega'$ дорівнює $F_{\min}(\omega'^i) = F_{\max}(\omega'^t) - \sum_{l=1}^{\zeta} \varepsilon_l(\omega'^t)\varepsilon_l'$. Якщо $\beta_j'(f(j),\omega'^1) \in R$, $\varphi(j)|_1^m \in R$, а цільова функція для $\omega'^i \in \Omega'$ набуває найменшого значення, то найбільше її значення для перестановки $\omega'^t \in \Omega'$ дорівнює $F_{\max}(\omega'^t) = F_{\min}(\omega'^i) + \sum_{l=1}^{\zeta} \varepsilon_l(\omega'^i)\varepsilon_l'$; $\zeta = \lfloor m/2 \rfloor$, R - множина дійсних чисел, $\varepsilon_l(\omega'^t)$, ε_l' - дефіцит функцій $\beta'(f(j),\omega'^1)|_1^m$ і $\varphi(j)|_1^m$. Для системи H сформулюємо таку теорему.

Теорема 3. В задачах комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції яких є перестановка, комбінаторною функцією може бути будь-яка із двох скінченних послідовностей (функцій натурального аргументу), якими задаються вхідні дані.

Теорема 4. Якщо функція натурального аргументу в задачі комівояжера або розміщення змінюється як монотонна (неспадна або незростаюча), то значення цільової функції для певного впорядкування перестановок змінюється як кусково-монотонна неспадна (або незростаюча).

Успенский Александр Александрович, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Учреждение Российской академии наук Институт математики и механики Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия,
e-mail: uspen@imm.uran.ru

СПЕКТР ПРОИЗВОДНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Успенский А.А.

Рассматривается краевая задача Дирихле для дифференциального уравнения типа Гамильтона-Якоби

$$\min_{\nu:\|\nu\|\le 1}(\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial u}{\partial y})+1=0\,,\ \ u|_{\Gamma}=0$$

Здесь $\|\nu\|=\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}$ – евклидова норма вектора $\nu=(\nu_1,\nu_2)$, Γ – граница замкнутого множества $M\subset R^2$. Решение $u=u(x,y)$ задачи понимается в обобщенном (минимаксном) смысле. Минимаксное решение краевой задачи совпадает с функцией оптимального результата соответствующей задачи быстродействия с простыми движениями. Кроме того, это решение противоположно по знаку эйконалу – решению основного уравнения геометрической оптики с постоянным коэффициентом преломления среды.

Исходная постановка задачи Дирихле является достаточно общей в части краевого условия, допускает невыпуклость краевого множества и негладкость его границы. Излагаются элементы численно-аналитического подхода к построению совокупности волновых фронтов, основанного на выделении множества симметрии задачи – множества, на котором минимаксное решение терпит «градиентную катастрофу». Техника изучения особенностей опирается на свойства локальных диффеоморфизмов. Основной результат исследования состоит в получении необходимых условий существования псевдовершин – особых точек краевого множества, которые определяют структуру множества негладкости минимаксного решения. Необходимые условия выписаны в терминах пределов производных локальных диффеоморфизмов, определяемых нелинейным уравнением, связывающим параметры задачи Дирихле.

Вводится обобщение классического понятия производной, которое в частных случаях совпадает с симметрической производной Шварца.

Результаты исследования иллюстрируются на примерах решений динамических задач управления и геометрической оптики.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00427-а, гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ № НШ-64508.2010.1 и регионального гранта РФФИ/ПСО № 10-01-96006-р_урал_а.

1. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. – 336 с.
2. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики, 2008. Т.14, №2. С.182-191.
3. Успенский А.А., Лебедев П.Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Труды Института математики и механики, 2010. Т.16, №1. С.171-186.

Харламов А О., студент 4 курсу факультету інформаційних систем і технологій
КНЕУ ім. Вадима Гетьмана
e-mail: Harlamov_artemiy@ukr.net

МОДЕЛЬ СТАБІЛЬНОГО ФУНКЦІОНУВАННЯ ВАЛЮТНИХ ОПЕРАЦІЙ БАНКУ

Харламов А.О.

На ймовірнісному просторі (Ω, F, P) розглянемо лінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t), \tag{1}$$

де $\xi(t)$ - випадковий напівмарковський процес, що набуває n станів $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ з інтенсивностями q_{ks}, а випадкова величина $\alpha(\xi(t))$ набуває значення $\alpha(\xi(t)) = \alpha_k$ при $\xi(t) = \theta_k$ при $(k = 1, ..., n)$. Припускаємо, що в моменти стрибків t_j розв'язки (1) зазнають випадкових перетворень $x(t_j + 0) = p_l x(t_j - 0), \quad p_l \neq 0 \ (l = 1, ..., N)$ з ймовірностями $p_l \ (l = 1, ..., N)$.

Отримано рівняння для моментів другого порядку розв'язків лінійного рівняння (1):

$$W_k(t) = M_2 \left[\sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^{n} q_{ks}(t) e^{2a_s t} ds(0) + \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau) e^{2a_s(t-\tau)} W_s(\tau) d\tau \right]; \ (k = 1, ..., n), \ M_2 = \sum_{l=1}^{N} \rho_l^2 p_1 = \left\langle \rho^2 \right\rangle.$$

(2)

Тут M_2 - математичне сподівання квадрата коефіцієнта ρ при випадкових перетвореннях; $d_k(0) \ (k = 1, ..., n)$ - моменти другого порядку в момент часу t=0; $N_k(t) = e^{\alpha_k t}$ - розв'язок рівняння (1); $W_k(t)$ - моменти другого порядку. Розв'язуватимемо систему моментних рівнянь (2), використовуючи перетворення Лапласа. Дістанемо систему рівнянь для зображень $f_k(p) \equiv \int_0^\infty W_k(t) e^{-pt} dt \ (k = 1, ..., n)$

$$f_k(p) = M_2 \left(b_k(p) + \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^{n} a_{ks} f_s(p) \right) \quad (k = 1, \dots, n), \ b_k(p) \equiv \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^{n} d_s(0) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p - 2a_s)}}{T_{ks}(p - 2a_s)}$$

$$a_{ks}(p) \equiv \frac{1 - e^{-T_{ks}(p - 2a_s)}}{T_{ks}(p - 2a_s)} \quad (k, \ s = 1, \dots, n; \ k \neq s). \tag{3}$$

Особливі точки розв'язку знаходяться з рівняння

$$\det \left\| 1 - M_2 a_{ks}(p, T_{ks}) \right\|_{k,s}^{n} = 0, \quad M_2 a_{kk}(p, T_{ks}) \equiv -1. \tag{4}$$

Нулі рівняння (4) є характеристичними показниками розв'язків системи інтегральних рівнянь (4). Якщо всі корені рівняння (4) мають від'ємні дійсні частини, то розв'язки рівняння (2) асимптотично стійкі. Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (4) чисельними методами, визначимо характер залежності між параметрами p і T_{ks}.

При *p=0* побудовано межі області нестійкості розв'язків рівняння (1) на площині параметрів a_1, a_2, a_3 при різних значення коефіцієнта M_2.

Чикрий Грета Цолаковна, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: chik@insyg.kiev.ua

ЭФФЕКТ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Чикрий Г.Ц.

Условие Понтрягина [1] является основополагающим в теории квазилинейных дифференциальных игр. Оно отражает преимущество преследователя над убегающим в ресурсах управления в терминах параметров игры. Однако оно не выполняется для целых классов задач, в частности для задач о мягкой встрече [2]. Модификация этого условия, предложенная в [3], основана на построении преследователем своего управления по управлению убегающего в прошлом. Выяснение связи модифицированного условия с фактическим переходом к игре с переменным, зависящим от времени запаздыванием, а затем к эквивалентной ей игре с полной информацией [4] способствовал развитию иного подхода к исследованию сложных задач [5,6]. С его помощью были получены достаточные условия для завершения за конечное время мягкой встречи при любых начальных условиях различных однотипных линейных систем второго порядка [5,6]. При этом управление преследователя строилось с помощью так называемой функции растяжения времени, которая предполагалась кусочно-гладкой функцией времени. Однако модифицированное условие Понтрягина и основанная на нем модификация первого прямого метода Понтрягина применимы и в случае, если подходящая функция растяжения времени оказывается разрывной на счетной, сходящейся к бесконечности последовательности точек, оставаясь при этом гладкой в точках своей непрерывности. Это позволило получить аналогичные результаты и в случае разнотипных объектов, а именно, когда преследующий объект имеет динамику согласно второму закону Ньютона (с учетом трения), а уклоняющийся от встречи объект совершает затухающие колебания. Рассматриваемый в работе модельный пример может служить примитивной иллюстрацией поведения беспилотного (или пилотируемого) воздушного судна, с борта которого должен быть спущен груз на палубу корабля, оказавшегося в плену бушующих океанских волн [7].

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – **2**. – 576 с.
2. Никольский М.С. О применении первого прямого метода Понтрягина // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетики. – 1972. – №10. – С.51-56.
3. Зонневенд Д. Об одном типе превосходства игрока // Докл. АН СССР. – 1973. – **208**. – № 3.– С. 520–523.
4. Чикрий Г.Ц. О задаче преследования с переменным запаздыванием информации о состоянии // Докл. АН УССР. – Сер. физ.-матем. и техн. науки – 1979 – №10 – С.855-858.
5. Чикрий Г.Ц. Использование эффекта запаздывания информации в дифференциальных играх преследования // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 90–105.
6. Чикрий Г.Ц. Об одной задаче сближения для затухающих колебаний // Проблемы управления и информатики. – 2009. – №5 – С.5–12.
7. Albus J., Meystel A. The eagle snatch, «Intelligent Systems: a semiotic perspective » // Proc. of the Intern Multidisciplinary Conf., NIST, 1996. – Gaithersburg (USA), 1996. – P. 1-7.

Шатырко Александра Андреевна, студентка 4 курса, факультета кибернетики,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: alexshatyrko@gmail.com

ОПТИМИЗАЦИЯ ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ С КВАДРАТИЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Шатырко А.А.

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с выделенной линейной частью

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f\left(x(t)\right). \tag{1}$$

Нелинейная функция $f(x)$ удовлетворяет условию $\left|f(x)\right| \le M|x|^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$.

Предполагается, что матрица A асимптотически устойчивая, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0$, $i = \overline{1,n}$. Оценка области устойчивости нулевого решения системы (1) проводится с использованием функции Ляпунова квадратичного вида $V(x) = x^T Hx$.

Обозначим $U_r = \left\{x \in R^n : x^T Hx < r, r > 0\right\}$. Тогда «гарантированной» областью асимптотической устойчивости будет

$$U_{r_0} = \max_{r>0}\left\{U_r : U_r \subset U_0\right\}.\ \ U_0 = \left\{x \in R^n : |x| < \left[\frac{\lambda_{\min}(C)}{2|H|M}\right]^{1/\alpha}\right\}.$$

Частным случаем системы (1) является система с квадратичной правой частью

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X^T(t)Bx(t).$$

Для нее областью гарантированной устойчивости нулевого положения равновесия будет

$$U_{r_0} = \max_{r>0}\left\{U_r : U_r \subset U_0\right\},\ U_0 = \left\{x \in R^n : |x| < \frac{\lambda_{\min}(C)}{2|H||B|}\right\},$$

Рассматривается система на плоскости. Она имеет вид

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_{11}^1 x_1^2(t) + 2b_{12}^1 x_1(t)x_2(t) + b_{22}^1 x_2^2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_{11}^2 x_1^2(t) + 2b_{12}^2 x_1(t)x_2(t) + b_{22}^2 x_2^2(t).$$

Обозначим

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ b_1^1 = \begin{pmatrix} b_{11}^1 \\ b_{12}^1 \end{pmatrix},\ b_2^1 = \begin{pmatrix} b_{12}^1 \\ b_{22}^1 \end{pmatrix},\ b_1^2 = \begin{pmatrix} b_{11}^2 \\ b_{12}^2 \end{pmatrix},\ b_2^2 = \begin{pmatrix} b_{12}^2 \\ b_{22}^2 \end{pmatrix},\ c = c_{11}c_{22} \in R^1,$$

$$l = c_{22}b_1^1 + c_{11}b_2^2 - c_{12}\left(b_1^2 + b_2^1\right) \in R^2,\ L = 4\left(b_1^1\right)^T b_2^2 - \left(b_1^2 + b_2^1\right)^T\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

$$U_1 = \left\{x \in R^2 : c_{11} - 2\left[h_{11}b_1^1 + h_{12}b_1^2\right] > 0\right\},\ U_2 = \left\{x \in R^2 : c - 2l^T x + x^T Lx > 0\right\}$$

Тогда областью гарантированной устойчивости будет

$$U_{r_0} = \max_{r>0}\left\{U_r : U_r \subset U_1 \cap U_2\right\}. \tag{2}$$

В докладе получены оценки области U_{r_0}, представляющей максимальный эллипс, вписанный в пересечение полуплоскости и области, ограниченной кривой второго порядка.

Yatsenko Vitaliy, PhD,
Space Research Institute of NASU-NSAU, Kiyv, Ukraine,
E-mail: vyatsenko@gmail.com

ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Яценко В.А.

Доклад посвящен обзору результатов исследований известного ученого член-корреспондента НАН Украины Самойленко Юрия Ивановича. В докладе планируется обсудить современные проблемы, теоретические аспекты и методы физической кибергнетики [1-5]. Физическая кибергнетика — область науки на стыке кибернетики и физики, изучающая физические системы кибернетическими методами. Под кибернетическими методами понимаются методы решения задач управления, оценивания переменных и параметров, адаптации, фильтрации, оптимизации, передачи сигналов, распознавания образов и др., развитые в рамках кибернетики. Целью исследования в физической кибергнетике является анализ возможности преобразования свойств системы с помощью подачи внешних воздействий того или иного класса и определение вида воздействий, требуемых для данного преобразования. Среди широкого круга проблем булут рассмотрены следующие: автоматическая стабилизация плазмы в термоядерных установках, подавление неустойчивостей в потоках заряженных частиц и релятивистских электронно-ионных кольцах, магнитная левитация жидких электропроводящих материалов, управление квантовыми переходами в энергетических спектрах атомов и молекул, построение квантовых и молекулярных квантовых дискретных автоматов. Существенное внимание уделено измерительно-вычислительным системам на основе явления сверхпроводимости, электрмагнитному управлению и принципам построения пространственно распределенных регулирующих систем.

1. Самойленко Ю. И., Губарев В. Ф., Кривонос Ю. Г. Управление быстропротекающими процессами в термоядерных установках - Киев: Наукова думка, 1988. - 384 с.
2. Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантовомеханическими про-цессами - М.: Наука, 1984.- 256 с.
3. Ю.И. Самойленко Проблемы и методы физической кибернетики, Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006.-644 с.
4. Фрадков А.Л. О применении кибернетических методов в физике. Успехи физ. наук, 2005, Т.175, N 2, с.113-138.
5. Samoilenko Yu. I ., Yatsenko V. A. Adaptive estimate the signal acting on macroscopic body in a controlled potential well // Report of National Academy of Science of Ukraine, No 3.-1991.-P. 81-86.

DYNAMICAL SYSTEMS MODELLING

AND STABILITY INVESTIGATION

MODELLING

&

STABILITY

Section 5

PROGRAMMING AND LOGIC-MATHEMATICAL METHODS OF MODELLING

Wei-Chun Hsiao, second-year master student, department of electrical engineering
E-mail : weijun6261@hotmail.com
Chien-Ching Chiu, Prof.
E-mail : chiu@ee.tku.edu.tw
Electrical Engineering Department, Tamkang University Tamsui, Taiwan, R.O.C.

IMAGE RECONSTRUCTION FOR A PARTIALLY IMMERSED PERFECTLY CONDUCTING CYLINDER USING ASYNCHRONOUS PARTICLE SWARM OPTIMIZATION

The paper presents a computational approach to the imaging of a partial immersed perfectly conducting cylinder by asynchronous particle swarm optimization. Based on the boundary condition and the measured scattered field, a set of nonlinear integral equations is derived and the imaging problem is reformulated into an optimization problem.

Let us consider a perfectly conducting cylinder which is partial immersed in a lossy homogeneous half-space. Media in regions 1 and 2 are characterized by permittivities and conductivities and $(\varepsilon_2, \sigma_2)$ respectively. A perfectly conducting cylinder is illuminated by a transverse magnetic (TM) plane wave. In handling the direct scattering problem, we can use moment method for solving linear integral equation to obtain scattered field. In order to solve the optimization problem, we introduce particle swarm optimization.

Particle swarm global optimization is a class of derivative-free, population-based and self-adaptive search optimization technique [1]. The social behavior in PSO is a population of particles moving towards the most promising region of the search space. Clerc proposed the constriction factor to adjust the velocity of the particle for obtaining the better convergence. PSO starts with an initial population of potential solutions that is randomly generated. After the initialization step, each particle of population has assigned a randomized velocity and position. Thus, each particle has a position and velocity vector, and moves through the problem space. In each generation, the particle changes its velocity by its best experience, called x_{pbest}, and that of the best particle in the swarm, called x_{gbest}. Assume there are N_p particles in the swarm that is in a search space in D dimensions, the position and velocity could be determine according to the following equations:

$$v_{id}^{k} = \chi \cdot \left(v_{id}^{k-1} + c_1 \cdot \phi_1 \cdot \left(x_{pbest,\,id} - x_{id}^{k-1} \right) + c_2 \cdot \phi_2 \cdot \left(x_{gbest,\,id} - x_{id}^{k-1} \right) \right) \tag{1}$$

$$x_{id}^{k} = x_{id}^{k-1} + v_{id}^{k} \tag{2}$$

We illustrate the performance of the proposed inversion algorithm and its sensitivity to random noise in the scattered field. Let us consider a perfectly conducting cylinder buried in a lossless half-space ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$). The permittivity in each region is characterized by $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ and $\varepsilon_2 = 2.56\varepsilon_0$ respectively. The frequency of the incident wave is chosen to be 1GHz with incident angles ϕ_1 equal to -45°、 0° and 45°, respectively. The wavelength λ_0 is 0.3m. For each incident wave, 8 measurements are made at the points equally separated on a semi-circle with the radius of 3m in region 1. We set the generation to be 300, c_1 and c_2 to be 1.3 and 2.8 respectively. The number of unknowns is set to be 7. Number of particles set to be 30. The shape function is chosen to be $F(\theta) = (0.1 + 0.02\sin 3\theta)$ m. The reconstructed shape error is 0.62%. It is clear that the reconstructed result is good.

Numerical results demonstrate that, even when the initial guess is far away from the exact one, good reconstruction can be obtained.

[1] C. H. Huang, C. H. Chen, C. C. Chiu and C. L. Li, "Reconstruction of the Buried Homogenous Dielectric Cylinder by FDTD and Asynchronous Particle Swarm Optimization." *Applied Computational Electromagnetics Society Journal.* Vol. 25, No. 8, pp. 672-681, Aug. 2010.

Ie. Ivanov, *Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,*
M. Nikitchenko, *Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,*
e-mail: ivanov.eugen@gmail.com, nikitchenko@unicyb.kiev.ua,
L. Feraud, *Paul Sabatier University, Toulouse, France*
e-mail: louis.feraud@irit.fr

POSSIBILISTIC MODELING OF A SPECIAL CLASS OF HYBRID SYSTEMS

Ivanov Ie., Nikitchenko M., Feraud L.

Hybrid systems [1] are dynamical systems with interacting continuous-time dynamics usually modeled by differential equations and discrete-event dynamics modeled by automata. They have a wide range of applications including automation, process control, communication, etc. In many of them hybrid system represents a continuous plant together with a discrete controller that switches between modes of the plant (machine-environment system).

Many studies on hybrid system problems (e.g. verification) consider completely specified deterministic systems. But in some cases their use in modeling may be inadequate (e.g. switching conditions may be partially unknown). In such cases various nondeterministic models may be applied [1,2]: hybrid systems with nondeterministic switching, stochastic systems, etc. Most of these approaches can be classified according to chosen “places” of nondeterminism (continuous dynamics, occurrence of discrete events, etc.), and may have different application domains.

In this work we propose a class of hybrid system models with nondeterministic switching, based on possibility theory [3,4,5]. We use the following assumptions:

- Modeled system evolves in continuous time and its dynamics can be separated into discrete modes (phases). Continuous dynamics in discrete modes can be accurately modeled by ordinary differential equations.
- There is a dependence between events of switching between modes and system's state and current time. However switching conditions are not known completely. Existing knowledge may be presented in linguistic form (e.g. "the value of a variable is *high*").
- Modeler's subjective interpretation of vague notions like *high value* is available in the form of fuzzy sets [3]. It determines possibility distribution [3,4] on system's executions.

We argue that such models may be well-suited for modeling human-machine systems (more specifically, driver-vehicle-environment system [6]). As noted in [7], possibility theory describes many aspects of human behavior better than probability theory. Therefore in such domain the proposed model may be more adequate than known stochastic models.

In the work we present a motivating example from driver-vehicle modeling, give a definition and trace semantics of our possibilistic hybrid systems, consider safety verification problem for them and propose an iterative approximation method to tackle this problem.

1. *Liberzon D.* Switching in systems and control. – Boston: Birkhauser, 2003.
2. *Kats I.Y., Martynyuk A.A.* Stability and stabilization of nonlinear systems with random structure. – London: Taylor and Francis. – 2002.
3. *Zadeh L.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility //Fuzzy Sets and Systems.–1978.–№ 1.–P. 3–28.
4. *Dubois D., Prade H.* Possibility theory. – New York: Plenum Press, 1988.
5. *Belov Yu.A., Bychkov O.S., Merkuryev M.G., Chulichkov A.I.* About an approach to modeling fuzzy dynamics // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2006. – № 10. – P. 14–19.
6. *Cacciabue C. (ed.)* Modelling driver behaviour in automotive environments. – London: Springer, 2007.
7. *Kikuchi S., Chakroborty P.* Place of possibility theory in transportation analysis // Transportation Research, Part B. – 2006. – Vol. 40. – P. 595–615.

Антонова Ірина Андріївна, аспірант, факультет кібернетики,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: irine@unicyb.kiev.ua

ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ В АЛГЕБРАХ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ

Антонова І.А.

Рекурсивні та індуктивні методи грають важливу роль в специфікації та верифікації програмних систем. Формалізація таких методів базується на різноманітних операторах нерухомої точки в числених алгебрах. Існують різні оператори побудови нерухомих точок (ОПНТ). Найбільш відомим є оператор побудови найменшої нерухомої точки (least fixed point). Також використовуються оператор наповненої нерухомої точки (inflationary fixed point), оператор найбільшої нерухомої точки (greatest fixed point), та деякі інші [1].

Незважаючи на численні дослідження ОПНТ, їх застосування в логіці є дещо незручним, що викликано специфічною семантикою формул. Крім того зазвичай розглядаються класи *n*-арних тотальних предикатів, тоді як для специфікації програм необхідні більш потужні класи часткових предикатів над складними структурами даних. Таким чином, проблема побудови нових логік, що базуються на більш загальних класах предикатів, стає першочерговим завданням.

Для розв'язання цієї проблеми використовуються композиційно-номінативний підхід, що будує ієрархію логік різних рівнів абстракції та загальності на методологічному фундаменті, що є характерним для програмування [2]. Нові логіки мають бути засновані на часткових предикатах над довільними (можливо ієрархічними) класами номінативних даних. Часткові предикати над номінативними даними з іменами із множини V називаються *квазіарними*. Нові предикати, що побудовані з базових за допомогою спеціальних операторів називаються *композиціями*. Згідно з композиційно-номінативним підходом запропоновані логіки – *композиційно-номінативні логіки* (КНЛ) – побудовані у семантико-синтаксичному стилі. Дослідження семантичних аспектів КНЛ зводиться до вивчення властивостей алгебр предикатів, які є основним поняттям КНЛ [2].

Лема. Клас часткових предикатів і клас еквітонних предикатів є $\Delta\Delta/\nabla$-областю. Клас повно тотальних еквітонних предикатів є $\Delta\Delta/\nabla\nabla$-областю.

Теорема. Нехай $(D,\leq)$ є δ-областю, де $\delta\in\{\Delta, \nabla, \Delta\Delta, \nabla\nabla, \Delta/\nabla, \Delta\Delta/\nabla, \Delta/\nabla\nabla, \Delta\Delta/\nabla\nabla\}$, $\varphi{:}D\to D$ є монотонним оператором на D, тоді множина всіх нерухомих точок φ, якщо вона не порожня, є δ-областю.

Для знаходження T-нерухомої точки з найменшою областю істинності T-ω-неперервного оператора на ω-області доведена теорема з конструктивним підходом до її побудови [4].

1. Davey B.A., Priestley H.A. Introduction to Lattices and Order. Second edition. // Cambridge University Press.– 2002.– 248p.
2. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки еквітонних предикатів // Вісн. Київс. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук.– 2000.– Вип 2.– С. 300–314.
3. Tarski A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its application.– Pacific J. of Math 5.–1955. – pp. 285-309.
4. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С., Антонова І.А. Композиційно-номінативні логіки з оператором нерухомої точки. // Праці міжнародної конференції "Problems of decision making under uncertainties".– К., 2008.

Загваздін Олександр Сергійович, аспірант,
Інститут кібернетики ім.В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна
e-mail: alex.zagvazdin@gmail.com
Крак Юрій Васильович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: krak@unicyb.kiev.ua

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЗИЦІЇ ЗМІНИ ДИКТОРА У МОВНОМУ СИГНАЛІ

Загваздін О.С., Крак Ю.В.

Визначення позиції зміни диктора у мовному голосовому сигналі є важливою задачею для великої кількості задач, що пов’язані з обробкою і розпізнаванням мовної голосової інформації. Так, в системах автоматизованого розподіленого стенографування можна підвищити інтелектуальність сегментації вхідного сигналу, враховуючи інформацію про зміну диктора [1]. В системах автоматичного дикторонезалежного розпізнавання мовних сигналів, інформація про зміну диктора дозволяє адаптувати систему до нового диктора для підвищення точності розпізнавання.

Для вирішення задачі вважатимемо, що зміна диктора в голосовому сигналі відбувається в околі паузи, тобто між тим, як закінчує говорити один диктор і починає говорити інший, в сигналі присутня ділянка без наявної голосової інформації. Для визначення пауз використовується адаптивного визначення пауз [2].

Для перевірки, чи відбувається в околі даної паузи зміна диктора, порівнюємо між собою множини характеристичних векторів сигналу до і після паузи. В якості характеристичних векторів обрано вектори, що складаються з 13 мел-кепстр коефіцієнтів, обрахованих по вікнам Хеннінга тривалістю 20 мс., що перетинаються між собою на 50%. Такий вибір характеристичних векторів продемонстрував свою ефективність в задачах розпізнавання і верифікації дикторів [3].

Множини векторів порівнюємо між собою за допомогою наступної міри відмінності

$$d(X_1, X_2) = \mu_{1/2}(d(x_{1i}, x_{2j})) \qquad \forall x_{1i} \in X_1, x_{2j} \in X_2 \qquad ,$$

що визначається як медіана відстаней між кожним вектором першої множини, що порівнюється з кожними вектором з другої множини. В якості відстані використовується евклідова відстань. Рішення про наявність зміни диктора в околі даної паузи приймається, якщо міра відмінності між множинами перевищує заздалегідь визначений поріг, що обчислюється експериментально.

Метод показав достатню ефективність на задачах сегментації сигналу в системі автоматизованого стенографування, зокрема, при розшифровці сценограм засідань спеціалізованих вчених рад з захисту дисертацій. Подальша робота буде направлена на покращення точності визначення пауз і на автоматичне визначення порогу міри відмінності для широкого класу мовленнєвих сигналів.

1. Кривонос Ю.Г., Крак Ю.В., Бармак А.В., Загваздин А.С. Информационная система распределенного компьютерного документирования речевых фонограмм заседаний // Управляющие системы и машины. – №3, 2008. – С. 650-656.
2. Загваздін О.С. Адаптивний алгоритм визначення пауз у голосовому мовному сигналі для задач автоматизованого стенографування. // Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів: праці десятої всеукраїнської міжнародної конференції УкрОбраз. Київ, 2010. – С. 89-91.
3. D.A. Reynolds, R.C. Rose. Robust text-independent speaker identification using Gaussian mixture speaker models. // IEEE transactions on speech and audio processing. – Vol. 3. – №1, 1995. – P. 72-83.

Зубенко Віталій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: vvz@unicyb.kiev.ua
Сидоренко Юлія Всеволодівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
НТУУ “КПІ”, Київ, Україна

ПРО АЛГЕБРУ РЕКУРЕНТНИХ ФУНКЦІЙ

Зубенко В.В., Сидоренко Ю.В.

Рекурентні функції реалізуються ітеративними (циклічними) програмами і тому представляють значний як теоретичний так і практичний інтерес. Для синтезу таких функцій потрібно мати певну їх алгебру. Нехай T – довільний універсум елементів, $f, g, \ldots$ – певні часткові операції на T. Система послідовностей

$$\begin{cases} a_0, a_1, \ldots \in T \\ b_0, b_1, \ldots \in T \\ \ldots \end{cases}$$

називається *рекурентною* відносно конструкторів $f, g, \ldots$, якщо всі її члени, за винятком, можливо, перших, пов’язані співвідношеннями

$(*)\, a_i = f(a_{i-1}, b_{i-1}, \ldots)$, $b_i = g(a_{i-1}, b_{i-1}, \ldots)$, ..., $i = 1, 2, \ldots$.

Кількість послідовностей у системі називається її виміром. З кожною рекурентною системою послідовностей (*) виміру n пов’язана певна функція F типу $T^n \times N \to T^n$, яка вектору $\alpha = (a_0, b_0, \ldots)$ початкових членів і числу $i \geq 0$ ставить у відповідність вектор з i-х членів даних послідовностей:

$$F(\alpha, i) \overset{def}{=} \alpha_i \text{, де } \alpha_i = (a_i, b_i, \ldots).$$

Щоб знайти значення функції $F(\alpha, m)$ для довільного $m \geq 0$, достатньо послідовно побудувати всі попередні значення $F(\alpha, i)$, $i = \overline{1, m-1}$. Зазвичай для фіксованого початкового вектора α інтерес становлять не всі значення функції F – члени послідовності $\alpha_i, i \geq 0$, а лише виділені, і найчастіше – лише одне. Щоб відокремити потрібне значення, або прямо задають його конкретний номер, або його виділяють неявно за допомогою умови-фільтра Q типу $T^n \to \mathrm{Bool}$. Щоб такий вибір був однозначним, обмежуються, наприклад, першим з α_i, що задовольняє (порушує) фільтр. Якщо всі α_i порушують (задовольняють) Q, то результат вибору конкретного значення на даному вході α буде невизначений. Далі вважається, що вибирається перше з α_i, на якому порушується умова. Позначимо нову функцію $\mu_Q^{(*)}$. Вона є частковою, має тип $T^n \to T^n$ і називається *рекурентною*, породженою системою (*) і фільтром Q.

У доповіді показано, що клас рекурентних функцій утворює регулярну алгебру з основними операціями-композиціями – множенням, розгалуженням та ітерацією.

1. Зубенко В.В. Програмування: Зубенко В.В., Омельчук О.Л.- Київ: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2011.- 625 с.

Карнаух Тетяна Олександрівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: tkarnaukh@unicyb.kiev.ua

ВІДСТАНІ ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗПІЗНАВАННЯ

Карнаух Т.О.

В [1] було розглянуто псевдометрики — відстані з дещо модифікованою (відносно означення метрики в [2]) першою аксіомою. Головна відмінність псевдометрики від класичної метрики полягає в тому, що різні елементи можуть знаходитись на нульовій відстані.

Мета розпізнавання — встановити, чи співпадає досліджуваний об'єкт з взірцем. Ця однаковість об'єкта та взірця доволі часто розуміється як однаковість «з точністю до …». Крім того, у багатьох випадках сам об'єкт вже подається своєю моделлю (тобто зображенням), і ми змушені ототожнювати деякі варіації зображення об'єкта. Тому задача розпізнавання може мати тлумачення: чи правда, що відстань від досліджуваного об'єкта (або його зображення) до взірця (або його зображення) дорівнює нулю?

Як тільки мова йде про зображення, то в якості відстані більш природно розглядати саме псевдометрику: різні зображення можуть задавати один той самий об'єкт. Більш того, якщо йдеться про відстань від моделі об'єкта, то під взірцем у багатьох випадках теж неявно розуміється його модель. Тому в реальності використовується відстань не від самого об'єкту до взірця, а відстань від моделі об'єкта до моделі взірця. Цю задачу більш природно розв'язувати в термінах відстаней між моделями, тобто синтаксичних відстаней, але для того, щоб не втратити зв'язок з первісною задачею, слід вимагати, щоб відстань між об'єктами (семантична відстань) узгоджувалася з синтаксичною відстанню між їх моделями.

Цікаво, що таке трактування дозволяє в якості моделей використовувати не тільки статичні об'єкти, але й алгоритми. Наприклад, об'єкт можна задати побудованим для нього алгоритмом розпізнавання та оцінювати відстань між алгоритмом (тобто моделлю, зображенням об'єкту) та взірцем. Більш того, можна ставити задачу визначення ідентичності (близькості) двох об'єктів по алгоритмах їхнього розпізнавання або обчислення.

Перехід від семантичної відстані до синтаксичної кращий тім, що оцінити синтаксичну відстань буває набагато простіше, ніж семантичну. Якщо синтаксична та семантичні відстані узгоджені між собою, то далі за оцінкою синтаксичної відстані можна робити висновки щодо семантичної близькості та в такий спосіб розв'язувати задачу розпізнавання.

Щодо задачі класифікації, то один з варіантів класифікації об'єктів — розподіл їх за класами еквівалентності, індукованою псевдометрикою (еквівалентними вважаються об'єкти на відстані 0). За рахунок послабленої першої аксіоми метрики конкретна псевдометрика може виділяти саме ті властивості, за якими необхідно виконувати класифікацію. Тому задачу класифікації за певними ознаками можна розв'язувати як задачу побудови фактор-множини за псевдометрикою, побудованою саме для заданої класифікації.

Отже, розглянуті в [1] псевдометрики та узгоджені відстані можуть використовуватися в задачах розпізнавання (та перевірки еквівалентності) та близьких до них задачах класифікації.

1. Карнаух Т.А. Метрики в пространствах моделей. / Т.А. Карнаух // Materiály VI mezinárodni vědecko-praktiká konferece "Zprávy vědecké ideje – 2010". Díl 16. Moderni informačni technologie. Matematika. Výstavba a architektura. Tělovýchova a sport. – Praha: Publishing House "Education and Science" s.r.o., 2010. – С. 38-40.
2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

Крак Юрій Васильович, професор, д. ф.-м. н.,
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
e-mail : yuri.krak@gmail.com
Тернов Антон Сергійович, м.н.с., Троценко Богдан Анатолійович, м.н.с.,
Барчукова Юлія Валеріївна, аспірант
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
e-mail: {anton.ternov,modosansreves,YuliyaBarchukova}@gmail.com

СТРУКТУРНО-ВІЗЕМНИЙ АНАЛІЗ, КЛАСИФІКАЦІЯ ДАКТИЛЕМ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ ДАКТИЛЬНІЙ ЖЕСТОВІЙ МОВІ

Крак Ю.В., Тернов А.С., Троценко Б.А., Барчукова Ю.В.

В доповіді авторами обґрунтовується необхідність розробки елементів інформаційно-навчального комплексу української дактильної абетки для навчання дактильному мовленню.

Для отримання вхідних даних для алгоритмів синтезу дактилем для побудови інформаційної технології навчання дактильній жестовій мові та розпізнавання рухів кисті руки людини важливим етапом є класифікація жестових рухів та побудова їх специфікацій.

Українська дактильна абетка складається з 33 дактилем, 25 з яких мають різну конфігурацію руки, решта 8 мають аналогічну конфігурацію руки та відрізняються від попередніх орієнтацією руки в просторі та(або) рухом [1]. Всі дактилеми української жестової мови умовно можна класифікувати на 3 групи (за конфігурацією руки). При побудові конфігурації руки дактилем, важливим аспектом є специфікація положення великого пальця та ступінь прилягання одного пальця до сусіднього. Маючи за основу певну конфігурацію руки, можливо побудувати інші жестові одиниці зі зміною орієнтації руки та/або додаванням руху.

Для реалізації системи навчання дактильній жестовій мові запропоновано алгоритм та реалізацію оптимального за часом розрахунку стану просторової моделі за умови її високої розмірності, наявності скелету, близького до скелету руки людини, та звичайних мультимедійних вимог до апаратної частини комп'ютера, розглянуто алгоритми розрахунку поверхні моделі з метою виявлення найефективнішого, запропоновано метод показу дактильованого слова на основі окремих дактилем, для обчислень використано усі ядра процесора.

Одним з правил дактильного мовлення є необхідність супроводжувати дактилювання усним промовлянням з чіткою артикуляцією, що полегшує спілкування і сприяє розвитку зазначеного мовлення. Тому розуміння і аналіз процесу артикуляції є важливим етапом в контексті задачі розробки системи навчання дактильній абетці [1].

В доповіді розглядається підхід до структурного аналізу візуальної складової мовленнєвого процесу при відтворенні слів українською мовою з використанням апріорної інформації про віземи української мови. Вагові коефіцієнти присутності кожної базисної віземи в кадрі визначались як розв'язок задачі мінімізації функціоналу відмінності вхідної відеоінформації і відповідного параметричного стану тривимірної моделі голови людини. В дослідженнях було розглянуто комбінації візем з добре візуально локалізованими артикуляційними портретами: п'ять голосних візем і чотири приголосні. Для обчислення геометричних параметрів зміни форми губ було проведено захоп шести ключових точок розташованих на зовнішніх контурах губ.

Подальші дослідження будуть направлені на побудову специфікацій дактильних жестових одиниць згідно з визначених класифікацій, розробку алгоритмів моделювання перехідних станів жестових мовних одиниць та алгоритмів ідентифікації коартикуляційних моментів.

1. Кульбіда С.В. Українська дактилологія / Кульбіда С.В. – К: Педагогічна думка, 2007, 255с.

Крак Юрій Васильович, професор, д. ф.-м. н.,
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
e-mail : yuri.krak@gmail.com
Шкільнюк Дмитро Валерійович, аспірант
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
e-mail:dimonshk@gmail.com

ЗНАХОДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ОЗНАК НА ЗОБРАЖЕННЯХ РУКИ ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗПІЗНАВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ДАКТИЛЬНОЇ МОВИ

Крак Ю.В., Шкільнюк Д.В.

В доповіді авторами обґрунтовується необхідність розробки комплексної інформаційної технології невербального спілкування українською жестовою мовою людей з вадами слуху, як між собою, так і з іншими людьми, зокрема на основі дактильної мови[1] . Пропонується використовувати аналіз зв'язних областей при розпізнаванні елементів дактильної мови. За допомогою методів сегментації на вхідному зображені визначається область, яка відноситься до руки що відтворює жест [2].

Проаналізувавши природу елементу дактильної мови, та враховуючи те, що у всіх людей різні розміри руки пропонується обрахувати наступні характеристики: площу; периметр; компактність; орієнтацію головної осі; видовження.

При роботі з зображенням площа S – кількість пікселів, що відносяться до області, периметр P – кількість пікселів, які відносяться до контуру області. Компактність – це відношення квадрата периметру до площі області. $C = \frac{P^2}{S}$. Для обрахунку орієнтації головної осі та видовження, необхідно знайти дискретний центральний момент. Він обраховується наступним чином: $m_{ij} = \sum_{(x,y)\in Reg} (x-\overline{x})^i (y-\overline{y})^j$, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{(x,y)\in Reg} x$; $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{(x,y)\in Reg} y$, де n – кількість пікселів, які відносяться до області. Орієнтація головної осі обраховується наступним чином $elongation = \frac{m_{20}+m_{02}+\sqrt{(m_{20}-m_{02})^2+4m_{11}^2}}{m_{20}+m_{02}-\sqrt{(m_{20}-m_{02})^2+4m_{11}^2}}$. Для визначення орієнтації руки знайдемо кут $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2m_{11}}{m_{20}-m_{02}}\right)$, який будемо використовувати у якості характеристичної ознаки.

Отримані значення ознак використовувались для розпізнавання станів руки людини при показі дактильної абетки. Отримані результати дозволили вхідний жест ідентифікувати до відповідного класу об'єктів. Проведені експерименти показали ефективність такого підходу для вирішення даного типу задач.

Подальші дослідження будуть направленні на вдосконалення даного підходу, а саме у розширені вектора характеристичних ознак стану руки людини при показі елементів дактильної абетки і на комбінування даного методу з іншими методами розпізнавання елементів дактильної мови.

1. Крак Ю.В., Шкільнюк Д.В. Аналіз елементів дактильної жестової мови // Штучний інтелект. – №3, 2010. – С.322-328.
2. Форсайт Д., Понс Ж. Компьютерное зрение. Современный подход. – М.:Вильямс, 2004. – 926с.

Кузьмич Елена Ивановна, к.ф.м.н.
Волынский национальный университет им. Леси Украинки, Луцк, Україна,
e-mail: lenamaks79@mail.ru;
Хусаинов Денис Яхьевич, д.ф.м.н.,
Киевский национальный универсистет им. Тараса Шевченко, Киев, Україна,
e-mail: khusainov@unicyb.kiev.ua;
Ruzichkova Miroslava , к.ф.м.н.,
University of Zilina, Zilina, Slovensko
e-mail: miroslava.ruzickova@fpv.utc.sk;

ОЦЕНКА ДИНАМИКИ УРАВНЕНИЙ НЕПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Кузьмич Е. И, Хусаинов Д. Я., Ruzichkova M.

Одной из проблем теории устойчивости движения является задача абсолютной устойчивости. Многие процессы, происходящие в системах автоматического управления, связаны с устойчивостью построенного программного управления. Как правило функция управления является функцией одного переменного, представляющего линейную комбинацию фазовых переменных, и имеет заданный вид кривой, находящейся в первой и третьей координатных четвертях плоскости. Следует отметить, что в реальных технических системах, как правило, существует несколько режимов функционирования и переход с одного на другой осуществляется при достижении определенных условий. Системы такого вида, в самом общем случае, получили название гибридные системы.

В настоящей работе рассмотрены гибридные системы с временным переключением, описываемые нелинейными подсистемами непрямого регулирования, функционирующих на фиксированных временных интервалах $T_i = \left[t_{i-1}, t_i\right],\ i = \overline{1, N}$. Моменты времени $t_1, t_2, ..., t_i, ...t_N$ называются *моментами переключения*.

Такая гибридная система имеет вид семейства подсистем

$$\dot{x}(t) = a_i x\left(t\right) + b_i f_i\left(\sigma\left(t\right)\right),$$
$$\dot{\sigma} = c_i x\left(t\right) - \rho_i f_i\left(\sigma\left(t\right)\right), t \geq 0.$$

Здесь $x\left(t\right) \in R^1$, a_i , $\rho_i > 0$, b_i, c_i - постоянные, $f_i\left(\sigma\right)$ - непрерывные функции, удовлетворяющие условию Липшица и так называемому «условию сектора»

$$k_{1i}\sigma^2 \leq \sigma f_i\left(\sigma\right) \leq k_{2i}\sigma^2,\ k_{2i} > k_{1i} > 0.$$

Для решения $x(t)$ в моменты переключения справедливо условие непрерывности

$$\lim_{s \to +0} x(t_i - s) = \lim_{s \to +0} x(t_i + s),\ i = \overline{1, N-1}.$$

В работе вычислено для систем такого вида отклонение возмущенного движения в конечный момент времени $t = t_N$. Конечное возмущение оценивается путем композиции возмущений отдельных подсистем.

1. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.-Л. Гостехиздат, 1951. – 251 с.

2. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М., Изд.-во АН СССР, 1963. – 261 с.

3. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М., Наука, 1978. – 400 с.

Лиман Костянтин Сергійович, аспірант, факультет кібернетики
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: Lyman.Kostiantyn@gmail.com;

ПРО РОЗРОБКУ МОДЕЛІ ОЦІНКИ СЕМАНТИЧНОЇ СХОЖЕСТІ ПРИРОДНОМОВНИХ ТЕКСТІВ З ВВИКОРИСТАННЯМ БАЗИ ЗНАНЬ WORDNET

Лиман К.С.

В сучасному світі стає нагальною потреба опрацьовувати велику кількість текстової інформації. Для глибокого автоматичного аналізу інформації, для виведення інтелектуальних суджень потрібно використовувати сторонні знання, семантику. Для того щоб працювати з семантикою тексту використовуються лексичні бази знань, в яких кожному слову ставиться у відповідність певна множина смислів(концептів, або синсетів, по термінології WordNet) цього слова. Між концептами існують семантичні відношення, найважливішими з них є абстрагування та конкретизація, за допомогою яких утворюється таксономія. Завдяки наявності такої семантичної інформації в БЗ, було запропоновано велику кількість методів для визначення семантичної схожості (або дистанції) синсетів і слів.

Розроблювана модель семантичної схожості текстів базується на припущенні, що якщо тексти відносяться до однієї теми, то ця тема представлена в них приблизно однаково. Для вирішення цієї задачі кожен текст спочатку представляється як множина зважених синсетів: 1) кожному слову ставиться в відповідність його концепти; 2) вага кожного концепту – сума ваг відповідних йому слів, вага яких це або частота входження цього слова до документу, або TF-IDF (Tern Frequncy – Inverse Document Frequency). При цьому запам'ятовується внесок кожного тексту до ваги концепту. Власне тема в цій моделі представляється нечітким кластером близьких один до одного концептів. Аналіз внеску кожного тексту в цю тему буде визначати наявність цієї теми в кожному тексті. Для оцінки схожості цих текстів потрібно порівняти наявність кожної теми в текстах. Тривіальним способом є кількісне порівняння:теми представлені однаково в двох текстах, якщо відсоток їх внеску в цю тему приблизно рівний.

Однією з очевидних переваг даної моделі, є те, що вона застосовна до більш ніж двох текстів, при низькому рості обчислювальної складності та витрат, особливо, якщо ці тексти відносяться до однієї теми. Окрім того, із-за використання підходу "bag of words" дана модель не залежить від мови і потребує лише онтологій на цільовій мові.

Дана модель реалізується як розширення проекту KNIME (**K**o**N**stanz **I**nformation **M**in**E**r), де методи інтелектуальної обробки інформації реалізуються як вузли, а процес цієї обробки вибудовується як потік даних між вузлами, що є дуже зручним при обробці колекцій документів.

1. Анисимов А.В., Лиман К.С., Марченко А.А.: Методы вычисления мер семантической близости слов естественного языка// *Искусственный Интеллект*, 2010.
2. Berthold M.R., Cebron N., Dill F., Gabriel T.R., Tobias K. and other: KNIME - Konstanz Information Miner // *Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization (GfKL 2007)*, 2007, Springer.
3. Tsang, V. & Stevenson, S.: A Graph-Theoretic Framework for Semantic Distance // *Computational Linguistics,* 2010*,vol. 36*, pp. 31-69

Мохонько Елена Захаровна, доктор физ. - мат. наук, старший научный сотрудник,
Вычислительный центр РАН им. А. А. Дородницына, Москва, Россия,
e-mail: mohon@ccas.ru;
Носырев Андрей Владимирович, студент 5 курса, ФУПМ,
Московский физико-технический институт (ГУ), Москва, Россия,
e-mail:andrew_675@mail.ru

ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИГРЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ПЛАТЕЖОМ И ВОЗМУЩАЮЩИМ ФАКТОРОМ

Мохонько Е.З., Носырев А.В.

Данная работа является продолжением исследования избыточности и оптимальности информации, используемой игроками в неантагонистическом конфликте, с помощью повторяющихся игр. Эти исследования были начаты А.Ф.Кононенко в работах [1],[2] и продолжены другими исследователями, в частности, в работах [3], [4]/.

Рассматривается ситуация равновесия в неантагонистических повторяющихся играх двух лиц с непрерывным временем и с фиксированным дополнительным платежом, который первый игрок может выплатить второму игроку в конце игры. Используются стратегии с памятью. Равновесная стратегия имеет вид: некоторый договорной выбор и наказание в случае отклонения от него, а также выплата дополнительного платежа второму игроку, если он не отклонялся от договорного выбора. Один раз за всю игру может подействовать возмущение. В отличие от игр из [3],[4] оно изменяет не оптимальный выбор второго игрока, а величину дополнительного платежа. Вследствие этого суммарный выигрыш второго игрока может как увеличиваться, так и уменьшаться. До начала игры игроки не знают, в какой момент подействует возмущение. Они знают, как после такого воздействия изменится величина дополнительного платежа, который получит второй игрок, если за всю игру ни разу не отклонится от договорного выбора.

Дополнительный платеж позволяет выбрать в качестве договорного такой выбор, который сам по себе может быть не выгодным второму игроку. При таком выборе второй игрок получает больше минимаксного выигрыша только в сумме с дополнительным платежом.

В данной работе рассмотрен ряд игр, которые отличаются друг от друга степенью выгодности договорной траектории для второго игрока и наличием возможности получать информацию о действиях партнера и о воздействии возмущения дискретным и непрерывным способом. Исследуется качественный характер дискретных режимов получения информации в стратегиях, позволяющих сохранить ситуацию, существующую при непрерывном получении информации. Рассмотрен случай, когда момент действия возмущения используется для изменения договорного выбора.

1. Кононенко А.Ф. О задаче наблюдения в повторяющихся операциях // Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1976. С. 179-182.

2. Кононенко А.Ф. Постановка задачи. Модель с непрерывным временем // Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука,1976. С. 173 -179.

3. Мохонько Е.З., Сирожиддинов Ш.З. О влиянии возмущающего фактора на оптимальный режим получения информации в некоторой повторяющейся игре // Труды VIII международной конференции «Идентификация систем и задачи управления», Москва, 26-25 января 2009. М.: ИПУ, 2009. С.279-286.

4. Мохонько Е.З.Об информационных процессах в повторяющейся игре с возмущающим фактором//Труды ИСА РАН,2008. Т.39(1).С.88-98.

Мустафин Салим Абдрашитович, кандидат техн. наук, доцент
ИПИУ МОН РК, Алматы, Казахстан
e-mail: mustafinsal@mail.ru
Зейнуллина Асия, докторант phD
Евразийский национальный университет имени Льва Гумилева, Астана, Казахстан
e-mail: a.zeinullina@gharysh.kz

ПРОЦЕДУРА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ПРИ ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ НАБОРЕ ПРИЗНАКОВ

Зейнуллина А.А., Мустафин С.А.

В докладе предлагается оценка состояния производственного процесса твердения закладочного материала, применяемого в горном деле, по данным наблюдений, выполненных в заданные моменты времени при изменяющемся наборе признаков готовности. Разработанный метод основан на теории распознавания образов и использует в качестве исходной информации описания кусочно–непрерывных эталонных траекторий протекания развития прогнозируемых процессов готовности закладки для эксплуатации. Метод был апробирован на реальном практическом материале в условиях меднорудных месторождений Джезказгана.

Нестеренко Борис Борисович, доктор технічних наук, професор,
Інститут математики НАН України,
e-mail: model@imath.kiev.ua;
Новотарський Михайло Анатолійович, доктор технічних наук, с.н.с.,
Інститут математики НАН України,
e-mail: novot@imath.kiev.ua

МОДИФІКАЦІЯ АЛГЕБРИ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ АСИНХРОННОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРОЦЕСІВ

Нестеренко Б.Б., Новотарський М.А.

В сучасному розумінні термін „алгебра процесів" об'єднує велике сімейство підходів до формального опису складних систем та процесів, які включають інструментарій ієрархічного опису компонентів та способи їх взаємодії. У переважній більшості модифікації алгебри процесів походять від відомих базових версій: алгебри комунікаційних послідовних процесів (CSP — Communicating Sequential Processes) [1], числення комунікаційних систем (CCS — Calculus of Communicating Systems) [2] або алгебри комунікаційних процесів (ACP — Algebra of Communicating Processes) [3]. Принципова відмінність згаданих версій полягає у способах відображення існування в часі елементарних сутностей моделювання: однією подією, яка відображає момент звершення; активністю, що задає протяжність у часі елементарної сутності, або парою подій, які вказують на початковий та кінцевий час звершення. В даній роботі запропоновано модифікацію алгебри процесів, яка використовує активність для задавання елементарної сутності моделювання у поєднанні зі стартовою та фінішною подіями. Такий підхід дозволив формалізувати процедури опису ієрархічних моделей та розробити механізми асинхронної взаємодії.

Синтаксис модифікованої алгебри процесів, який включає опис відомих операцій [4], доповнено операцією асинхронної взаємодії: $P \underset{L}{\lhd\rhd} Q|\cdots|C$, де P,Q,C — процеси; $Q|\cdots|C$ — композиція процесів, що розвиваються паралельно без взаємодії між собою; $\underset{L}{\lhd\rhd}$ — операція, що задає правило асинхронної взаємодії між процесом P та довільним процесом з композиції $Q|\cdots|C$ за умови, що множина подій асинхронної взаємодії $L = \varnothing$.

Семантика представлена в термінах нотації Плоткіна, яка описує операції у вигляді дробу зі знаменником, що містить загальний запис операції, і чисельником, що задає можливі варіанти її виконання. У даній семантиці нотація операції асинхронної взаємодії має вигляд:

$$\frac{P \xrightarrow{\bar{a}(x)} P' \; Q \xrightarrow{a(x)} Q' \cdots C \xrightarrow{a(x)} C'}{P \underset{L}{\lhd\rhd} Q|\cdots|C \xrightarrow{\tau} P' \underset{L}{\lhd\rhd} Q'|\cdots|C'}.$$

Застосування даної операції дозволяє спростити формальний опис моделей паралельних обчислень на кластерних та GRID-системах.

1. Хоар Ч. Взаимодействующие последовательные процессы. – М.: Мир, 1989.– 264 с.

2. Milner R. Calculus of Communicating Systems // Lecture Notes in Computer Sciences.– 1980.– Vol.92.– 260 p.

3. Baeten J.C.M., Weijland W.P. Process Algebra (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science).– Cembridge: Cembridge University Press, 1991.– 248 p.

4. Нестеренко Б.Б., Новотарский М.А. Алгебра процессов для моделирования сложных систем с реальной рабочей нагрузкой // Реєстрація, зберігання та обробка даних .– 2007.– Т.9, №4.– С.49-59.

Нікітченко Микола Степанович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua
Шкільняк Степан Степанович, доктор фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ *H*-КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.

На даний момент розроблено багато різноманітних логічних систем, які успішно використовуються в програмуванні та моделюванні. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Проте класична логіка має принципові обмеження, які ускладнюють її використання. Така логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень, вона недостатньо враховує неповноту, частковість інформації про предметну область, її структурованість. Таким чином, першорядною стає проблема побудови нових, програмно орієнтованих логічних формалізмів.

В доповіді пропонуються композиційно-номінативні логіки часткових предикатів, які базуються на алгебрах ієрархічних номінативних даних. Такі дані можна трактувати як номінативні зі складними іменами. Множину іменованих ієрархічних номінативних даних $HD(V,A)$ над множинами базових імен V та базових значень A визначимо індуктивно.

Задамо $ND_0(V,A) = A$, $ND_{k+1}(V,A) = A \bigcup (V \xrightarrow{n} ND_k(V,A))$.

Тоді $HD(V,A) = \bigcup\limits_{k\geq 1}(V \xrightarrow{n} ND_k(V,A))$.

Предикати, задані на ієрархічних номінативних даних, тобто предикати вигляду $P : HD(V,A) \to \{T, F\}$, назвемо *H*-квазіарними. Клас цих предикатів позначимо Pr^{V_A}.

В доповіді розглядаються логіки *H*-квазіарних предикатів на реномінативному та кванторному рівнях. Композицію реномінації стандартно визначаємо через операцію реномінації на ієрархічних даних. Використання в реномінаціях складних імен робить згортку реномінацій проблематичною, тому для запису згортки пропонується подання реномінації в певній стандартній формі: При визначенні композицій $\exists \boldsymbol{x}$ та $\forall \boldsymbol{x}$ треба врахувати складність кванторних імен та можливість вести квантифікацію як за всіма ієрархічними, так і за базовими даними. В доповіді розглядається саме останній випадок. Специфічні властивості $\exists \boldsymbol{x}$ та $\forall \boldsymbol{x}$, що відрізняють їх від відповідних композицій логік квазіарних предикатів, пов'язані з складними іменами, зокрема, з поглинанням конкретніших імен загальнішими. Наприклад:

1. $\exists x.y\exists xP = \exists xP$; $\forall x.y\exists xP = \exists xP$; $\exists x.y\forall xP = \forall xP$; $\forall x.y\forall xP = \forall xP$.
2. $\exists x\exists x.yP = \forall x\exists x.yP \neq \exists xP$; $\exists x\exists x.yP \neq \exists x.yP$; $\exists x\forall x.y\, P = \forall x\forall x.yP \neq \forall xP$; $\exists x\forall x.y\, P \neq \forall x.yP$.

Семантичними моделями КНЛ *H*-квазіарних предикатів є композиційні системи вигляду $(HD(V,A), Pr^{V\_A}, \boldsymbol{C})$. Із синтаксичного погляду мови КНЛ *H*-квазіарних предикатів та квазіарних предикатів відповідного рівня відрізняються мало (наявністю складних імен). Інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову КНЛ *H*-квазіарних предикатів відповідного рівня із АС даних, є АС з доданою сигнатурою вигляду $((HD(V,A), Pr^{V\_A}), \boldsymbol{I})$.

Пропоновані логіки *H*-квазіарних предикатів орієнтовані на опис властивостей поширених в програмуванні предикатів та функцій, визначених на даних із складною структурою.

1. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Нікітченко М.С. Композиційно-номінативні логіки над ієрархічними даними / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2010. – № 2–3. – С. 48-57.

Орловский Ян Станиславович, аспирант, кафедра Автоматика и информационные технологии
Технический Университет Молдовы, Кишинев, Молдова,
e-mail: orlovski@yandex.ru

К ВОПРОСУ О РАЗРАБОТКЕ И РЕАЛИЗАЦИИ ФОРМАЛЬНОГО ГРАФОВОГО ЯЗЫКА ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Орловский Я.С.

Современный процесс проектирования формальных моделей информационных систем развивается в направлении все большего использования визуальных формальных языков основанных на теории графов. В статье рассматривается ряд проблем, которые были выявлены и решены в процессе разработки синтаксиса, семантики и алгоритмов трансляции графового формального языка для представления логических моделей программных систем.

Реализация визуального языка подразумевает избавление от типично текстовых свойств языка, т.е. представления фраз как последовательности символов. Были выявлены и предложены следующие свойства символьного (текстового) представления от которых можно отказаться в графовом языке: направление чтения и порядковый номер элементов в предложении языка, который следует из направления чтения; порядковый номер перечисляемых термов как идентификатор аргумента; использование скобок для указания приоритетов выполнения; название переменной для ее идентификации в формуле.

Описание синтаксиса графовых , т.е, многомерных, языков расширено по сравнению с символьными, т.е. линейными языками. В ряде исследований был предложены различные варианты расширения синтаксиса, автором был принят метод представления синтаксиса с помощью грамматики G = (VN, VT, VR, S, P, R) предложенный в [1]. Данная грамматика описывает правила построения направленного графа, в котором множество узлов VN представляет объекты и операции между ними, а направления дуг из множества VR определяет порядок направления чтения, т.е. интерпретации формулы.

Графовый синтаксис дает возможность записи операций с произвольной арностью, что дает возможность представления формул с использованием конъюнктов и дизъюнктов, т.е. логических операций И, ИЛИ применимых к произвольному множеству предикатов. Из-за унарности операции логического отрицания предлагается данную операцию записывать дугой, а не отдельным узлом графа. Кроме того, предлагаемый подход к разработке языка ограничивает использование вложенных операций импликации. По этой причине, а также для простоты трансляции записываемых формул на язык Пролог, предлагается ограничить выразительность языка формализмом фраз Хорна.

Для определения денотационной семантики был использован язык Пролог - декларативный язык логического программирования. Трансляция модели представленной графовой нотацией на язык Пролог приводит к проблемам поднятыми исследователями при разработке параллельных версий Пролога [2], например, отсутствие определенного порядка выполнения подцелей соединенных логической операцией ИЛИ. Кроме того прямая трансляция фраз логики предикатов не дает возможности использовать искусственные инструменты оптимизации Пролога, например, оператор отсечения (cut).

Эти и другие вопросы исследования представлены в докладе и предложены к обсуждению.

1. Kremer R., Visual Languages for Knowledge Representation, KAW'98: 11th Workshop on Knowledge Acquisition, Modeling and Management, April 18-23, 1998, Voyager Inn, Banff, Alberta, Canada
2. Стерлинг Л., Шапиро Э. Искусство программирования на языке Пролог: Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - 235 с.

Потієнко Михайло Валерійович, аспірант 3 курсу, факультет кібернетики
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: dmelk@ukr.net

НЕЙРОМЕРЕЖЕВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЄРАРХІЧНО-ФАСЕТНОЇ КЛАСИФІКАЦІЇ І ПОШУКУ

Потієнко М.В.

Збільшення кількості інформації в світі призводить до потреби у використанні нових методів її класифікації. Одним з таких методів є метод ієрархічно-фасетної класифікації, що поєднує в собі особливості як ієрархічної, так і фасетної класифікації. Цей метод базується на класифікації об'єктів за допомогою фасетів, що представляють собою множини фасетних характеристик, і можуть бути ієрархічно впорядковані. В свою чергу об'єкти, класифіковані за допомогою цього методу, характеризуються набір фасетних характеристик [1].

На основі ієрархічно-фасетної класифікації будуються системи пошуку. В таких системах у якості пошукового запиту задаються бажані фасетні характеристики. Результат пошуку – всі об'єкти, які включають в себе ці характеристики. Головним недоліком існуючих систем є важкість їх побудови. Крім того не існує загальних методів побудови таких систем [2].

Розглянемо структурну модифікацію загальної системи нейронних мереж короткотривалої пам'яті людини. Така модифікація системи зберігає об'єкти у якості послідовностей характеристик, які також можуть бути об'єктами [3]. Тобто працює аналогічно до систем ієрархічно-фасетної класифікації. Дану систему також можна представити у вигляді ієрархічної конструкції спеціальним чином поєднаних між собою нейронних мереж – базових елементів системи. Кожен базовий елемент може зберігати в собі інформацію про деякий фасет. Поєднання цих базових елементів з додаванням до них базового елементу на найвищому рівні ієрархії призведе утворення системи, що зможе виступати у ролі ієрархічно-фасетного класифікатора і пошукової системи. Головними перевагами такого методу є його загальність, а також те, що кожен базовий елемент системи навчається окремо, додавання або видалення базових елементів не потребують перенавчання всієї системи.

Таким чином представлено нейромережевий метод, що дозволяє розв'язувати задачі ієрархічно-фасетної класифікації і пошуку в загальному випадку.

1. Zhang J., Marchionini G. Coupling browse and search in highly interactive user interfaces: a study of the relation browser++ / J. Zhnag, G. Marchionini // In Proceedings of the 4th ACM/IEEE-CS Joint Conference on Digital Libraries (Tucson, AZ, USA, June 7–11, 2004), JCDL '04, ACM, New York, NY. – 2004. – P. 384-384.
2. Allen R.B. Retrieval from facet spaces / R.B. Allen // Electronic Publishing. – 1996. – 8. – P. 247-257
3. Потієнко М.В. Структурна модель процесів короткотривалої пам'яті людини / М.В. Потієнко // Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – 4 – С. 169-172

Россада Тетяна Володимирівна, аспірант 2-го року навчання, факультет кібернетики
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: trossada@ukr.net

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СИНОНІМІЇ У ФОРМАЛЬНИХ МОВАХ

Россада Т.В.

Метою даного повідомлення є моделювання та дослідження синонімії у формальних мовах з використанням композиційно-номінативного підходу до даних [1]. У доповіді будуть надані формальні визначення поняття унікально-іменного даного з синонімами. Усі використані в роботі позначення та поняття розуміються у смислі [1].

З двох типів синонімії: інтенсіональної (щодо сигніфікату) та екстенсіональної (щодо денотату) будемо досліджувати останню.

Основна ідея полягає у моделюванні синонімії як бінарного відношення еквівалентності на множині імен. Це дозволяє розширити клас номінативних даних *ND* [1] до класу унікально-іменних даних з синонімами UND_s. Прикладом використання такого підходу є робота пошукової системи Google: множина сторінок з однаковими ключовими словами (що теж є синонімами відносно запиту) зберігається у вигляді окремої таблиці [3].

Введення синонімії вимагає змін у визначенні таких базових функцій та композицій [1], як розіменування та накладання:

– розіменування над UND_s($v \in V, d \in UND_s(V,W)$):

$$v \Rightarrow_{us} (d) = \begin{cases} d(v), & if \quad v \in rn(d), \\ v \Rightarrow_{us} d(u), & if \quad u \in rn(d) \wedge v \in nms(d(u)), \\ \uparrow, & else. \end{cases}$$

– накладання над UND_s $d\nabla_{us}[v \mapsto d']$, $v \in V, d, d' \in UND_s(V,W)$ ускладнена зміною значення усіх імен-синонімів при зміні значення хоча б одного з цих імен: якщо $syn(v) = \varnothing$,

то $$d\nabla_{us}[v \mapsto d'] \cong d\nabla_u[v \mapsto d'] \cong \begin{cases} \uparrow, & якщо \quad nms(d) \cap nms(d') = \varnothing, \\ d \cup [v \mapsto d'], & якщо \quad v \notin nms(d), \\ r, & якщо \quad v \in nms(d), \end{cases}$$

де $rn(r) = rn(d)$ і $\forall u \in rn(r)$: $$r(u) = \begin{cases} d', & if \quad v = u, \\ d(u)\nabla_u[v \mapsto d'], & if \quad v \in nms(d(u)), \\ d(u), & else; \end{cases}$$

якщо $syn(v) = \{v_i \mid i \in \{1,..,n\}\}$, то $d\nabla_{us}[v \mapsto d'] = d\nabla_u[v \mapsto d]\nabla_u[v_1 \mapsto d']\nabla_u ...\nabla_u[v_n \mapsto d']$.

Досліджено властивості класу UND_s та введеної мови програм з синонімією над даними цього класу. Доведено теорему про замкненість класу UND_s відносно базових операцій та композицій, а також теорему про стабільності програм з синонімією щодо заміни даних на еквівалентні.

1. Никитченко Н.С. Композиционно–номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16-31.
2. Nikitchenko N.S. A composition nominative approach to program semantics
3. http://www.baselinemag.com/c/a/Infrastructure/How-Google-Works-1/

Тимофеев Валентин Георгиевич, аспирант факультета кибернетики,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: tvuniv@gmail.com;

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФОРМУЛ НА ОСНОВЕ МНОЖЕСТВЕННЫХ ОПЕРАЦИЙ В КОНТЕКСТЕ ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ ВЫПОЛНИМОСТИ

Тимофеев В.Г.

Задача проверки выполнимости логических формул (satisfiability problem) является одной из прикладных задач в математической логике. В терминах проверки выполнимости формулируются некоторые задачи верификации программных и аппаратных систем, задачи теории графов, теории расписаний, статического анализа, автоматической генерации тестов и др. [1]. Задача проверки выполнимости часто ставится и для более выразительных логических теорий (satisfiability modulo theories, SMT), нежели пропозициональная логика.

В данном докладе рассматривается подход, к решению задачи SMT основанный на представлении логических формул, использующем в качестве логических связок множественные операции. Атомарными подформулами в таком представлении являются предикаты логической теории, либо их отрицания, а логическими связками – множественные операции конъюнкции (&) и дизъюнкции ($\vee$). Множественность подчеркивает то, что количество аргументов операции (арность) не ограничивается, а порядок аргументов не устанавливается. Это представление строится со следующим ограничением: &- и $\vee$-подформулы не должны быть непосредственными аргументами операций & и $\vee$ соответственно. Такое ограничение позволяет говорить о некоторой однозначности получаемого представления для заданной исходной формулы. В таком представлении формулы ассоциируя с каждой $\vee$-вершиной индекс, определяющий одного из ее потомков, получаем поддерево, конъюнкция листов которого будет импликантой исходной формулы, а множество всех возможных таких конъюнкций будет составлять ее ДНФ.

Предлагаемый подход преполагает введение линейного порядка на множестве возможных комбинаций значений индексов $\vee$-вершин, и организации последовательного поиска выполнимой конъюнкции. При этом, для сокращения поиска, невыполнимые конъюнкции анализируются с целью нахождения противоречивого подмножества их литералов, что часто позволяет исключить из рассмотрения непосредственно следующие (в соответствии с введенным линейным порядком) заведомо противоречивые конъюнкции. Конкретная реализация данного подхода зависит от выбора линейного порядка и способа поиска противоречивого подмножества литералов.

Несколько различных реализаций описанного подхода были опробованы на логических формулах теории линейной целочисленной арифметики, взятых из области верификации требований к программным системам, а также из библиотеки SMT-LIB[2]. В качестве разрешающей процедуры для конъюнции предикатов теории использовалась библиотека Omega[3]. Проведенные эксперименты свидетельствуют о значительном сокращении числа вызовов разрешающей процедуры по сравнению с общим числом конъюнктов, составляющих ДНФ формулы.

1. de Moura L. A Tutorial on Satisfiability Modulo Theories / L. de Moura, B. Dutertre, N. Shankar // CAV 2007, LNCS 4590. — 2007. — P. 20-36.
2. The Satisfiability Modulo Theories Library: http://goedel.cs.uiowa.edu/smtlib/
3. Pugh W. The Omega test: a fast and practical integer programming algorithm for dependence analysis / W. Pugh //Proc.of the 1991 ACM/IEEE conf. on Supercomputing. — 1991. — P. 4-13.

Шкільняк Оксана Степанівна, асистент кафедри інформаційних систем,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: oshkilnyak@unicyb.kiev.ua

СЕМАНТИЧНІ МОДЕЛІ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ МОДАЛЬНИХ ЛОГІК

Шкільняк О.С.

Модальні й темпоральні логіки з великим успіхом використовуються для моделювання різноманітних предметних областей, опису складних динамічних систем, специфікації та верифікації програм. Композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) поєднують можливості традиційних модальних логік та композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів [1]. Такі логіки на пропозиційному, реномінативному, кванторному, кванторно-еквaційному, функціонально-еквaційному рівнях досліджувались, зокрема, в роботах [2, 3].

Центральним поняттям КНМЛ є [1] поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). В [2] запропоноване спеціальне уточнення поняття КНМС для логік номінативних рівнів. Станами світу в таких КНМС є алгебраїчні системи (АС).

Композиційні модальні системи (КМС) є семантичними моделями КНМЛ, їх можна віднести до моделей реляційного типу. КМС – це об'єкт $Cms = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C)$. Тут $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу, $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на $\boldsymbol{S}$ вигляду $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}}$, Pr – множина предикатів на станах світу, C – множина композицій на Pr, вона визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня та базовими модальними композиціями. Для КНМС номінативних рівнів $\boldsymbol{S}$ конкретизуємо як множину неокласичних АС [1].

Важливою різновидністю КНМС є транзиційні модальні системи (ТМС). Вони лежать в основі транзиційних КНМЛ, в межах яких природним чином можуть розглядатися традиційні модальні логіки – алетичні, темпоральні, епістемічні тощо. Для ТМС множина $\boldsymbol{R}$ складається з відношень вигляду $\mathrm{R} \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$ – відношення переходу, або досяжності.

ТМС, у яких $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення досяжності, а базовою модальною композицією є $\Box$ (необхідно), називають *загальними*.

Темпоральні КНМС (ТмМС) – це ТМС із єдиним бінарним відношенням досяжності та базовими модальними композиціями $\Box\uparrow$ (завжди буде), $\Box\downarrow$ (завжди було).

Для відповідних класів КНМЛ на різних рівнях визначено [2, 3] синтаксис та семантику мов. Залежно від умов, які накладаються на відношення досяжності, визначено різні класи загальних ТМС та ТмМС. Виділено транзиційні модальні системи із сильною умовою та загальною умовою визначеності на станах. Реномінації можна проносити через модальні композиції, а суперпозиції – не можна. Тому для логік функціонально-еквaційного рівня виділено функціонально стабільні ТМС, для яких вже можна проносити суперпозиції через модальні композиції. Запропоновано та досліджено відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул загальних транзиційних і темпоральних КНМЛ.

На основі реляційних семантичних моделей загальних транзиційних та темпоральних КНМЛ еквітонних предикатів для відповідних класів цих логік будуються числення секвенційного типу. Для таких числень доведено теореми коректності та повноти.

1. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Шкільняк О.С. Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2009. – № 4. – С. 11-23.
3. Шкільняк О.С. Композиційно-номінативні модальні логіки функціонально-еквaційного рівня / О.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2010. – № 2–3 – С. 42-47.

Шкільняк Степан Степанович, доктор фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

ЛОГІЧНЕ СЛІДУВАННЯ В ЛОГІКАХ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ

Шкільняк С.С.

Поняття і методи математичної логіки доводять свою ефективність при розв'язанні широкого кола задач моделювання предметних областей. Водночас таке використання вимагає зробити математичну логіку ближчою і адекватнішою до потреб моделювання й програмування. Принципові обмеження класичної логіки предикатів, в першу чергу те, що вона недостатньо враховує неповноту і частковість інформації про предметну область, робить актуальною проблему побудови та дослідження нових логічних формалізмів. За основу такої побудови природно взяти спільний для логіки й програмування композиційно-номінативний підхід. На базі цього підходу розроблено [1] широкий спектр композиційно-номінативних логік (КНЛ) часткових предикатів, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності.

Поняття логічного слідування є центральним поняттям логіки. В доповіді пропонуються різні його формалізації за допомогою відношень логічного наслідку. Для пропозиційної логіки нестандартні семантики та різноманітні відношення логічного наслідку вивчались О.Д.Смирновою [2]. Подібні семантики та відношення узагальнені [3] для КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів.

На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів задаємо такі "природні" відношення логічного наслідку: "істиннісний" $|=_T$, "хибнісний" $|=_F$, "сильний" $|=_{TF}$, "неспростовнісний" $|=_{Cl}$, "насичений" $|=_{Cm}$. Ці відношення індукують відповідні відношення еквівалентності, вони поширюються на множини формул. Визначаються також відношення тавтологічного $|=_t$, слабкого $||=$ та слабкого тотального $||\equiv$ наслідку. Логіка тотальних однозначних предикатів – це класична логіка. Логіки часткових однозначних предикатів – це логіки з неокласичною семантикою, тотальних неоднозначних предикатів – із пересиченою семантикою, часткових неоднозначних предикатів – із загальною семантикою.

Властивості відношень логічного наслідку розглядаються в різних семантиках для загального випадку квазіарних предикатів та для випадків еквітонних і антитонних предикатів. На основі цих властивостей отримуємо наступні співвідношення для множин формул, які перебувають у відповідних відношеннях.

1. Неокласична семантика:

$|=_{TF}\subset|=_T$, $|=_{TF}\subset|=_F$, $|=_T\subset|=_{Cl}$, $|=_F\subset|=_{Cl}$; $|=_t\subset|=_{Cl}$, $|=_F\subset||=$, $|=_T\subset||\equiv$; $|=_{Cm}=\varnothing$;
$|=_t\not\subset|=_T$, $|=_t\not\subset|=_F$, $|=_{TF}\not\subset|=_t$; $|=_T\not\subset||=$, $|=_F\not\subset||\equiv$, $||=\not\subset|=_{Cl}$, $||\equiv\not\subset|=_{Cl}$.

2. Пересичена семантика:

$|=_{TF}\subset|=_T$, $|=_{TF}\subset|=_F$, $|=_T\subset|=_{Cm}$, $|=_F\subset|=_{Cm}$; $|=_t\subset|=_{Cm}$, $|=_F\subset||=$, $|=_T\subset||\equiv$; $|=_{Cl}=\varnothing$;
$|=_t\not\subset|=_T$, $|=_t\not\subset|=_F$, $|=_{TF}\not\subset|=_t$; $|=_T\not\subset||=$, $|=_F\not\subset||\equiv$, $||=\not\subset|=_{Cm}$, $||\equiv\not\subset|=_{Cm}$.

3. Загальна семантика:

$|=_{TF}=|=_T=|=_F$; $|=_t\not\subset|=_{TF}$, $|=_{TF}\not\subset|=_t$; $|=_{TF}\subset||\equiv=||=$; $|=_{Cl}=\varnothing$, $|=_{Cm}=\varnothing$.

4. Загальна семантика еквітонних чи загальна семантика антитонних предикатів:

$|=_{TF}\subset|=_T$, $|=_{TF}\subset|=_F$; $|=_t\not\subset|=_{TF}$, $|=_{TF}\not\subset|=_t$; $|=_T\subset||\equiv$, $|=_F\subset||=$; $|=_{Cl}=\varnothing$, $|=_{Cm}=\varnothing$.

1. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Смирнова Е.Д. Логика и философия / Е.Д. Смирнова. – М.: РОССПЕН, 1996. – 304 с.
3. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С.С.Шкільняк // Проблеми програмування. – 2010. – № 1 – С. 15–38.

Яджак Михайло Степанович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
e-mail: yadzhak@zadarma.com, dept25@iapmm.lviv.ua

ПРОБЛЕМА РЕАЛІЗАЦІЇ ДЕЯКИХ ПАРАЛЕЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Яджак М. С.

Загалом розглядувана нами задача цифрової фільтрації (ЗЦФ) полягає у виконанні деякої кількості перерахунків згладжування масиву значень змінних через рухоме вікно заданого розміру. У працях [1, 2] були запропоновані алгоритми з обмеженим паралелізмом (АОП) для розв'язання ЗЦФ різної вимірності. Проблема ефективної реалізації АОП для розв'язання одновимірної задачі фільтрації на універсальних паралельних обчислювальних системах зі спільною та розподіленою пам'яттю досліджувалась у [3, 4]. Відомо, що паралельні системи зі спільною пам'яттю погано масштабуються і є доволі дорогими, а системи з розподіленою пам'яттю, зокрема кластери, найкраще підходять для реалізації паралельних алгоритмів із слабозв'язаними гілками (за обсягом обчислювальні операції в таких гілках набагато переважають обмінні між ними).

У праці [1] для розв'язання одновимірної ЗЦФ у разі $1 < p < m + 1$, $m > 1$ розроблено АОП, гілки яких є сильнозв'язаними; тут p – кількість паралельних гілок алгоритму, а $(2m + 1)$ – розмір рухомого вікна. Для реалізації таких алгоритмів ми пропонуємо використовувати паралельні обчислювальні системи зі структурно-процедурною організацією обчислень (ССПОО) [5], елементною базою яких є програмовані логічні інтегральні схеми.

Нами розроблено конфігурації ССПОО для виконання АОП у випадках, коли вагові коефіцієнти є однаковими і коли вони різні. У таких обчислювальних системах використовується універсальний комутатор, який дозволяє організовувати будь-які канали зв'язку між процесорними елементами та секторами пам'яті. Здійснено аналіз двох способів можливої реалізації паралельних алгоритмів і встановлено їх високу ефективність. Це пояснюється тим, що майже всі операції з пам'яттю суміщаються із виконанням арифметичних операцій додавання та множення.

У роботі розглядається також проблема безконфліктного розташування даних [5] у секторах пам'яті. Наведено приклади розташування даних для окремих випадків розв'язання одновимірної ЗЦФ. Одержані результати можуть бути використані з метою оптимальної реалізації інших алгоритмів масових обчислень із [1] та АОП для розв'язання задач фільтрації більшої вимірності [2] на ССПОО.

1. Яджак М. С. Алгоритмы с ограниченным параллелизмом для решения одной задачи цифровой фильтрации / М. С. Яджак // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 6. – С. 109–118.
2. Яджак М. С. О построении алгоритмов с ограниченным параллелизмом для решения задач цифровой фильтрации / М. С. Яджак // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 6. – С. 92–103.
3. Яджак М. С. Реалізація алгоритмів з обмеженим паралелізмом для розв'язання задачі цифрової фільтрації / М. С. Яджак // Відбір і обробка інформації. – 2006. – Вип. 25 (101). – С. 103–108.
4. Яджак М. С. Аналіз реалізації алгоритмів з обмеженим паралелізмом для цифрової фільтрації / М. С. Яджак // Відбір і обробка інформації. – 2009. – Вип. 30 (106). – С. 162–167.
5. Каляев И. А. Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры / И. А. Каляев, И. И. Левин, Е. А. Семерников, В. И. Шмойлов. – Ростов н/Д: Изд-во ЮНЦ РАН, 2008. – 320 с.

Маринин Евгений Михайлович, студент 4 курса, факультета кибернетики,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, Киев, Украина,
e-mail: imilin@yandex.ru
Бычков Алексей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, Киев, Украина,
e-mail:bos.knu@gmail.com;

УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОЙ ТРАЕКТОРИИ ЛИНЕЙНОГО ГИБРИДНОГО АВТОМАТА С НЕЧЕТКИМ ЦИКЛИЧЕСКИМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Маринин Е.М., Бычков А.С.

Пусть задан гибридный автомат HA с нечетким циклическим переключением $1 \to 2 \to 3 \to ... \to n \to 1$, и с уравнениями $\dot{x}(t) = Ax(t), i = 1,2,...,n$ в локальных состояниях. Поверхность переключения $i \to i+1$ для каждого индекса i и уровня возможности $u \in [0,1]$ определяются как $J(i, i \oplus 1, u) = \{(y,y) \in \mathrm{R}^d \times \mathrm{R}^d \mid -\xi_i(u) \le l_i^T y \le \xi_i(u)\}$ (пара (y,y) означает, что автомат не импульсный), где $i \oplus 1 = i+1$, если $i < n$ и $i \oplus 1 = 1$, если $i = n$, l_i -- вектор нормали гиперплоскости переключения, $\xi_i(u)$ -- монотонно убывающая функция, ограниченная в окрестности нуля, такая, что $\xi_i(1) = 0$. Таким образом, переключение может происходить на некотором расстоянии от четкой плоскости переключения.

Получены достаточные условия устойчивости нулевой траектории автомата HA с заданным уровнем $\overline{\alpha} : \mathrm{R} \to [0,1]$.

Пусть $\psi = Infinv(\overline{\alpha})$ и D -- область определения ψ (заметим, что если α -- монотонная функция, то ψ -- функция, обратная к $\overline{\alpha}$). Обозначать $A > 0$ -- положительно-определенную симметричную матрицу, $A \ge 0$ -- положительно полуопределенная симметричная матрица.

Предположим, что существуют матрицы H_i, $i = 1,2,...,n$, такие, что $H_i > 0$ и $-A_i^T H - HA \ge 0$, $i = 1,2,3,...,n$ (таким образом, состояния автомата локально устойчивы).

Теорема. (Устойчивость равновесия линейных циклических нечетких ГА) Предположим, что для каждого $u \in D$ существует решение системы матричных неравенств (1)-(5) относительно скалярных параметров $\{\xi_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n, \{\rho_i\}_{i=1}^n, \kappa$, такое, что

$$\lambda_n(...\lambda_3(\lambda_2(\lambda_1\kappa + \mu_1\xi_1^2(u)) + \mu_2\xi_2^2(u)) + \mu_3\xi_3^2(u)...) + \mu_n\xi_n^2(u) \le \kappa$$

$$\psi^2(u)H_1 - \kappa I \ge 0 \qquad (1)$$

$$\lambda_i H_i + \mu_i l_i l_i^T - H_{i\oplus 1} \ge 0, \qquad i = 1,2,...,n \qquad (2)$$

$$\rho_i I - \lambda_i \psi^2(u) H_i \ge 0, \qquad i = 1,2,...,n \qquad (3)$$

$$\psi^2(u) H_{i\oplus 1} - \mu_i \xi_i^2(u) I - \rho_i I \ge 0, \qquad i = 1,2,...,n \qquad (4)$$

$$\lambda_i \ge 0, \mu_i \ge 0, \rho_i \ge 0, \qquad i = 1,2,...,n \qquad (5)$$

Тогда нулевая траектория автомата HA устойчива с уровнем $\overline{\alpha}$.

Якимова Марія Сергіївна, студентка 4 курсу, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: aleida@ukr.net
Бичков Олексій Сергійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail:bos.knu@gmail.com;

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ СКЛАДАННЯ РОЗКЛАДУ У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

Якимова М.С., Бичков О.С.

Як відомо, задача складання розкладу належить до класу NP-повних задач. Для задач цього класу не відомо ефективних алгоритмів розв'язання. Але всі NP-задачі шляхом нетривіальних перетворень зводяться одна до одної. Таким чином задача складання розкладу зводиться до іншої NP-повної задачі про розфарбування графа.

Навчальним заняттям назвемо п'ятірку (s, G_1, T_1, p, k), де $s \in S$ - множина предметів, $G_1 \subseteq G$ – множина груп, $T_1 \subseteq T$ – множина викладачів, $p \in P$ - множина допустимих типів аудиторій, k позначає кількість академічних годин, виділених на дане заняття.

Постановка задачі: кожному заданому заняттю p поставити у відповідність інтервал часу $tm \in Tm$ так, щоб будь-які два заняття p_1 і p_2, які проводяться в один інтервал часу, були сумісні, тобто $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, та $T_1 \cap T_2 = \varnothing$. Отже, в результаті потрібно отримати нову множину під назвою «Розклад» з елеметами $(p, tm), p \in P, tm \in Tm$.

Побудуємо граф, кожній вершині якого поставимо у відповідність елемент множини занять P. Якщо заняття p_1 і p_2 несумісні, то сполучаємо ребром вершини графа, які відповідають цим заняттям. Множину інтервалів часу будемо інтерпретувати як множину кольорів. Таким чином поставлена задача зводиться до вище згаданої задачі про розфарбування графа.

Алгоритми розфарбування поділяються на дві групи: точні і наближені. Точні алгоритми завжди знаходять найкраще розфарбування, але потребують значних затрат часу (наприклад, простий перебір усіх можливих варіантів). Альтернативою їм виступають наближені алгоритми, які працюють швидко, але не завжди оптимально.

Пропонується переборний алгоритм, який на першому кроці повторював би дії певного наближеного алгоритму: Впорядкуємо елементи множини вершин в порядку спадання степенів вершин і послідовно проглядаємо їх. Нехай розглядається вершина v_i. Знаходимо колір з мінімальним номером, в який можна пофарбувати цю вершину, тобто в який ще не пофарбована жодна суміжна з v_i вершина. Якщо такий колір існує - фарбуємо в нього дану вершину, якщо ні – тоді, розглядаємо вершину v_j – вершину з найбільшим номером, яка вже є пофарбованою і суміжною з вершиною v_i. Підбираємо колір $c > c_j$, в який її можна перефарбувати. Якщо такий колір підібрати можна – перефарбовуємо її, в іншому випадку знову виконуємо повернення, але на цей раз до попередньої вершини v_{j-1} і пробуємо перефарбувати її. Тобто якщо в деяку вершину v_j ми потрапили поверненням, то при неможливості вибору кольору з неї повертаємось у вершину v_{j-1}, якщо переходом, то повертаємось в суміжну вершину з максимальним номером.

Якщо на певному етапі потрібно виконати повернення з вершини v_1, то це означатиме, що знайти правильне розфарбування неможливо, тому алгоритм зупиняється.

Описаний алгоритм здійснить повний перебір правильних варіантів розфарбування. Можна помітити, що цей алгоритм спочатку пробує здійснити розфарбування методом послідовного перегляду з попереднім впорядкуванням, який дає непогану оцінку хроматичного числа.

Бахтын Евгений Александрович, студент 4 курса, факультета кибернетики,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: landgraf07@rambler.ru;
Бычков Алексей Сергеевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: bos.knu@gmail.com

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЧЕТКИХ ГИБРИДНЫХ АВТОМАТОВ С НЕЧЕТКИМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Бахтын Е.А, Бычков А.С.

Пусть $PS=(X,2^X,P)$ – пространство возможностей с нормированной мерой возможности, $\mathbf{Y}=(Y,\rho)$ – метрическое пространство с метрическим свидетельством ρ.

Определение 1. Обобщенным нечетким гибридным автоматом с нечетким переключением называется кортеж $HA=(Q,\mathbf{Y},PS,Inv,Jump,Orb)$, в котором Q – конечное множество дискретных состояний; $\mathbf{Y}=(Y,\rho)$ – метрическое пространство непрерывных состояний с метрикой ρ; $PS=(X,2^X,P)$ – пространство возможностей с нормированной мерой возможности; $Inv:Q\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ – отображения, которые задают область дискретных состояний; $Jump:Q\times Y\times X\to 2^{Q\times Y}$ – отображения, которые задают условия перехода; Orb – множество фазовых орбит. Для отображений y^i выполняются условия: $y^i(t)\in Inv(\overline{q}(i))$ для всех $t\in[\tau_i,\tau_i')$, если $i\in\langle\tau\rangle$ и кроме того, $y^i(\tau_i')\in Inv(\overline{q}(i))$, если $i=N(\tau)$ и $\tau_i'\in U(\tau)$, $(\overline{q}(i+1),y^{i+1}(\tau_{i+1}))\in Jump(\overline{q}(i),y^i(\tau_i'),x)$ для всех $i\in\langle\tau\rangle\setminus\{N(\tau)\}$.

Определение 2. Стационарное состояние $y_*\in St(HA)$ называется устойчивым с уровнем $\overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha}:(0,+\infty)\to[0,1)$ – функция, определенная в окрестности нуля, если для произвольного числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$, такое, что для всех фазовых орбит $\chi=(\tau,\overline{q},\overline{y},x)\in Orb$, где $\overline{y}=(y^i)_{i\in\langle\tau\rangle}$ и $\tau=(I_i)_{i\in\langle\tau\rangle}$, таких, что $y^0(\tau_0)\in \mathrm{B}(y_*,\delta)$ и $P\{x\}>\overline{\alpha}(\varepsilon)$, выполняется условие $y^i(t)\in\mathrm{B}(y_*,\varepsilon)$ для всех $i\in\langle\tau\rangle$ и $t\in I_i$.

Рассмотрим кортежи $\left(\overline{\alpha},(V_q)_{q\in Q},(v_q)_{q\in Q}\right)\in\mathbf{HL}(HA,y_*)$: функции $(V_q)_{q\in Q}$ играют роль функций Ляпунова, определенных отдельно для каждого дискретного состояния ГА.

Теорема. Пусть для стационарного состояния $y_*\in St(HA)$ гибридного автомата HA существует корте $HL=\left(\overline{\alpha},(V_q)_{q\in Q},(v_q)_{q\in Q}\right)\in\mathbf{HLo}(HA,y_*)$.

Пусть $\psi=Infinv(\overline{\alpha})$. Пусть выполняются условия: для каждой дуги $(q_1,q_2)\in E$ существует число $\delta_{q_1q_2}>0$ отображение $\vartheta_{q_1q_2}:[0,\delta_{q_1q_2}]\to\mathbf{R}^+$ такое, что $\vartheta_{q_1q_2}(0+)=\vartheta_{q_1q_2}(0)=0$ и для всех элементов $u\in D$ и пар $(y_1,y_2)\in J(q_1,q_2,u)$ выполняются условия неравенства $V_{q_2}(y_2)\le v_{q_2}(\psi(u))$, если $V_{q_1}(y_1)\le v_{q_1}(\psi(u))$, $V_{q_2}(y_2)\le\vartheta_{q_1q_2}(V_{q_1}(y_1))$, если $V_{q_1}(y_1)\in[0,\delta_{q_1q_2}]$ и $V_{q_1}(y_1)>v_{q_1}(\psi(u))$, $\lambda(\hat{q}_1\hat{q}_2..\hat{q}_{n-1}\hat{q}_n\hat{q}_1)\le_{SD}\lambda(\hat{q}_1)$. Тогда стационарное состояние y_* автомата HA устойчиво с уровнем $\overline{\alpha}$.